

〈논 문〉

방향 시계열에 의한 회전체 동특성 규명: (I) 모델링 및 해석

Directional ARMAX Model-Based Approach for Rotordynamics Identification, Part 1 : Modeling and Analysis

박 종 포* · 이 종 원**

Jong-Po Park and Chong-Won Lee

(1998년 8월 3일 접수 : 1998년 9월 11일 심사완료)

Key Words : Directional ARMAX (방향 시계열), Directional Frequency Response Function (방향 주파수 응답함수), Degree of Anisotropy (비등방도), Modal Parameter Estimation (모드 매개변수 추정), Rotordynamics Identification (회전체 동특성 규명)

ABSTRACT

A new time series method, directional ARMAX (dARMAX) model-based approach, is proposed for rotor dynamics identification. The dARMAX processes complex-valued signals, utilizing the complex modal testing theory which enables the separation of the backward and forward modes in the two-sided frequency domain and makes effective modal parameter identification possible, to account for the dynamic characteristics inherent in rotating machinery. This paper is divided into two parts: The dARMAX modeling, analysis, and fitting strategy are presented in the first part, whereas a evaluation of its performance characteristics based on both simulated and experimental data is presented in the second.

1. 서 론

구조물 동특성 규명을 위해 시계열 방법은 주파수 영역 방법이 갖는 단점 (분해능, 누설, 평균화, 커브 피팅 등)을 해결하는 대체 수단으로 최근 많은 연구가 이루어졌다^(1,2). 기존의 ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs) 모델을 이용하는 방법은 일반 정지구조물의 동특성 또는 모드 매개변수 규명에 효과적으로 사용되어져 왔다. 정지구조물과는 달리 회전체는 회전 방향 정보를 갖는 후방 (backward: 음의 고유치) 및 전방 (forward:

양의 고유치) 모드라 알려진 독특한 모드 특성을 보인다. 그런데, 기존의 ARMAX 모델은 일반 정지구조물에는 적합하나 회전체에는 부적합한 기존의 모드 시험이론으로 부터 유도되었다. 진동신호를 실수 값으로 취급하는 위의 두 가지 기존 방법들을 회전체에 적용했을때, 모드와 공액 복소 모드를 함께 주므로 전,후방 모드의 방향성을 상실하고 이 모드들의 심한 간섭을 초래해 효과적인 모드 매개변수 규명이 이루어지지 않았다^(3~5). 최근에 개발된 복소 모드 시험이론은 복소 입출력 사이에 정의된 방향 주파수 응답함수 dFRF (directional Frequency Response Function)를 이용해 전,후방 모드의 방향성을 부여하고, 이 모드들을 주파수 영역에서 분리하므로, 회전체의 동특성 또는 모드 매개변수 규명에 효과적이다^(3~5).

* 정회원, 한국중공업(주) 기술연구원

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

본 논문에서는 효과적인 회전체 동특성 규명을 위해 복소 모드 시험이론을 시간영역에서 구현하고 복소 신호처리를 근간으로 하는 새로운 방향 시계열 (dARMAX) 모델을 이용하는 방법을 제안한다⁽⁵⁾. 먼저 회전체의 동적 특성을 고려하기 위해 방향 주파수 응답함수로 부터 dARMAX 모델을 유도하고, 기존의 시계열 모델의 이산계수 추정법과 차수 결정법을 복소 신호를 다루기 위하여 확장하고, 효과적인 계수 추정을 위하여 체계적인 모델 피팅 전략을 제시한다. 본 논문에서는 전술한 바와 같이 dARMAX 모델의 정립 및 해석 등의 이론적 내용을 기술하고, 이어지는 후속 논문에서는 수치 모의 실험과 실험실에서 제작된 회전체 실험 등을 통하여, 제안된 방법의 타당성, 실제 회전체의 적용성과 유용성을 검증하고, 기존의 ARMAX 모델에 의한 방법 및 주파수 영역의 방법과의 비교를 통해 개발된 방법이 회전체의 모드 매개변수 규명에 보다 효과적임을 보인다.

2. 회전체계의 모드 시험이론

운전 중인 회전체는 방향 정보를 갖는 전,후방 모드라는 특이한 동특성을 보이고, 전방 (회전방향과 동일한 방향) 성분과 후방 (회전방향의 반대방향) 성분으로 구성된 선회 (whirling) 운동을 한다. 회전체의 동특성 해석에서 이 모드와 선회 운동의 방향성의 고려는 반드시 필요하다. 시스템의 지배방정식 또는 진동신호를 실수표기로 하여 해석하면 항상 공액 복소수도 해로 하므로 중요한 방향정보를 상실하게 된다. 비록 수학적 관점에서는 동일하지만, 최근 복소수표기에 의한 회전체 동특성 해석 방법이 많이 등장하였는데, 이는 간략한 시스템 지배방정식을 제공하고 회전체에서 발생하는 물리적 현상과 방향 정보에 대한 깊이 있는 고찰을 가능하게 한다. 특히 등방 회전체에서 복소 표기법의 사용은 많은 이점을 제공한다⁽³⁻⁵⁾.

Fig. 1과 같이 위치 l 에서 가진력 $f_{yl}(t), f_{zl}(t)$ 와 위치 m 에서 변위 응답 $y_m(t), z_m(t)$ 를 갖는 회전체계를 고려하자. 편의상 밑 첨자 l 과 m 은 생략하고, Fig. 2와 같이 복소 변위 $p(t) = y(t) + jz(t)$ 와 복소 힘 $g(t) = f_y(t) + jf_z(t)$ 을 도입하면 비등방 회전체계의 입출력 사이의 방향 주파수응답함수는 다음과 같이 정의된다⁽³⁻⁵⁾.

$$P(j\omega) = H_{gp}(j\omega)G(j\omega) + H_{\bar{g}p}(j\omega)\hat{G}(j\omega) \quad (1)$$

여기서 $P(j\omega)$, $G(j\omega)$ 및 $\hat{G}(j\omega)$ 는 각각 복소 신호 $p(t)$, $g(t)$ 및 $\bar{g}(t)$ 의 푸리에 변환을, j 는 단위복소수를, 위 첨자 - 는 공액 복소수를 나타낸다. 그리고 정 (normal) 방향 주파수응답함수 $H_{gp}(j\omega)$ 와 역 (reverse) 방향 주파수응답함수 $H_{\bar{g}p}(j\omega)$ 는 다음과 같다⁽³⁻⁵⁾.

$$H_{gp}^l(j\omega) = \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left[\frac{u\bar{v}}{j\omega - \lambda} + \frac{\bar{u}\hat{v}}{j\omega - \bar{\lambda}} \right]^i \quad (2a)$$

$$H_{\bar{g}p}^l(j\omega) = \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left[\frac{u\bar{v}}{j\omega - \lambda} + \frac{\bar{u}\hat{v}}{j\omega - \bar{\lambda}} \right]^i \quad (2b)$$

여기서 u 와 \bar{u} 는 모드 벡터의 m 번째 요소를, \bar{v} 와 \hat{v} 는 어드조인트 (adjoint) 벡터의 l 번째 요소를, λ 는 고유치를 나타낸다. 그리고 N 은 방향 좌표 벡터의 차원 또는 단위요소(station)의 개수를, B 및 F 는 후방 (backward) 및 전방 (forward) 모드를 뜻한다.

그리고, 등방 회전체계에서는 역방향 주파수응답함수와 공액 복소 모드는 존재하지 않으므로 식 (2)는 다음과 같이 표현된다⁽³⁻⁵⁾.

$$H_{gp}(j\omega) = \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left[\frac{u\bar{v}}{j\omega - \lambda} \right]^i, \quad H_{\bar{g}p}(j\omega) = 0 \quad (3)$$

복소 입출력간에 정의된 위의 방향 주파수응답함수들은 일반적으로 주파수 ω 에 대해 공액 복소 우함수(conjugate even function)가 아니다.

주파수영역에서 복소 입출력 사이의 방향 주파수응답함수의 추정치는 다음 식으로 구할 수 있다^(7,8).

$$H_{gp}(j\omega) = \frac{S_{gp}(j\omega) \left(1 - \frac{S_{\bar{g}g}(j\omega)}{S_{gp}(j\omega)S_{\bar{g}g}(j\omega)} \right)}{S_{\bar{g}g}(j\omega) \left(1 - \gamma_{\bar{g}g}^2(j\omega) \right)}$$

$$H_{\bar{g}p}(j\omega) = \frac{S_{\bar{g}p}(j\omega) \left(1 - \frac{S_{gp}(j\omega)}{S_{\bar{g}p}(j\omega)S_{gp}(j\omega)} \right)}{S_{gp}(j\omega) \left(1 - \gamma_{gp}^2(j\omega) \right)} \quad (4)$$

$S_{ik}(j\omega)$, $i, k = p, g, \bar{g}$ 는 $p(t)$, $g(t)$ 및 $\bar{g}(t)$ 사이의 방향 스펙트럼 밀도함수이다. $\gamma_{\bar{g}g}^2(j\omega)$ 는 $g(t)$ 와 $\bar{g}(t)$ 사이의 방향 코히어런스 함수

(directional coherence function (dCOH)) 이고 다음과 같이 정의된다^(7,8).

$$\gamma_{gg}^2 = \frac{|S_{gg}(j\omega)|^2}{S_{gg}(j\omega)S_{gg}(j\omega)} \quad (5)$$

지금까지 설명한 복소 모드 시험이론은 전.후방 모드에 대한 분명한 물리적 고찰을 가능하게 하며, 주파수영역에서 이 모드들의 분리를 가능하게 하므로, 효과적인 모드 매개변수 규명을 할 수 있다. 그래서 본 논문에서는 회전체 모드 매개변수 규명에 있어서 주파수 영역 방법이 갖는 단점들을 극복하고 복소 모드 시험법의 이점을 얻기 위해, 제안한 방향 시계열 모델을 방향 주파수응답함수로부터 유도하여 시간영역에서 복소 모드 시험 이론을 구현한다.

3. dARMAX 모델링 및 해석

3.1 dARMAX 모델의 유도

Fig. 1에서와 같이 비등방(anisotropic) 회전체계의 위치 l 가진과 응답 m 사이의 정방향 전달함수(normal directional transfer function(dTF))는 식 (2)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다⁽⁵⁾.

$$H_{g_l p_m}(s) = \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left[\frac{u_m \bar{v}_l}{s-\lambda} + \frac{\bar{u}_m \hat{v}_l}{s-\bar{\lambda}} \right]_r \quad (6)$$

식 (6)을 충격불변원리 (impulse invariance principle)^(5,9)로 연속영역에서 이산영역으로 변환하면, 식 (6)의 정방향 전달함수는 이산 영역에서 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$H_{gp}(d) = \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left[\frac{\gamma}{1-\mu d} + \frac{\hat{\gamma}}{1-\bar{\mu} d} \right]_r \quad (7)$$

여기서

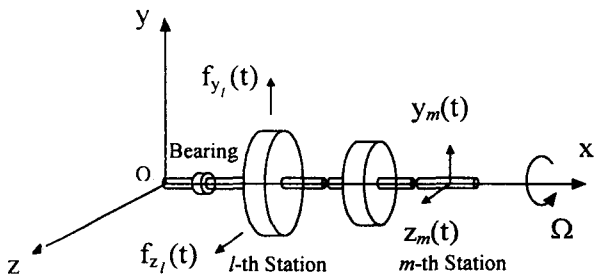


Fig. 1 Coordinate system of a rotor-bearing system

$$\mu_r^i = \exp(\lambda_i^r T), \quad \bar{\mu}_r^i = \exp(\bar{\lambda}_i^r T) \quad (8a)$$

$$\gamma_r^i = T(u_m \bar{v}_l)_r^i, \quad \hat{\gamma}_r^i = T(\bar{u}_m \hat{v}_l)_r^i \quad (8b)$$

$d(=z^{-1})$ 는 지연자(delay operator), T 는 등 샘플링 간격을 각각 나타낸다. 그리고 편의상 밀 첨자 l 과 m 은 생략한다. 식 (7)은 지연자 d 의 다항식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_{gp}(d) = \frac{B^f(d)}{\Phi(d)} \quad (9)$$

여기서

$$\Phi(d) = \prod_{i=B,F} \prod_{r=1}^N (1 - \mu_r^i d)(1 - \bar{\mu}_r^i d) = 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k d^k$$

$$B^f(d) = \sum_{k=1}^q \beta_k^f d^k; \beta_0^f = 0$$

$$\gamma_i = H(d)(1 - \mu_i d)|_{d=1/\mu_i} \quad (10)$$

특성근은 실수이거나 공액 복소수이므로 다항식 $\Phi(d)$ 의 계수는 실수이다. γ_r^i 는 반드시 $\hat{\gamma}_r^i$ 의 공액 복소수일 필요는 없으므로 다항식 $B^f(d)$ 의 계수는 일반적으로 복소수이다. N 개의 단위요소를 갖는 비등방 회전체계에는 $4N$ 개의 극점(poles)을 가지므로 다항식 $\Phi(d)$ 의 차수 p 는 $4N$ 이 된다. 연속 영역 전달함수를 충격불변원리로 이산영역 전달함수로 변환하면 가진력과 변위응답 사이에는 단위 시간지연(unit time-delay)이 발생하므로 다항식의 차수 q 는 $p-1$, 첫 항 β_0^f 는 0이 된다^(2,5). 같은 방법으로 이산 영역에서의 역방향 전달함수(reverse dTF)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_{gp}^b(d) = \frac{B^b(d)}{\Phi(d)} \quad (11)$$

여기서

$$B^b(d) = \sum_{k=1}^q \beta_k^b d^k; \beta_0^b = 0$$

Fig. 2(a)는 비등방 회전체계의 복소 입출력 모델을 나타낸다. $n(t)$ 는 평균이 0인 정상 복소 잡음(zero-mean stationary complex noise)을, $h_{gp}(t)$ 와 $h_{gp}^b(j\omega)$ 는 정방향 및 역방향 주파수응답함수(normal and reverse dFRFs) $H_{gp}(j\omega)$ 와 $h_{gp}^b(j\omega)$ 의 역 푸리에 변환인 정방향 및 역방향 충격응답함수(normal and reverse directional impulse

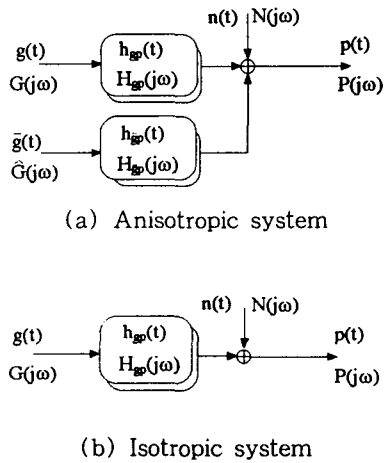


Fig. 2 Complex input and output models

response functions (dIRFs))이다. 이산영역에서 비 등방 회전체계의 방향 전달함수 모델은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p_t = H_{gp}(d)g_t + H_{g\bar{p}}(d)\bar{g}_t + n_t \quad (12)$$

여기서 p_t , g_t 및 n_t 는 $p(t)$, $g(t)$ 및 $\bar{p}(t)$ 의 샘플링 치(sampling version)이다. 잡음 프로세스 n_t 를 유리 스펙트랄 밀도(rational spectral density)^(10,11)로 특징 지을 수 있다고 가정하면, 잡음 프로세스는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$n_t = \frac{\Theta(d)}{\Phi(d)} \varepsilon_t \quad (13)$$

여기서

$$\Theta(d) = 1 + \theta_1 d + \dots + \theta_r d^r$$

그리고, $\varepsilon(t)$ 는 평균이 0, 분산이 σ_ε^2 인 복소 백색 잡음 (white noise)을 나타낸다. 잡음 프로세스의 입출력이 복소수이므로 편의상 계수 θ_i 를 복소수로 정의한다. 또, 다항식 $\Theta(d)$ 와 $\Phi(d)$ 의 모든 영점(zeros)은 d -영역의 단위 원밖에 존재하여 안정성(stability)과 반전성(invertibility)을 만족한다고 가정한다. 여기서 지연자 $d(p_{t-k} = d^k p_t)$ 를 도입하면 식 (12)의 이산영역의 방향 전달함수는 복소 신호와 계수를 갖는 방향시계열 dARMAX(p, q, r) 모델로 다음과 같이 표현된다.

$$p_t = \sum_{i=1}^p \phi_i p_{t-i} + \sum_{i=1}^q \{\beta_i^f g_{t-i} + \beta_i^b \bar{g}_{t-i}\} + \sum_{i=1}^r \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (14)$$

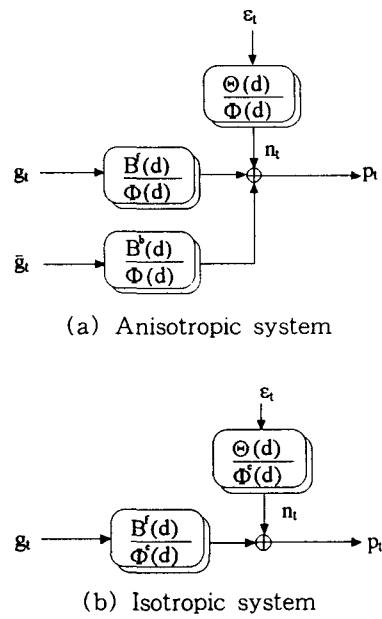


Fig. 3 Directional ARMAX models

위의 dARMAX(p, q, r) 모델은 이산영역에서 비 등방 회전체계의 일반적 표현이다.

등방 회전체계 (Fig. 2 (b))에서, 식 (3)과 같이 역방향 주파수응답함수는 존재하지 않으므로, 식 (12)는 아래와 같이 보다 간략하게 표현된다.

$$p_t = H_{gp}(d)g_t + n_t \quad (15a)$$

여기서

$$p_t = H_{gp}(d)g_t + n_t, \quad H_{g\bar{p}}(d) = 0$$

$$H_{gp}(d) = \frac{B^f(d)}{\Phi^c(d)}, \quad n_t = \frac{\Theta(d)}{\Phi^c(d)} \varepsilon_t \quad (15b)$$

다항식 $\Phi^c(d)$ 는 아래 형태로 표현된다.

$$\Phi^c(d) = \prod_{i=B,F} \prod_{r=1}^N (1 - \mu_i^r d) = 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k^c d^k \quad (16)$$

등방 회전체계에서는 공액 복소 근이 존재하지 않으므로^(3~5) 다항식 $\Phi^c(d)$ 의 계수 ϕ_k^c 는 복소수이고, 그 차수 $p = 2N$ 으로 줄어들게 된다. Fig. 3(b)는 간략한 단일 입출력의 등방계 모델을 보여주고 있다. 식 (15)는 다음의 등방 dARMAX(p, q, r) 모델로 표현될 수 있다.

$$p_t = \sum_{i=1}^p \phi_i^c p_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i^f g_{t-i} + \sum_{i=1}^r \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (17)$$

스 (14)와 비교해 등방 시계열 모델에서는 다항식 $P^b(d)$ 의 계수는 모두 0이고, 계수 ϕ_i^b 는 복소수이며, 다항식 차수 p, q 및 r 이 줄어들음을 알 수 있다.

비등방 및 등방 회전체계의 dARMAX 모델의 계수들을 규명하고, 식 (10) 및 식 (16)으로 부터 다항식 $\Phi(d)$ 및 $\Phi^c(d)$ 의 근과 γ_r^i 및 $\hat{\gamma}_r^i$ 를 구하면, 고유진동수, 감쇠 및 모드 형상 등의 전체 모드 매개변수를 식 (8)로 부터 얻을 수 있다. dARMAX 와 ARMAX 모델 사이의 상관 관계는 부록 A에 주어진다.

3.2 이산 계수의 추정

dARMAX 모델의 계수를 추정하기 위해 준 최적 (suboptimal) 추정자의 하나인 축차최소 자승법 (iterative least squares (ILS))을 사용한다. 이 추정자는 비록 수렴성은 보장하지 못하지만 구현하기 쉽고 일관적 (consistent)이고 점근적 정규(asymptotically normal)이다.^(12,13) 또한 이 추정자는 실수 계수의 추정을 위해 개발되었지만, 여기서는 복소 계수의 추정을 위해 다음과 같이 수정하여 사용한다.

비등방 회전체계의 시계열 모델 식 (14)를 계수 벡터 χ 와 $t=p+1, \dots, n$ 동안의 관측 시퀀스 v_t 의 형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p = V\chi + \varepsilon \quad (18)$$

여기서

$$p = \{p_{p+1}, \dots, p_n\}, V = [v'_{p+1}, \dots, v'_n], \varepsilon = \{\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n\}$$

$$v_t = \{p_{t-1}, \dots, p_{t-p}, g_{t-1}, \dots, g_{t-q}, \bar{g}_{t-1}, \dots, \bar{g}_{t-q}, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-r}\}$$

$$\chi = \{\phi_1, \dots, \phi_p, \beta_1^f, \dots, \beta_q^f, \beta_1^b, \dots, \beta_q^b, \beta_1, \dots, \beta_r\}$$

프라임 (prime) 부호는 행렬의 전치(transpose)를, $\nu = p+2q+r$ 는 추정해야 할 계수들의 수를 나타낸다. 계수 $\phi_i, \beta_i^f, \beta_i^b, \theta_i$ 의 추정치를 각각 $\tilde{\phi}_i, \tilde{\beta}_i^f, \tilde{\beta}_i^b, \tilde{\theta}_i$ 라 하면, 상응하는 잔차 추정치 $\tilde{\varepsilon}_t$ 는 추정모델의 회귀적 (recursive) 사용에 의해 다음 식으로 표현된다.

$$\tilde{\varepsilon}_t = p_t - v_t \tilde{\chi}, \quad t = p+1, \dots, n \quad (19)$$

회귀 (recursion) 시작 단계에서 잔차 $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-r+1}$ 가 미지수라, 역전망 (back-forecast)으로 구라든지 또는 0으로 하면 되지만, 본 논문에서는 아래 단계 0에서와 같이 방향시계열 dARX($p+r$,

$q+r$) (directional AutoRegressive model with exogenous variable) 모델을 선형회귀법 (linear regression)으로 피팅하여 초기 잔차를 구한다^(12,14). dARMAX 모델 계수의 추정은 아래에 요약된 절차에 따라 단계별로 이루어진다⁽¹²⁾:

단계 0: 선형회귀는 아래의 결과를 준다.

$$\tilde{\varepsilon}(0) = p - W[W^H W]^{-1} W^H p \quad (20)$$

여기서 $\tilde{\varepsilon}(0)$ 는 초기 축차 (iteration, $k=0$)에서 ε 의 추정치이고, 위 첨자 H 는 행렬의 허미션 기능 (Hermitian operator)을 의미한다. 그리고

$$W = [w'_{p+r+1}, w'_{p+r+2}, \dots, w'_{p+r+n}]^{(n-p-r) \times \nu}$$

$$w_{p+r+i} = \{p_{p+r+i-1}, \dots, p_i, g_{p+r+i-1}, \dots, g_{p+r-q}, \bar{g}_{p+r+i-1}, \dots, \bar{g}_{p+r-q}\}_{(ix \nu)}$$

$$\nu = (p+r) + 2(q+r)$$

축차수 $k=0, \tilde{\chi}(0)=0$ 으로 하고 단계 2로 나아간다.

단계 1 : 반복적으로 $t=p+1, p+2, \dots, n$ 잔차를 계산한다:

$$\tilde{\varepsilon}_t(k) = p_t - \sum_{i=1}^p \tilde{\phi}_i(k) p_{t-i} - \sum_{i=1}^q \{\tilde{\beta}_i^f(k) g_{t-i} + \tilde{\beta}_i^b(k) \bar{g}_{t-i}\} - \sum_{i=1}^r \tilde{\theta}_i(k) \varepsilon_{t-i}(k) \quad (21)$$

단계 2 : 잔차에 의해 갱신된 행렬 $V(k)$ 를 구성하고, 선형회귀에 의해 아래와 같이 새로운 계수 추정치를 계산한다:

$$\tilde{A}(k) \tilde{\chi}(k+1) = \tilde{b}(k) \quad (22)$$

여기서

$$\tilde{A}(k) = \tilde{V}^H(k) \tilde{V}(k), \quad \tilde{b}(k) = \tilde{V}^H(k) p$$

단계 3: 계수의 수렴여부를 점검한다:

$$|\tilde{\chi}(k+1) - \tilde{\chi}(k)| = \eta |\tilde{\chi}(k)| \quad (23)$$

위 식을 만족하면 종료하고, 만족하지 못하면 k 값을 1 증가시키고 단계 1부터 단계 3까지를 반복한다. 여기서 η 는 임의의 작은 수이다.

벡터 v_t, w 및 χ 의 \bar{g}_{t-i} 와 β_i^b 항을 제거하고 ϕ_i 를 복소수라 두면 위 알고리즘을 등방 시계열 모델에 바로 적용할 수 있다. 앞에서 언급했듯이, 등

방 시계열의 AR 차수 p 는 비등방 시계열의 절반이므로 선형회귀에서 비교적 매우 적은 계산 노력과 시간이 요구된다. 또한 등방 시계열에서 A 가 허미션 (Hermitian) 행렬이므로, 콜레스키 분해 (Cholesky decomposition) 방법을 이용해 효과적으로 식 (22)의 해를 구할 수 있다.

3.3 모델 차수 결정

적절한 모델 차수의 결정은 파라미터 (parametric) 방법에서 주요한 쟁점 중의 하나이다. 보다 적은 모델 계수를 갖는 효과적이고 간략한 모델 (Parsimonious model)이 통상 바람직하다. 과도한 차수로 피팅하는 것을 예방하기 위해 추정자 및 모델의 구조와 특징에 따라서 다양한 판별식 (criterion)이 제안되어 왔다. 하지만 심한 측정 잡음 하에서 판별식들은 그 기능을 다 하지 못하고, 이런 경우 실제 차수보다 큰 초과차수 모델 (over-parameterized model)이 보다 정확한 계수 추정치를 제공할 수도 있다. 물론 초과차수 모델은 정보행렬 (information matrix)을 나쁜 조건 (ill-conditioned)으로 만들거나 의사 모드 (spurious mode)를 초래하는 경향이 있다. 일반적으로 낮은 진폭과 높은 감쇄를 갖는 이 의사 모드는 물리적인 뜻이 없는 순전히 수학적 결과이다. 모델 차수를 변화 시키면 실제 모드 (physical mode)와는 달리 의사 모드와 관련된 극점들이 일관성 없이 사라지고 등장하기 때문에, 유령 모드 (ghost mode)라고도 불리는 의사 모드는 쉽게 실제 모드와 구별된다^(15,16). 실제로 회전체계에서 측정된 응답은 고유의 운전응답과 서로 다른 크기의 근접한 (closely spaced) 모드들로 구성되기 때문에, 정확한 계수 추정을 위해 일반적으로 초과차수 피팅 (overfitting)은 불가피하다. 적절한 차수 결정이 어려울 때는 주파수 응답함수를 이용하는 것도 한 가지 방법이다^(5,15). 규명하고자 하는 시스템과 잡음에 사전 지식이 없을 경우에는 적절한 차수 결정을 위해 회전체 역학 이론을 근거로 다음과 같은 체계적인 방법이 권장된다: 비등방 (등방) 회전체계의 경우 통계적으로 만족 조건에 도달할 때까지 dARMAX(4k, 4k-1, r) (dARMAX(2k, 2k-1, r)) 모델을 순차적으로, k, r=1, 2, ..., 피팅한다. 앞에서 식 (10)과 (11)에서 설명했듯이, 비등방 회전체계의 모드응답 (modal response)은 전·후방 모드로 그 공액 복소 모드로 구성되기 때문에 AR 차수 p 를 4 씩 증가시키고, 등방 회전체계에서는 공액 복

소 모드가 존재치 않으므로 AR 차수 p 를 2씩 증가시킨다⁽⁵⁾.

본 논문에서는 적절한 차수 결정을 위해 아래에서 정의된 AIC (Akaike's Information Criterion)⁽¹⁷⁾, SBC (Schwartz's Bayesian Criterion)⁽¹⁸⁾ 및 RT⁽¹⁵⁾를 사용한다. 원래 이 판정식 등은 실수값을 갖는 데이터의 통계적 해석을 위해 사용되지만⁽¹⁹⁾, 본 연구에서는 복소수 데이터에도 적용할 수 있도록 확장하였다.

식 (A1)로 표현되는 통상의 ARMAX 프로세서의 차수는 다음 식으로 정의되는 AIC, SBC 및 RT 등을 기준으로 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} AIC &= n \ln |\Sigma| + 2\nu \\ SBC &= n \ln |\Sigma| + \nu \ln n \\ RT &= 1 - \frac{\tilde{\sigma}_{e_1}^2 + \tilde{\sigma}_{e_2}^2}{\sigma_y^2 + \sigma_z^2} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 $\nu (= p + 4q + 2r)$ 는 ARMAX모델의 실수 계수들의 총 개수, n 은 관측치의 개수, $|\Sigma|$ 는 잔차 (residuals)의 공분산 (covariance) 행렬식, $\tilde{\sigma}_{e_1}^2$ 및 $\tilde{\sigma}_{e_2}^2$ 는 잔차의 분산 추정치를 각각 나타낸다. σ_y^2 와 σ_z^2 는 잡음에 오염되지 않은 응답 y 와 z 의 분산이다. 잔차들이 서로 상호관계가 없고 (uncross-correlated) 평균이 0, $\tilde{\sigma}_{e_1}^2 = \tilde{\sigma}_{e_2}^2 = \tilde{\sigma}_e^2$ 및 $\sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma^2$ 이라 가정하면 식 (24)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} AIC &= 2n \ln \tilde{\sigma}_e^2 + 2(p + 4q + 2r) \\ SBC &= 2n \ln \tilde{\sigma}_e^2 + (p + 4q + 2r) \ln n \\ RT &= 1 - \tilde{\sigma}_e^2 / \sigma^2 \end{aligned} \quad (25)$$

위에서 $\tilde{\sigma}_e^2 = 2\tilde{\sigma}_e^2$ 및 $\sigma_b^2 = \sigma_y^2 + \sigma_z^2$ 라 가정하면, 방향 dARMAX 모델에서는 식 (25)는 다음과 같이 수정된다.

$$\begin{aligned} AIC &= 2n \ln(\tilde{\sigma}_e^2/2) + 2\nu \\ SBC &= 2n \ln(\tilde{\sigma}_e^2/2) + \nu \ln n \\ RT &= 1 - \tilde{\sigma}_e^2 / \sigma_b^2 \end{aligned} \quad (26)$$

여기서

$$\nu = \begin{cases} p + 4q + 2r; & \text{비등방} \\ 2(p + q + r); & \text{등방계} \end{cases}$$

$\tilde{\sigma}_e^2$ 및 σ_b^2 는 각각 복소 잔차 및 오염되지 않은 복소 응답의 분산을 나타낸다.

4. dARMAX 모델과 피팅 방법

dARMAX 모델을 적용할 때는 대상인 실제 회전체가 등방 또는 비등방인지를 미리 알아야 하고, 등방 또는 매우 약한 비등방 회전체로 판명되면 간단한 등방 dARMAX 모델로 시스템 계수들을 효과적으로 추정하고, 그 외는 비등방 dARMAX 모델을 사용한다^(5,20). 그래서, 본 논문에서는 모드 정보(modal information)를 근거로 해서 비등방성의 크기를 정량화하기 위해 비등방기여도(Anisotropy Contribution Factor(ACF))를 정의하였다. 만약 계의 비등방성에 대한 사전 정보가 전혀 없을 경우 방향 주파수응답 함수를 이용할 수도 있다: 역방향 주파수응답 함수의 존재 또는 정방향 주파수응답 함수에서의 공액 복소 모드의 존재는 회전체계에 비등방성이 있음을 지시한다^(3,4).

통상의 주파수응답 함수와는 달리, 방향 주파수응답 함수에서의 모드와 공액 복소 모드에 관련된 신호 에너지는 서로 다르다는 것에 착안하여, 모드의 부분 에너지(energy fraction) 개념⁽²⁾을 확장하여 비등방기여도를 정의하였다. 이산영역에서 N 개의 단위요소를 갖는 비등방 회전체계에서, $\binom{i}{r}$ 번째 모드와 관련된 비등방기여도 $ACF(r, i)$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$ACF(r, i) = \frac{\hat{C}_r^i}{C_r^i + \hat{C}_r^i} \quad (27)$$

여기서 C_r^i 및 \hat{C}_r^i 은 $\binom{i}{r}$ 번째 모드 및 공액 복소 모드에 속한 신호 에너지를 각각 나타낸다. 같은 방법으로 전체 계의 비등방기여도 ACF를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$ACF = \frac{\sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \hat{C}_r^i}{\sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N (C_r^i + \hat{C}_r^i)} \quad (28)$$

여기서 $\sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \hat{C}_r^i$ 및 $\sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N (C_r^i + \hat{C}_r^i)$ 는 전체 공액 복소 모드에 속한 신호 에너지 및 전체 신호 분산을 각각 나타낸다. 이들의 계산방법 및 유도과정은 부록 B에 나타내었다.

이상적인 등방 회전체계에서는, 역방향 주파수응

답 함수 자체와 정방향 주파수응답 함수의 전·후방 모드의 공액 복소 모드는 존재하지 않으므로, 비등방기여도는 0의 값을 가진다. 또한, 미리 지정한 특정 한계치(prespecified threshold value) α 보다 작은 비등방기여도를 갖는 약한 비등방(weakly anisotropic) 회전체계는 등방 회전체계로 분류해도 무리가 없을 것이다.

규명하고자 하는 회전체계의 비등방성에 대한 사전 정보가 있을 때에는 적절한 dARMAX 모델을 곧바로 적용해도 되지만, 그러하지 못한 경우는 아래 절차를 따르는 것이 효과적이다.

단계 1: 역방향 주파수응답 함수 추정치가 정방향 주파수응답 함수에 비해 무시할 수 있을 정도로 작으면: $(|H_{fp}(\omega)|/|H_{sp}(\omega)| < \epsilon (\epsilon=0.1 \text{ 추천}))$, 단계 2, 그렇지 않으면 단계 3으로 간다.

단계 2: 앞 절에서 설명한 추정절차와 같이 등방 dARMAX($2k, 2k-1, r$) 모델로 적정 차수에 도달할 때까지 k 와 r 를 증가시키며 계수 추정 후 종료한다. 이때 적정 차수는 판별식 AIC 또는 SBC를 이용해 결정한다.

단계 3: 비등방 dARMAX($4k, 4k-1, r$) 모델로 적정 차수에 도달할 때까지 k 와 r 를 증가시키며 계수 추정한다. 적정 차수는 판별식 AIC 또는 SBC를 이용해 결정한다.

단계 4: 비등방기여도 ACF를 계산하여 그 값이 특정 한계치 α ($\alpha=0.05$ 가 경험상 적절함)를 초과하면 종료하고, 그렇지 않으면 등방 회전체계로 근사화 할 수 있는 약한 비등방 회전체계로 간주하고 단계 2로 간다.

이상의 절차는 Fig. 4와 같이 요약할 수 있다.

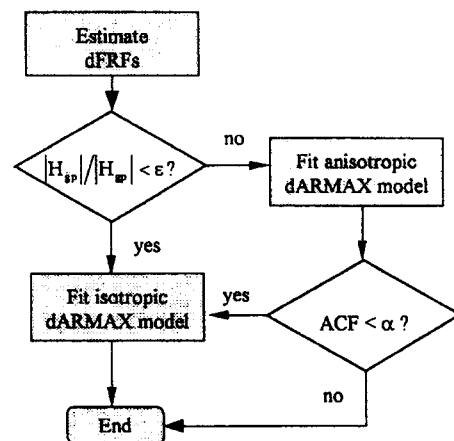


Fig. 4 Flow chart of fitting procedure

5. 요약 및 결론

본 논문에서는 효과적인 회전체 동특성 규명을 위해 복소 모드 시험이론을 시간영역에서 구현하고 복소신호 처리를 근간으로 하는 새로운 방향 시계열 (dARMAX) 모델을 이용하는 방법을 제안하였다. 먼저 회전체의 동특성을 고려하기 위해 방향 주파수 응답함수로 부터 등방 및 비등방 dARMAX 모델을 유도하였고, 기존 ARMAX 모델과의 상호 관계를 정립하였다. 기존 시계열 모델의 이산계수 추정법과 차수 결정법을 복소 신호를 다루기 위하여 확장하였고, 효과적인 계수 추정을 위하여 새롭게 정의된 비등방기여도를 이용한 체계적인 모델 피팅 절차를 제시하였다. 본 논문에서는 dARMAX 모델의 정립 및 해석 등의 이론적 내용을 기술하였고, 이어지는 후속 논문⁽⁶⁾에서는 수치 모의실험과 실험실에서 제작된 회전체 실험 등을 통하여, 제안된 방법의 타당성, 실제 회전체의 적용성과 유용성을 검증하고, 기존의 ARMAX 모델에 의한 방법 및 주파수 영역의 방법과의 비교를 통해 개발된 방법이 회전체의 모드 매개변수 규명에 보다 효과적임을 보인다.

참고 문헌

- (1) Fassois, S. D., Eman, K. F., and Wu, S. M., 1990, "A Linear Time-Domain Method for Structural Dynamics Identification," *Trans. ASME J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 112, pp. 98~106.
- (2) Ben Mrad, R., and Fassois, S. D., 1991, "Recursive Identification of Vibrating Structures from Noise-Corrupted Observations, Part 1: Identification Approaches," *Trans. ASME J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 113, pp. 354~361.
- (3) Lee, C. W., 1993, *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers.
- (4) Lee, C. W., 1991, "A Complex Modal Testing Theory for Rotating Machinery," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5(2), pp. 119~137.
- (5) Park, J. P., 1995, "Complex Time Series Analysis for Rotor Dynamics Identification and Fault Diagnosis," Ph.D. Thesis, KAIST, Korea.
- (6) Park, J. P., and Lee, C. W., 1998, "Directional ARMAX Model-Based Approach for Rotor-dynamics Identification, Part 2: Performance Evaluations and Applications," Submitted to KSNVE for Possible Publication.
- (7) Lee, C. W., and Joh, Y. D., 1993, "Theory of Excitation Methods and Estimation of Frequency Response Functions in Complex Modal Testing of Rotating Machinery," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 7, pp. 57~74.
- (8) Lee, C. W., and Joh, C. Y., 1996, "Use of dFRFs for Diagnosis of Asymmetric/Anisotropic Properties in Rotor-Bearing System," *Trans. ASME J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp. 64~69.
- (9) Haykin, S. S., 1972, "A Unified Treatment of Recursive Digital Filtering," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-17, pp. 113~116.
- (10) Åström, K. J., 1980, "Maximum Likelihood and Prediction Error Methods," *Automatica*, Vol. 16, pp. 551~574.
- (11) Lee, J. E., and Fassois, S. D., "Suboptimum Maximum Likelihood Estimation of Structural Parameters from Multiple-Excitation Vibration Data," *Trans. ASME J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, pp. 260~271.
- (12) Spliid, H., 1983, "A Fast Estimation Method of the Vector Autoregressive Moving Average Model with Exogenous Variables," *J. of American Statistical Association*, Vol. 78 (384), pp. 843~849.
- (13) Park, B. H., and Kim, K. J., 1989, "Vector ARMAX Modeling Approach in Multi-Input Modal Analysis," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 3(4), pp. 347~387.
- (14) Gersch, W., Brotherton, T., and Braun, S., 1980, "Parametric Time Domain Analysis of the Multiple Input/Scalar Output Problem: the Source Identification Problem," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 69(3), pp. 441~460.
- (15) Davies, P., and Hammond, J. K., 1984, "A Comparison of Fourier and Parametric Methods for Structural System Identification," *Trans.*

ASME J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 106, pp. 40~48.

- (16) Braun, B., and Ram, Y., 1987, "Time and Frequency Identification Methods in Over-Determined Systems," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 1(3), pp. 245~257.
- (17) Akaike, H., 1974, "A New Look at the Statistical Model Identification," IEEE Trans. Automatic Control, AC-19, pp. 716~723.
- (18) Wei, W. W. I., 1990, Time Series Analysis, Addison-Wesley.
- (19) Kay, S. M., 1988, Modern Spectral Estimation : Theory and Application, Prentice-Hall.
- (20) Lee, C. W., Park, J. P., and Kim, K. J., 1997, "Complex Time Series Modeling and Analysis for Rotor Dynamics Identification," Trans. ASME J. of Vibration and Acoustics, Vol. 119, pp. 512~522.
- (21) Granger, C. W. J., and Morris, M. J., 1976, "Time Series Modeling and Interpretation," J. of Royal Statistics Society, Series A, Vol. 139, pp. 246~257.

부록 A dARMAX 및 ARMAX 모델의 상호 관계

두 개의 복소 입력/ 단일 복소 출력을 갖는 회전체계에 상응하는 두 개의 실수 입.출력을 갖는 계의 전달함수를, 충격불변원리를 이용하여 이산영역으로 변환하면 다음과 같은 ARMAX 모델을 얻을 수 있다⁽⁵⁾.

$$y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \{ \beta_i^{yy} f_{y(t-i)} + \beta_i^{yz} f_{z(t-i)} \} + \sum_{i=0}^r \theta_i^{yy} e_{y(t-i)} \quad (A1a)$$

$$z_t = \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^q \{ \beta_i^{zy} f_{y(t-i)} + \beta_i^{zz} f_{z(t-i)} \} + \sum_{i=0}^r \theta_i^{zz} e_{z(t-i)} \quad (A1b)$$

또는

$$y_t = \frac{B^{yy}(d)}{\Phi(d)} f_{y_t} + \frac{B^{zy}(d)}{\Phi(d)} f_{z_t} + \frac{\Theta^{yy}(d)}{\Phi(d)} e_{y_t} \quad (A1c)$$

$$z_t = \frac{B^{zy}(d)}{\Phi(d)} f_{y_t} + \frac{B^{zz}(d)}{\Phi(d)} f_{z_t} + \frac{\Theta^{zz}(d)}{\Phi(d)} e_{z_t} \quad (A1d)$$

여기서 y_t 와 z_t (f_{y_t} 와 f_{z_t}) 는 각각 $y(t)$ 와 $z(t)$ ($f_y(t)$ 와 $f_z(t)$) 의 샘플링 치이며, e_{y_t} (e_{z_t}) 는

분산이 σ_e^2 ($\sigma_{e_z}^2$), 평균이 0 인 $y(z)$ 방향의 백색 잡음 $e_y(t)$ ($e_z(t)$) 의 샘플링 치이다. X(exogenous) 및 MA(moving average) 항은 지연자 d 의 다항식으로 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$B^y(d) = \beta_1^y d + \dots + \beta_q^y d^q$$

$$\Theta^y(d) = 1 + \theta_1^y d + \dots + \theta_r^y d^r \quad i, j = y, z$$

여기서 다항식 $\Theta^y(d)$ 는 반전조건을 만족하는 최소위상 (minimum phase) 특성을 갖는다고 가정한다. 한 쌍의 시계열 모델 (A1) 을 다음식으로 표현할 수 있다.

$$p_t = \sum_{i=1}^p \phi_i p_{t-i} + \sum_{i=1}^q \{ \beta_i^f g_{t-i} + \beta_i^b \bar{g}_{t-i} \} + \sum_{i=0}^r \{ \theta_i^f e_{t-i} + \theta_i^b \bar{e}_{t-i} \} \quad (A2)$$

여기서

$$p_t = y_t + jz_t, p_{t-i} = y_{t-i} + jz_{t-i}$$

$$g_t = f_{y_t} + jf_{z_t}, e_t = e_{y_t} + je_{z_t}$$

$$\beta_i^f = \frac{1}{2} \{ (\beta_i^{yy} + \beta_i^{zz}) - j(\beta_i^{zy} - \beta_i^{yz}) \}$$

$$\beta_i^b = \frac{1}{2} \{ (\beta_i^{yy} - \beta_i^{zz}) + j(\beta_i^{zy} + \beta_i^{yz}) \}$$

$$\theta_i^f = \frac{1}{2} \{ \theta_i^{yy} + \theta_i^{zz} \}$$

$$\theta_i^b = \frac{1}{2} \{ \theta_i^{yy} - \theta_i^{zz} \}$$

식 (A2) 의 우측 세 번째 항은 두 개의 독립 MA 프로세스의 합이다. 즉,

$$m_t = m_{1t} + m_{2t} \quad (A3a)$$

여기서

$$m_{1t} = e_t + \theta_1^f e_{t-1} + \dots + \theta_r^f e_{t-r}$$

$$m_{2t} = \bar{e}_t + \theta_1^b \bar{e}_{t-1} + \dots + \theta_r^b \bar{e}_{t-r}$$

복수개의 독립 MA 프로세스의 합은 단일 MA 프로세스로 표현 가능하므로^(5,21), 식 (A3a) 는 e_t 및 \bar{e}_t 와는 다른 평균이 0인 백색잡음 ε_t 로 아래와 같이 간략화 할 수 있다.

$$m_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_r \varepsilon_{t-r} \quad (A3b)$$

여기서 새롭게 도입된 계수 θ_i 는 편의상 복소수로 정의한다. 식 (A3a) 와 (A3b) 를 식 (A2) 에 대입하면 식 (14) 를 얻을 수 있다.

부록 B 비등방기여도

N 개의 단위요소를 갖는 비등방 회전체에서 (Fig. 1, Fig. 2), 이산영역의 복소 출력 시퀀스 (sequence) p_l 의 z -변환 $P(z)$ 와 복소 입력 프로세스 g_l 및 \hat{g}_l 의 z -변환 $G(z)$ 및 $\hat{G}(z)$ 는 아래 식으로 표현할 수 있다⁽⁵⁾.

$$P(z) = H_{gp}(z)G(z) + H_{\hat{g}p}(z)\hat{G}(z) \quad (B-1)$$

여기서 이산영역의 정방향 및 역방향 충격응답함수 $h_{gp}(k)$ 및 $h_{\hat{g}p}(k)$ 의 z -변환인 정방향 및 역방향 시스템함수 $H_{gp}(z)$ 및 $H_{\hat{g}p}(z)$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$H_{gp}(z) = \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left[\frac{\gamma_{gp}}{1-\mu z^{-1}} + \frac{\hat{\gamma}_{gp}}{1-\hat{\mu} z^{-1}} \right]_r$$

$$H_{\hat{g}p}(z) = \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left[\frac{\gamma_{\hat{g}p}}{1-\mu z^{-1}} + \frac{\hat{\gamma}_{\hat{g}p}}{1-\hat{\mu} z^{-1}} \right]_r \quad (B-2)$$

여기서 $(\gamma_{kl}, \hat{\gamma}_{kl}(k, l=g, \hat{g}, p))$ 와 μ^{-1} 는 시스템 함수의 레지듀 (residues)와 극점 (poles)을 나타낸다. 두 입력의 상호상관(cross-correlation)함수의 z -변환 $S_{gg}(z)=0$ 인 경우 식(B-1)을 이용해 출력의 자기상관(autocorrelation)함수 $S_{pp}(z)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S_{pp}(z) = H_{gp}(z)\overline{H_{gp}(1/\bar{z})}S_{gg}(z) + H_{\hat{g}p}(z)\overline{H_{\hat{g}p}(1/\bar{z})}S_{\hat{g}\hat{g}}(z) \quad (B-3)$$

여기서 $S_{gg}(z)$ 와 $S_{\hat{g}\hat{g}}(z)$ 는 두 입력의 자기상관함수의 z -변환을 각각 나타낸다. 파스발 정리 (Parseval's theorem)에 의해 출력의 분산 σ_p^2 는 아래와 같이 표현된다.

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_C S_{pp}(z)z^{-1} dz \quad (B-4)$$

여기서, 아래 첨자 C 는 $S_{\hat{g}\hat{g}}(z)$ 의 수렴영역내의 반시계 방향의 폐경로 (closed contour)를 나타낸다. 복소 입력이 분산 σ_p^2 를 갖는 백색 잡음 프로세스라 가정하면, $\left(\frac{l}{k}\right)$ 번째 모드에 속한 에너지($C_k^l(l=B, F, k=1, 2, \dots, N)$)는 다음과 같이 표현된다.

$$C_k^l = \frac{\sigma_g^2}{2\pi j} \oint_C \left\{ H_{gp}(z) \left[\overline{H_{gp}(1/\bar{z})} \right]_k^l + H_{\hat{g}p}(z) \left[\overline{H_{\hat{g}p}(1/\bar{z})} \right]_k^l \right\} z^{-1} dz$$

$$= \sigma_g^2 \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{\bar{\gamma}_{gp_k}^l \gamma_{gp_r}^i}{1-\bar{\mu}_k^l \mu_r^i} + \frac{\bar{\gamma}_{gp_k}^l \hat{\gamma}_{gp_r}^i}{1-\bar{\mu}_k^l \hat{\mu}_r^i} + \frac{\bar{\gamma}_{\hat{g}p_k}^l \gamma_{\hat{g}p_r}^i}{1-\bar{\mu}_k^l \mu_r^i} + \frac{\bar{\gamma}_{\hat{g}p_k}^l \hat{\gamma}_{\hat{g}p_r}^i}{1-\bar{\mu}_k^l \hat{\mu}_r^i} \right\} \quad (B-5)$$

여기서

$$\left[\overline{H_{gp}(1/\bar{z})} \right]_k^l = \frac{\bar{\gamma}_{gp_k}^l}{1-\bar{\mu}_k^l z}, \left[\overline{H_{\hat{g}p}(1/\bar{z})} \right]_k^l = \frac{\bar{\gamma}_{\hat{g}p_k}^l}{1-\bar{\mu}_k^l z}$$

같은 방법으로 $\left(\frac{l}{k}\right)$ 번째 공역 복소 모드에 속한 에너지 \hat{C}_k^l 는 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$\hat{C}_k^l = \frac{\sigma_g^2}{2\pi j} \oint_C \left\{ H_{gp}(z) \left[\overline{H_{gp}(1/\bar{z})} \right]_k^l + H_{\hat{g}p}(z) \left[\overline{H_{\hat{g}p}(1/\bar{z})} \right]_k^l \right\} z^{-1} dz$$

$$= \sigma_g^2 \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{\bar{\gamma}_{gp_k}^l \gamma_{gp_r}^i}{1-\bar{\mu}_k^l \mu_r^i} + \frac{\bar{\gamma}_{gp_k}^l \hat{\gamma}_{gp_r}^i}{1-\bar{\mu}_k^l \hat{\mu}_r^i} + \frac{\bar{\gamma}_{\hat{g}p_k}^l \gamma_{\hat{g}p_r}^i}{1-\bar{\mu}_k^l \mu_r^i} + \frac{\bar{\gamma}_{\hat{g}p_k}^l \hat{\gamma}_{\hat{g}p_r}^i}{1-\bar{\mu}_k^l \hat{\mu}_r^i} \right\} \quad (B-6)$$

여기서

$$\left[\overline{H_{gp}(1/\bar{z})} \right]_k^l = \frac{\bar{\gamma}_{gp_k}^l}{1-\bar{\mu}_k^l z}, \left[\overline{H_{\hat{g}p}(1/\bar{z})} \right]_k^l = \frac{\bar{\gamma}_{\hat{g}p_k}^l}{1-\bar{\mu}_k^l z}$$

식 (B-5)와 (B-6)으로 계산된, C_k^l 와 \hat{C}_k^l 식 (B-4)의 출력 분산은 다음과 같은 관계가 있다.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=B,F} \sum_{r=1}^N (C_r^i + \hat{C}_r^i) \quad (B-7)$$