

〈논 문〉

2:1 내부공진을 갖는 케이블의 비선형 진동의 분기해석

Bifurcation Analysis of Nonlinear Oscillations of Suspended Cables with 2-to-1 Internal Resonance

장 서 일*

Seo Il Chang

(1998년 8월 31일 접수 ; 1998년 10월 12일 심사완료)

Key Words : Cable(케이블), Nonlinear Oscillation(비선형진동), Bifurcation(분기), Internal Resonance(내부공진).

ABSTRACT

A two degree-of-freedom model of suspended cables is studied for forced resonant response. The method of averaging is used to obtain first-order approximations to the response of the system. A bifurcation analysis of the averaged system is performed in the case of 2-to-1 internal resonance. Nonlinear coupled-mode motions are found to bifurcate from single-mode responses and further bifurcate to limit cycle motions via Hopf bifurcations. The limit cycle solutions undergo period doubling bifurcations to chaos.

1. 서 론

케이블은 경량성(light), 유연성(flexible) 그리고 배치의 용이성(deployable) 등의 특징으로 인해 많은 구조물에 쓰이고 있다. 예를 들자면 전력을 공급하는 전선으로, 전철의 가전시스템의 일부로, 해양구조물의 계류용(mooring), 또는 견인용(towing) 로프로, 수중작업장비의 지지로프로, 사장교(cable stayed bridge)의 슬라브 구조의 지지케이블 등등 그 응용범위가 매우 넓다. 그러나 전술한 케이블의 특성상 진동이 유발되기 쉽다는 단점을 또한 갖고 있다.

이러한 케이블의 진동은 많은 연구의 대상이 되어 왔으며 Irvine and Caughey⁽¹⁾가 선형이론에 의해 케이블의 자유진동을 연구했다. 선형운동의 경우 평

면내 운동 (in-plane motion)은 평면외 운동 (out-of-plane motion)과 분리 (decoupled)되며 평면내 운동은 케이블의 중간점을 기준으로 대칭인 (symmetric) 모드로, 또는 비대칭 (anti-symmetric) 모드로 분해되어진다.

그러나 케이블이 갖고 있는 비선형성을 고려하면 선형이론에 의한 해석결과와는 다른 결과를 얻을 수 있으며 특히 평면내 운동과 평면외 운동의 비선형 연성 (nonlinear coupling), 또는 내부공진 (internal resonance)을 고려하는 경우 매우 상이한 결과를 얻을 수 있다⁽²⁾.

내부공진은 2자유도계 이상의 계, 즉 다자유도계에서만 거론할 수 있는 비선형계의 특징이며 케이블을 포함한 대부분의 구조물에서 존재할 수 있는 현상이다^(3,4). 결과적으로 일어날 수 있는 것은 특정 내부공진에 관련된 모드들 사이에서의 간섭작용 (modal interaction)이며 실제적으로 관찰되어질 수 있는 물리적 현상은 그 계의 형상에 따라, 그리고

* 정회원, 서울시립대학교 환경공학부

그 계가 갖는 특정한 비선형성에 따라 매우 다양하다 현(string), 보(beam), 평판(plate)⁽⁵⁾의 경우 서로 인접한 고유진동수를 갖는 2개의 모드사이의 간섭을, 비선형 흡진기(vibration absorber), 원통형 쉘(cylindrical shell)의 경우 정수배의 고유진동수를 갖는 모드사이에서의 간섭에 대해 연구가 되어왔다⁽⁶⁾.

케이블의 경우 평면내 모드와 평면외의 모드의 고유진동수의 비가 2 대 1인 경우 내부공진 현상을 갖게 되며 2차의 비선형성(quadratic nonlinearities)을 갖는 시스템들이 자주 보여주는 포화(saturation)현상⁽⁷⁾을 갖는다.

이 논문에서는 Lee and Perkins⁽²⁾의 경우와 같은 시스템을 연구하며 2차의 비선형항만을 포함시킨다. Lee and Perkins⁽²⁾에서는 모드간의 비선형 연성을 고려하여 비평면운동을 연구했으며 해의 안전성에 관해서도 논했다. 그러나 분기현상으로 인한 해의 질적인 변화를 논하지 않았고 특히 호프(Hopf) 분기점의 발생 가능성은 인지했으나 그로 인해 발생하는 주기해에 대한 연구결과는 제시하지 않았다. 이 논문에서는 다양한 매개변수 공간상에서 피치포크(pitchfork), 새들노드(saddle-node), 호프 분기점(bifurcation sets)⁽⁸⁾을 구하며 특히 호프 분기점(bifurcation point)에서 비롯되는 주기해(periodic solution)에 대해 기술한다. 이러한 호프 분기와 주기해의 발생에 필수적인 internal detuning parameter를 도입하였다.

2. 운동방정식

Fig. 1은 거리 H만큼 떨어진 2개의 지지점에 매달려 있는 케이블을 보여준다. 이 케이블은 길이가 L이고 중간점에서 D의 처짐을 갖고 있다. 이러한

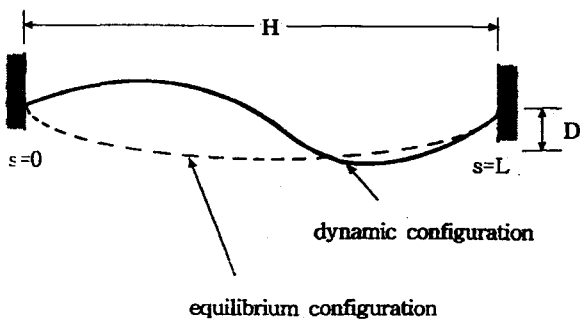


Fig. 1 An elastic cable with length L and sag D at the midspan, suspended a distance H apart

경우 케이블의 운동방정식은 Perkins and Mote⁽⁹⁾의 식을 채택하면 discrete model에 대해 다음과 같이 무차원화해 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{\alpha}}_1 + 2\hat{\xi}_1\omega_1\dot{\hat{\alpha}}_1 + \omega_1^2\hat{\alpha}_1 + \hat{A}_2\hat{\alpha}_1^2 + \hat{A}_3\hat{\alpha}_1^3 \\ + \hat{A}_4\hat{\beta}_2^2 + \hat{A}_5\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_2^2 = \hat{F}\cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{\beta}}_2 + 2\hat{\xi}_2\omega_2\dot{\hat{\beta}}_2 + \omega_2^2\hat{\beta}_2 + \hat{B}_2\hat{\beta}_2^3 + \hat{B}_3\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_2 \\ + \hat{B}_4\hat{\alpha}_1^2\hat{\beta}_2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 $\hat{\alpha}_1$ 과 $\hat{\beta}_2$ 은 시간 t의 함수로 각각 평면내의 모드와 평면외의 모드의 운동을 의미한다.

$\hat{\xi}_1$ 과 $\hat{\xi}_2$ 는 damping ratio, ω_1 과 ω_2 는 두 모드의 고유진동수, \hat{F} 은 가진폭, Ω 는 가진주파수를 의미한다. $\hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5, \hat{B}_2, \hat{B}_3, \hat{B}_4$ 는 비선형항의 계수로 Lee and Perkins⁽²⁾에 정의되어 있다. 이 논문에서는 평면내 모드 중 대칭인 것을 선택하며 처짐(sag)이 있는 경우 2차의 비선형항의 계수인 $\hat{A}_2, \hat{A}_4, \hat{B}_3$ 는 0이 아닌 값을 가지며 특히 \hat{A}_4 와 \hat{B}_3 는 $\omega_1 \approx 2\omega_2$ 의 관계에 있는 2개의 모드를 비선형적으로 연성시키는 계수이다. 식 (1)과 (2)를 유도하는 과정에서 다음과 같은 사항을 가정한다.

(1) 케이블은 균질(homogeneous)하고 1차원의 탄성연속체이며 Hooke's law를 따른다.

(2) 비틀림(torsional), 전단(shear), 굽힘(flexural), 저항력(rigidities)은 무시한다.

3. 평균법의 적용과 정상상태해

이 논문에서는 식 (1), (2)의 비선형 시스템을 해석하기 위해 평균법(method of averaging)⁽⁸⁾을 사용한다. 먼저 식 (1), (2)의 변수와 매개변수를 다음과 같이 rescaling한다.

$$\hat{\alpha}_1 = \epsilon\alpha_1, \quad \hat{\beta}_2 = \epsilon\beta_2, \quad (3)$$

$$\hat{\xi}_1 = \epsilon\bar{\xi}_1, \quad \hat{\xi}_2 = \epsilon\bar{\xi}_2, \quad \hat{F} = \epsilon^2\bar{F}. \quad (4)$$

여기에서 ϵ 은 임의의 small parameter이다. 그리고 주파수 조절변수(frequency detuning parameter)를 다음과 같이 도입한다.

$$\frac{\omega_1^2}{\Omega^2} = 1^2 - \epsilon^2\sigma_1, \quad (5)$$

$$\frac{\omega_2^2}{\Omega^2} = \frac{1}{2^2} \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} - \epsilon \sigma_2 = \frac{1}{2^2} - \epsilon(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (6)$$

여기에서 σ_1 은 external detuning parameter, σ_2 는 internal detuning parameter이다. 식 (4), (5), (6)의 과정을 거쳐 결과적으로 얻게 되는 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_1'' + 2^2 \alpha_1 + \epsilon(-2^4 \sigma_1 \alpha_1 + 2c_1 \alpha_1' + A_2 \alpha_1'' \\ + 16A_4 \beta_2^2 + 4F \cos 2\tau) + \epsilon^2(A_3 \alpha_1^3 + A_5 \alpha_1 \beta_2^2) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \beta_2'' + \beta_2 + \epsilon(-2^2(\sigma_1 + \sigma_2)\beta_2 + 2c_2 \beta_2' + 8B_3 \alpha_1 \beta_2) \\ + \epsilon^2(B_2 \beta_2^3 + B_4 \alpha_1^2 \beta_2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 $\tau = \frac{1}{2} \Omega t$, $(\cdot)' = d(\cdot)/d\tau$, $A_2 = 2^2 \frac{\widehat{A}_2}{\omega_1^2}$,

$$A_3 = 2^2 \frac{\widehat{A}_3}{\omega_1^2}, \quad A_4 = 2^{-2} \frac{\widehat{A}_4}{\omega_1^2}, \quad A_5 = 2^2 \frac{\widehat{A}_5}{\omega_1^2},$$

$$B_2 = 2^2 \frac{\widehat{B}_2}{\omega_1^2}, \quad B_3 = 2^{-1} \frac{\widehat{B}_3}{\omega_1^2}, \quad B_4 = 2^2 \frac{\widehat{B}_4}{\omega_1^2},$$

$$F = \frac{\widehat{F}}{\omega_1^2}, \quad c_1 = 2\xi_1, \quad c_2 = 2\xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

평균법을 적용하기 위해 다음과 같은 변환을 채택한다.

$$\alpha_1 = x_1, \quad \alpha_1' = x_2, \quad \beta_2 = z_1, \quad \beta_2' = z_2.$$

그리고 van der pol transformation으로

$$x_1 = X_1 \cos 2\tau + X_2 \sin 2\tau,$$

$$x_2 = -2X_1 \sin 2\tau + 2X_2 \cos 2\tau,$$

$$z_1 = Z_1 \cos \tau + Z_2 \sin \tau,$$

$$z_2 = -Z_1 \sin \tau + Z_2 \cos \tau. \quad (9)$$

여기에서 X_1, X_2, Z_1, Z_2 는 τ 의 함수이다. 식 (7), (8), (9)에 평균법을 적용하여 3차 이상의 비선형항을 무시하면 다음과 같은 1차의 진폭의 식 (first order amplitude equation)을 얻을 수 있다.

$$X_1' = -4\sigma_1 X_2 - c_1 X_1 + 4A_4 Z_1 Z_2,$$

$$X_2' = -F + 2A_4 Z_2^2 - c_1 X_2 + 4\sigma_1 X_1 - 2A_4 Z_1^2,$$

$$Z_1' = -2(\sigma_1 + \sigma_2)Z_2 + 2B_3(X_2 Z_1 - X_1 Z_2) - c_2 Z_1,$$

$$Z_2' = 2(\sigma_1 + \sigma_2)Z_1 - 2B_3(X_2 Z_2 + X_1 Z_1) - c_2 Z_2. \quad (10)$$

극좌표를 이용하면 식 (10)은

$$R_1' = -c_1 R_1 + 2A_4 R_2^2 \sin(2\phi_2 - \phi_1) - F \sin \phi_1,$$

$$R_1 \phi_1' = 4\sigma_1 R_1 - 2A_4 R_2^2 \cos(2\phi_2 - \phi_1) - F \cos \phi_1,$$

$$R_2' = -c_2 R_2 - 2B_3 R_1 R_2 \sin(2\phi_2 - \phi_1),$$

$$R_2 \phi_2' = 2(\sigma_1 + \sigma_2)R_2 - 2B_3 R_1 R_2 \cos(2\phi_2 - \phi_1). \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)에서 편의상 $\epsilon = 1$ 을 가정했으며 극좌표는 직교좌표와 다음과 같은 관계가 있다.

$$X_1 = R_1 \cos \phi_1, \quad X_2 = R_1 \sin \phi_1,$$

$$Z_1 = R_2 \cos \phi_2, \quad Z_2 = R_2 \sin \phi_2. \quad (12)$$

식 (11)로부터 평면내 운동($\overline{R}_2 \equiv 0$)을 보여주는 단일 모드 정상해(single-mode steady state solution) $\overline{R}_1, \overline{\phi}_1$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{R}_1 = \frac{F}{\sqrt{c_1^2 + 16\sigma_1^2}},$$

$$\tan \overline{\phi}_1 = -\frac{c_1}{4\sigma_1}. \quad (13)$$

평면의 운동($\widetilde{R}_1 \neq 0, \widetilde{R}_2 \neq 0$)을 보여주는 연성 모드 정상해(coupled-mode steady state solution)은 식 (11)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\widetilde{R}_1 = \frac{\sqrt{c_2^2 + 4(\sigma_1 + \sigma_2)^2}}{2B_3}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_2^2 = [8\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2) - c_1 c_2 \\ \pm 2\sqrt{B_3^2 F^2 - \{2\sigma_1 c_2 + (\sigma_1 + \sigma_2)c_1\}^2}] / 4A_4 B_3. \end{aligned} \quad (15)$$

식 (14)에서 볼 수 있듯이 \widetilde{R}_1 은 c_1, F 의 함수가 아니며 이러한 사실이 포화(saturation)현상의 존재를 설명한다. 식 (15)에서 알 수 있듯이 실수의 \widetilde{R}_2 를 갖기 위해서는 다음과 같은 조건을 만족시켜야 한다.

$$F^2 \geq F_1^2 = \frac{1}{B_3^2} [2\sigma_1 c_2 + (\sigma_1 + \sigma_2)c_1]^2. \quad (16)$$

식 (16)의 물리적 의미는 연성 모드 정상해를 갖기 위해서는 외력의 크기 F 가 식 (16)에 의해 결정된 양보다 커야한다는 것이다. 식 (16)은 새들 노드 분기선의 표현식이기도 하다. 또한 식 (15)는 연

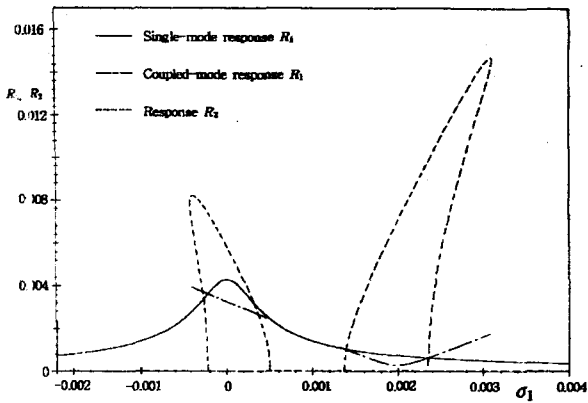


Fig. 2 Steady-state constant responses, R_1 and R_2 , for $F=6.04 \times 10^{-6}$, $c_1=0.0014$, $c_2=0.00035$, $\sigma_2=-0.002$

제나 양의 값을 가져야 하며 이 조건은 피치포크 분기셀을 의미한다. Fig. 2는 정상상태 해를 보여 준다. 실선은 R_1 을, 점선은 R_2 를 의미한다.

4. 안정성과 분기 해석

평면내 운동에 대한 식 (10), 또는 식 (11)의 자코비안의 특성식(characteristic equation)은 다음과 같다.

$$\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_1^2 + 16\sigma_1^2 = 0, \quad (17)$$

$$\lambda^2 + 2c_2\lambda + c_2^2 + 4(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - 4B_3^2 \bar{R}_1^2 = 0. \quad (18)$$

식 (17), (18)로부터 새들 노드 분기와 호프 분기는 단일 모드 해에서는 존재하지 않는다는 것을 알 수 있고 피치포크 분기셀은 $\lambda=0$ 의 조건과 식 (13)과 (13)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(c_1^2 + 16\sigma_1^2)[c_2^2 + 4(\sigma_1 + \sigma_2)^2] = 4B_3^2 F^2. \quad (19)$$

식 (19)는 식 (15)에서 $\bar{R}_2=0$ 의 조건을 대입한 결과와 같다.

평면의 운동에 대한 식 (10), 또는 식 (11)의 자코비안의 특성식(characteristic equation)은 다음과 같다.

$$J_4\lambda^4 + J_3\lambda^3 + J_2\lambda^2 + J_1\lambda + J_0 = 0. \quad (20)$$

여기에서

$$J_4 = 1, \quad J_3 = 2(c_1 + c_2),$$

$$J_2 = 4c_1c_2 + c_1^2 + 16\sigma_1^2 + 16B_3A_4 \bar{R}_2^2,$$

$$J_1 = 2c_1^2c_2 + 32\sigma_1^2c_2 + 16B_3A_4(c_1 + c_2) \bar{R}_2^2,$$

$$J_0 = 16B_3A_4[c_1c_2 + 4B_3A_4 \bar{R}_2^2$$

$$- 8\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2)] \bar{R}_2^2.$$

연성 모드 안정해를 갖기 위해서는 다음과 같은 Routh-Hurwitz criterion을 만족시켜야 한다.

$$J_0 > 0, \quad J_1 > 0, \quad J_2 > 0, \quad J_3 > 0, \quad J_4 > 0 \quad \text{과} \quad (21)$$

$$J_1(J_2J_3 - J_1J_4) - J_0J_3^2 > 0. \quad (22)$$

이 논문의 대상인 케이블의 경우 B_3A_4 는 언제나 양의 수이므로 식 (21)의 마지막 4개의 조건은 언제나 만족된다. 식 (15)와 식 (20)으로부터 $J_0=0$ 는 다음과 동일하다는 것을 알 수 있다.

$$B_3^2 F^2 - [2\sigma_1c_2 + (\sigma_1 + \sigma_2)c_1]^2 = 0. \quad (23)$$

식 (23)은 식 (16)과 비교해 보면 새들 노드 분기셀임을 알 수 있다. 마지막 남은 조건인 식 (22)로부터 연성 모드 해가 한 쌍의 complex conjugate pure imaginary eigenvalues를 갖는 조건, 즉 호프 분기셀을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & J_1(J_2J_3 - J_1J_4) - J_0J_3^2 \\ &= 4c_1c_2(c_1^2 + 16\sigma_1^2)(c_1^2 + 4c_1c_2 + 4c_2^2 + 16\sigma_1^2) \\ &+ 32B_3A_4 \bar{R}_2^2(c_1 + c_2)^2(32\sigma_1^2 \\ &+ 16\sigma_1\sigma_2 + c_1^2 + 2c_1c_2) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)를 관찰한 결과 $\sigma_1\sigma_2 < 0$ 을 만족하는 경우에

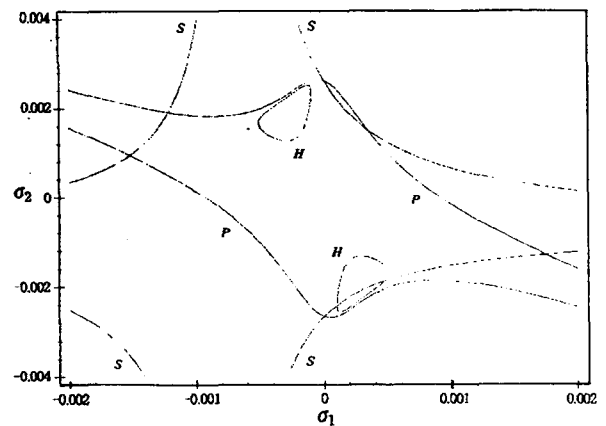


Fig. 3 Bifurcation sets for $F=6.04 \times 10^{-6}$, $c_1=0.0014$, $c_2=0.00035$ (S: Saddle-node, P: Pitchfork, and H: Hopf)

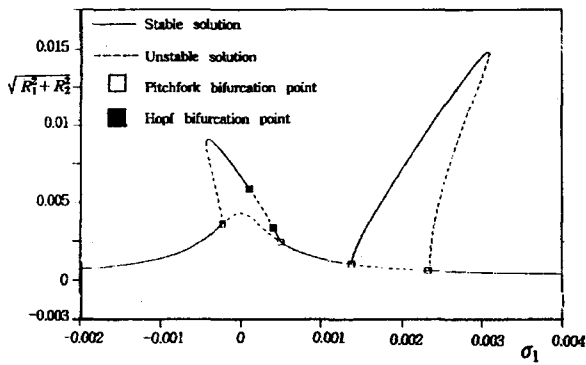


Fig. 4 Bifurcation diagrams for $F=6.04 \times 10^{-6}$, $c_1=0.0014$, $c_2=0.00035$, $\sigma_2=-0.002$ ($\sqrt{R_1^2 + R_2^2}$ vs. σ_1)

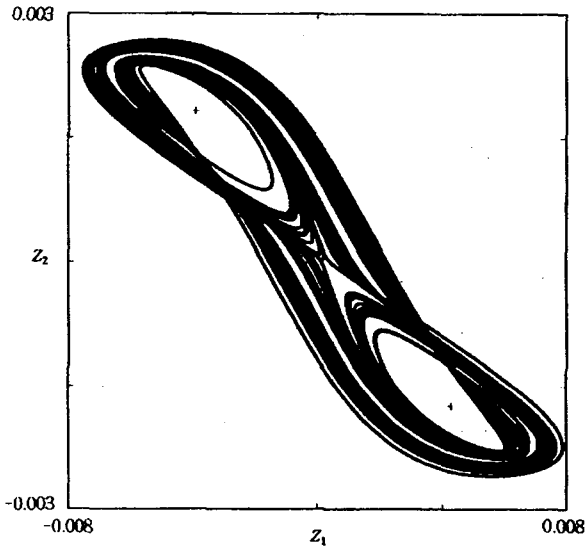


Fig. 5 Chaotic response in phase space for $F=6.04 \times 10^{-6}$, $c_1=0.0014$, $c_2=0.00035$, $\sigma_1=0.0002$, $\sigma_2=-0.002$

만 호프 분기가 일어날 수 있다는 것을 알 수 있다. 만약에 $\sigma_2=0$ 이면, 즉 정확한 내부 공진 상태라면 호프 분기는 일어날 수 없다. Fig. 3은 새들 노드(S), 피치포크(P), 호프(H) 분기셀을 보여 주고 있다.

전술한 호프분기점에서 분기되는 주기해는 주기배가분기를 일으킬 수 있으며 그 결과 혼돈해⁽⁸⁾가 발생하기도 한다. Fig. 4는 비선형 시스템 전용해석 프로그램인 AUTO⁽¹⁰⁾로부터 얻은 결과이며 검은 사각형 기호는 호프분기점을, 흰 사각형 기호는 피치포크분기점을 각각 의미한다. 실선은 안정해를, 점

선은 불안정해를 의미한다. 이러한 호프 분기점에서 발생하는 주기해의 형태는 매우 다양하며 Fig. 5는 혼돈해의 한 예를 보여준다.

5. 결론 및 고찰

2차와 3차의 비선형항을 갖고 있는 것으로 모델링한 케이블의 동역학적 거동을 1차의 평균법을 적용하여 고찰한 결과 호프분기를 포함한 다양한 분기현상이 일어남을 알 수 있었다. 분기셀을 구함으로써 물리적 매개변수들의 다양한 조합에 따라 분기가 일어날 수 있는 조건들을 알 수 있었으며 호프분기를 통해 발생하는 주기해는 혼돈적인 양상을 보이는 것도 관찰되었다. 향후로는 이러한 혼돈해의 분기셀을 구하는 것이 중요한 연구과제가 되리라 예측한다.

이 논문에서 연구한 케이블의 운동은 물리적으로 관찰할 때 단면상에서 타원의 궤적을 그리며 진동하는 양상을 보이며 특히 호프 분기점에서 발생하는 주기해는 진폭변조된 (amplitude-modulated) 응답을 보이게 된다. 따라서 서론에서 언급한 케이블이 포함된 구조물의 초기설계시 이러한 점을 고려해야 할 것으로 사려된다.

참고 문헌

- (1) Irvine, H. M. and Caughey, T. K., 1974, "The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable", Proceedings of the Royal Society of London A341, pp. 299~315.
- (2) Lee, C. L. and Perkins, N. C., 1992, "Nonlinear Oscillations of Suspended Cables Containing a Two-to-One Internal Resonance", Nonlinear Dynamics 3, pp. 465~490.
- (3) Nayfeh, A. H. and Balachandran, 1989, "Modal Interactions in Dynamical and Structural Systems", Applied Mechanics Review 42, pp. S175-S202.
- (4) 장서일, "구조물의 내부공진에 대하여", 1997, 한국소음진동공학회지, 제 7 권, 제 1 호, pp. 20~29.
- (5) Chang, S. I., Bajaj, A. K. and Davies, P., 1995, "Bifurcations and Chaotic Motions in Resonantly Excited Structures", In Bifurcation and Chaos: Theory and Application, edited by Awrejcewicz, J., Springer-Verlag, Berlin, pp.

- 217~252.
- (6) Bajaj, A. K., Davies, P. and Chang, S. I., 1995. "On Internal Resonances of Mechanical Systems", In Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics edited by Kleiman, W. and Sri Namachchivaya, N. , CRC Press, pp. 69~94.
- (7) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, Nonlinear Oscillations, Wiley Interscience, New York.
- (8) Guckenheimer, J. and Holmes, P. J., 1983, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York.
- (9) Perkins, N. C. and Mote, C. D., Jr., 1987. "Three-Dimensional Vibration of Travelling Elastic Cables", Journal of Sound and Vibration 114, pp. 325~340.
- (10) Doedel, E., 1986, AUTO: Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations, Report, California Institute of Technology.