

본 연구는 1996년도 한국학술진흥재단의 대학부설연구소 연구비 지원에 의하여 연구되었습니다.

## LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법 및 자동차 능동 현가장치 제어에의 응용

최재원\*, 서영봉\*\*, 유완석\*

### Eigenstructure Assignment Methodology with LQR Characteristics and Application to an Automotive Active Suspension Control

Jae Weon Choi\*, Young Bong Seo\*\*, Wan Suk Yoo\*

#### ABSTRACT

In this paper, a new control system design algorithm, which has the advantages of the existing LQR and eigenstructure assignment methods, is proposed. The method of the transformation matrix via block controller is utilized to develop the scheme. Using the proposed algorithm, LQR weighting matrices  $Q$  and  $R$ , which satisfy the desired closed-loop eigenvalues and eigenvectors, can be achieved using only simple matrix computations. The usefulness of the proposed scheme is verified by applying to a numerical example and an automotive active suspension control system design.

**Key Words** : Eigenstructure Assignment(고유구조 지정), LQR(선형 2차 레귤레이터), Automotive Active Suspension (자동차 능동 현가장치)

#### 1. 서론

고유구조 지정문제는 고유구조 즉, 고유치 및 고유벡터의 동시 지정문제를 지칭하는 것으로서, 고전적인 제어 문제에서 다루어 왔던 감쇠, 정착시간 및 모드(mode) 또는 외란(disturbance)분리 특성을 현대 다변수 제어 구조(multivariable control structure)에 반영시킬 수 있는 효과적인 제어방법 중 하나로 잘 알려져 있다. 그러나, 이와 같은 고유구조 지정 기법은 폐루프 시스템의 고유구조를 적절히 지정함으로써 폐루프 시스템의 응답 특성을 임의로 바꿀 수 있는 장점은 제공하지만, 견실성

(robustness)은 제어기 설계 과정에 직접 반영할 수 없는 구조이기 때문에 지금까지 큰 단점으로 인식되어 왔다<sup>(1)</sup>.

LQR은 잘 알려진 바와 같이 시스템의 안정도-강인성을 보장하는 견실한 최적제어 설계 기법의 하나다. LQR 설계 방법을 사용하면 일반적으로 이득여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)가 각각 최소한  $(-6, \infty)$ db와  $(-60^\circ, 60^\circ)$ 가 보장된다<sup>(2)</sup>. 이 기법의 경우 설계자는 폐루프 시스템이 원하는 성능을 가질 때까지 LQR의 성능지수(performance index)에 포함되어 있는 상태변수 및 제어입력에 대한 가중행렬을 반복적으로 변화시키게 된다. 그러나, 요구되는 시스템의 성능 특성

\* 정회원, 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소  
\*\* 부산대학교 기계공학부

(또는 요구되는 페루프 시스템의 고유구조)이 항상 LQR의 획득 가능한 부분공간(achievable subspace)에 존재하는 것은 아니다. 이와 같이, LQR 기법은 전상태되먹임(full state feedback)을 사용하여 페루프 시스템의 건실성은 어느 정도 보장하지만, 페루프 시스템의 고유구조는 임의로 지정할 수 없다는 단점을 가지고 있다. 이러한 단점을 극복하기 위한 노력의 일환으로 Innocenti와 Stanziola<sup>(3)</sup>는 고유구조 지정법과 최적제어 설계 기법이 보장하는 획득 가능한 건실 특성에 대하여 비교하였다.

지금까지 LQR을 사용한 고유구조 지정법에 대한 많은 연구들이 진행되어 왔다<sup>(4-9)</sup>. Wilson과 Cloutier<sup>(4)</sup>는 바람직한 고유치와 고유벡터에 대해 고유구조의 몇몇 요소에 대해서는 이득을 허용하면서 가격함수를 최소화하는 기법을 제안하였으며 Broussard<sup>(5)</sup>는 되먹임 이득 행렬을 포함하는 가격함수를 최소화하는 알고리즘을 제안하였다. 그러나, 이 방법은 바람직한 페루프 고유구조와 관계가 있는 이득행렬이 먼저 계산되어야만 하여 임의의 고유구조 지정에는 어려움이 있었다. Harvey와 Stein<sup>(6)</sup>은 획득 가능한 고유벡터를 얻는 선형투사를 사용하는 방법을 제안하였는데, 이들의 방법은 원 조건(circle condition)은 보장하지만, 정확한 극점 배치를 얻지 못할 뿐만 아니라, 여기에는 많은 수의 설계 매개 변수가 선택되어야만 해서 설계과정이 복잡해졌다.

최근에 Hiroe<sup>(7)</sup>는 바람직한 페루프 응답을 제공하는 ZED(Zero addition Decoupling method)라 불리는 새로운 가중치 선택기법을 제안했다. 이 방법은 다변수 LQR의 점근적 모드 특성 즉, 제어 가중치가 영으로 가는 성질에 기초를 둔 것으로, 원하는 페루프 상태를 가지는 LQR 설계의 실제적인 기법인 역LQ(Inverse LQ) 방법<sup>(8)</sup>보다 더 실제적인 것이다. Ochi와 Kanai<sup>(9)</sup>는 원하는 페루프 위치를 주는 가중행렬을 선택하여 LQR에서 극점 배치를 하는 새로운 방법을 제시했다. 제시된 방법의 특징 중 하나는 가중행렬이 대각형태를 가지는 Hamiltonian 행렬의 특성 방정식에서 유도된 미분방정식을 풀어 얻어진다는 것이다. 다른 특징으로는 이 방법은 가중행렬의 양의 한정성(positive definiteness)이 지정된 페루프 고유치에 의존하여 언제나 보장되지 않음에도 불구하고 극점을 임의로 정확하게 바라는 위치로 옮길 수 있다는 것이다. 하지만 그들의 논문에서는 고유벡터 지정의 문제는 고려되지 않았다.

따라서, 다입출력(MIMO) 시스템에 대한 LQR의 안정도-강인성 특성을 보장하면서 동시에 원하는 고유구조를

지정할 수 있는 유용성을 가진 방법에 대한 연구가 필요하다. 고유구조를 이용한 제어기 설계 문제에서 좌 및 우 고유벡터들은 서로 수직인 관계(biorthogonality condition)를 가지므로 획득 가능한 우고유구조가 결정되면 획득 가능한 좌고유구조는 저절로 결정된다<sup>(1)</sup>. 이 방법을 통하여 시스템의 제어이득이 주어진 경우, 이러한 제어이득을 제공하는 최적제어기의 가중행렬은 제어행렬의 랭크(rank)가 시스템행렬의 랭크와 같은 경우에만 결정된다. 하지만 일반적으로는 제어행렬의 랭크 수는 시스템행렬의 그것보다 작으므로 정확한 가중 행렬을 구할 수 없다. 이럴 경우 의사역(pseudo-inverse)행렬을 구성하여<sup>(10)</sup> 가중행렬을 구하는 대신 입력행렬을 블록 제어기(block controller) 형태<sup>(11)</sup>로 변환시켜 가중행렬을 구하는 방법을 제안하여 이것을 LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법이라 칭하기로 한다. 이 방법은 고유구조지정에 의한 알고리즘으로 이득행렬을 구하고 블록행렬 형태로 페루프 고유치를 정확하게 지정하는 가중행렬을 구해내는 것이다. 따라서 이 방법을 사용하면 페루프 시스템의 고유치를 정확하게 지정하는 동시에 좌 및 우고유벡터들의 방향을 요구되는 방향으로 최소자승(least squares)의 관점에서 최대한 가깝게 위치시키고, 이를 만족시키는 LQR의 가중행렬을 구해낼 수 있다.

본 논문의 II장에서는 다루고자 하는 문제를 설정하고, III장에서는 LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법에 대해 자세히 기술한다. 그리고, 간단한 수치예제와 자동차 능동 현가장치시스템에 대해 본 논문에서 제시한 방법의 설계과정을 살펴보고, 그 타당성 및 유용성을 IV장에서 고찰해 본다. 마지막으로 V장에서 본 논문의 결론을 맺는다.

## II. 문제의 설정

다음과 같이 주어지는 시불변 다변수 가제어 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + Bu, A \in R^{N \times N}, B \in R^{N \times m}, (N \geq m) \quad (2.1)$$

$$u = -Kx \quad (2.2)$$

여기서,  $x, u$ 는 각각  $N, m$ 차원의 상태변수, 제어입력이며,  $A, B$ 는 각각 시스템행렬 및 입력행렬이며,  $K$ 는 되먹임 이득행렬을 나타낸다. 이러한 시스템에 대하여 최적제어기는 다음과 같은 목적함수를 최소로 하는 제어기를 설계하는 것으로 정의된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.3)$$

식(2.3)과 같이 주어진 목적함수를 최소화하는 되먹임 이득행렬  $K$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.4)$$

이 때, 행렬  $P$ 는 다음과 같은 대수 리카티(Riccati) 방정식을 풀어 구하게 된다.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.5)$$

역으로 페루프 고유구조 정보가 주어졌을 때, 이 정보로부터 이득행렬을 구해낼 수 있다. 이러한 제어이득을 제공하는 최적제어기의 가중행렬을 구해보고자 한다.  $A_c$ 를 페루프 시스템의 시스템행렬이라고 하면 다음 식이 성립한다.

$$A_c = A - BR^{-1}B^T P \quad (2.6)$$

$$BR^{-1}B^T P = A - A_c \quad (2.7)$$

위 식으로부터  $BR^{-1}B^T$ 의 랭크가  $N$ 인 경우, 즉 제어행렬  $B$ 의 랭크가  $N$ 인 경우 리카티 방정식의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$P = (BR^{-1}B^T)^{-1}(A - A_c) \quad (2.8)$$

$P$ 는 리카티 방정식의 유일한 해(unique solution)이므로 리카티 방정식으로부터 가중행렬  $Q$ 를 구할 수 있다. 그러나, 일반적인 경우  $B$ 의 랭크는  $N$ 보다 작기 때문에 ( $BR^{-1}B^T$ )의 역행렬을 구할 수 없으므로  $P$ 를 구할 수 없다. 따라서, 가중행렬  $Q$ 는 이득행렬  $K$ 에 의해 결정됨을 알 수 있다<sup>(10)</sup>. 즉, 제어 입력행렬  $B$ 가 일반적으로 정방행렬이 아니기 때문에 이득행렬  $K$ 를 계산할 때  $B$ 의 의사역행렬이 포함되기 때문에 결국  $K$ 는 최소 자승의 관점에서 계산되게 된다. 이와 같이 구한  $K$ 를 이용하여 페루프 시스템을 구성하고 그 고유치들을 구해보면 원하던 값들과는 전혀 다른 값들을 얻게 되는데 이는 결국 구성된 페루프 시스템의 안정성을 보장할 수 없다는 얘기가 된다. 이럴 경우 의사역행렬을 구성하여 가중행렬을 구하는 대신 입력행렬을 블록 제어기 형태로 변환시키면 이러한 단점을 피할 수 있는 유용한 결과를 얻을 수 있다.

우선 입력행렬  $B$ 를 다음과 같은 형태로 변환하는 변환행렬  $T$ 가 필요하다.

$$\bar{B} \rightarrow \begin{bmatrix} I_m \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

여기서  $I_m$ 은  $(m \times m)$  차원의 단위(identity)행렬이고,  $0$ 은  $(N-m) \times m$ 차원의 영(zero)행렬이다. 다음과 같은 과정을 통해 이와 같은 변환행렬  $T$ 를 얻을 수 있다.

$$T = [B \mid \bar{T}] \quad (2.10)$$

여기서  $\bar{T}$ 는 rank  $T = N$ 을 만족하는 임의의 행렬이다.  $T$ 를 사용하여, 다음과 같이 좌표계를 바꿀 수 있다.

$$x = T\bar{x} \quad (2.11)$$

그러면, 개루프 시스템은 다음과 같이 변환된다.

$$\bar{A} = T^{-1}AT \quad (2.12)$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} I_m \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

이 변환을 사용하더라도 원래 시스템의 고유치는 변환된 시스템의 고유치와 같다<sup>(11)</sup>. 변환된 시스템에 대해 제어법칙을 적용하여 이득행렬과 가중행렬을 구해낸 후에 그것을 원래 시스템에 적용하기 위해서는 다시 역변환시키는 과정이 필요하다. 원래 시스템을 식(2.10)의 변환행렬을 통하여 변환하지 않고서는 LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법을 통하여 제어기를 설계할 수 없으며, 기존의 고유구조 지정기법과 LQR제어 기법을 적용한 경우에 같은 조건일지라도 이득행렬의 크기는 달라지게 된다.

### III. LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법

본 장에서는 블록 제어기 형태로 변경된 시스템에 대해 상태되먹임에 의한 고유구조 지정기법으로 원하는 페루프 고유치를 정확하게 지정하고 좌 및 우고유벡터의 방향을 원하는 방향에 최소자승의 관점에서 최적으로 가깝게 배치시키는 이득행렬을 구한 후, 블록 제어기의 장점을 이용해서 가중행렬  $Q$ 를 구하여 원래 시스템에 적용하는 과정을 자세히 기술한다.

1. 고유구조 지정기법

II 장의 시스템 식(2.12)에 상태되먹임에 의한 제어입력 식(2.2)가 인가되면 전체적인 폐루프 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{x} = (\bar{A} - \bar{B}K)x \tag{3.1}$$

상이한 공액복소 고유치로 이루어진 집합  $\Lambda$ 를  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ 이라 하자. 그러면, 위의 폐루프 시스템에 대한 우 및 좌고유치 문제는 다음과 같이 정의된다<sup>(13)</sup>.

$$(\bar{A} - \bar{B}K - \lambda_i I_N)\phi_i = 0 \tag{3.2a}$$

$$(\bar{A} - \bar{B}K - \lambda_i I_N)^T \varphi_i = 0 \tag{3.2b}$$

여기서,  $I_N$ 은  $(N \times N)$ 차원의 단위행렬이다. 시스템이 중복 고유치를 갖는 경우에 대해서도 위의 고유치 문제는 쉽게 일반화될 수 있다<sup>(14)</sup>.

위의 고유치 문제들로부터 고유구조 지정 문제는 결국 요구되는 우고유구조  $(\Lambda, \Phi)$ 를 만족시킬 수 있게 하는 되먹임 이득행렬  $K$ 를 구하는 문제가 된다. 고유구조 지정 문제를 구체적으로 기술하기 위하여 우 및 좌모드 행렬을 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \phi_N] \tag{3.3a}$$

$$\Psi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N] \tag{3.3b}$$

문제의 기술을 위하여 다음과 같이 정의되는 행렬들을 먼저 정의한다.

$$S_{\lambda_i} \equiv [\lambda_i I_N - \bar{A} \mid \bar{B}] \tag{3.4}$$

$$R_{\lambda_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ - \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

여기서,  $N_{\lambda_i} \in R^{N \times N}$ ,  $M_{\lambda_i} \in R^{m \times N}$ 이며, 행렬  $R_{\lambda_i}$ 의 열(columns)들은 행렬  $S_{\lambda_i}$ 의 영공간의 기저를 이룬다. 그리고  $\text{rank } \bar{B} = m$ 이면 행렬  $R_{\lambda_i}$ 의 부분행렬  $N_{\lambda_i}$ 의 열들은 서로 일차독립이 된다<sup>(11)</sup>.

다음 정리는 요구되는 우고유구조를 생성시킬 수 있는 이득행렬  $K$ 의 존재를 위한 필요충분조건을 제공한다.

**정리 3.1<sup>(11)</sup>** : 집합  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ 의 원소들은 상이

한 공액복소수로 이루어져 있다고 하자. 그러면 폐루프 시스템에 대한 고유치 문제  $(A - BK)\phi_i = \lambda_i \phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ 를 만족하는 실수로 이루어진  $m \times N$ 차원의 이득행렬  $K$ 가 만족하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

1)  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\} \in C^N$ 인 일차독립인 집합이다.

2) 임의의 두 고유치가  $\lambda_i = \lambda_j^*$ 와 같이 공액복소수 관계를 가지면, 이에 대응하는 고유벡터들도  $\phi_i = \phi_j^*$ 와 같은 공액복소벡터 관계를 가져야 한다. 여기서, 위첨자  $(\cdot)^*$ 는  $(\cdot)$ 의 공액복소수 또는 공액복소벡터를 의미한다.

3)  $\phi_i = \text{span}\{N_i\}$ .

또한,  $K$ 가 존재하고  $\text{rank } \bar{B} = m$ 이면 이 때  $K$ 는 유일하게 결정되고, 위에서 정의한 부분행렬  $N_{\lambda_i}$ 과  $M_{\lambda_i}$ 를 이용하여 구할 수 있다.

위의 정리를 살펴보면 상태되먹임에 의해 폐루프 시스템의 우고유구조를 지정하고자 할 때, 요구되는 우고유벡터들은 행렬  $[\lambda_i I_N - \bar{A} \mid \bar{B}]$ 의 영공간으로부터 구성되는 열공간(column space)의 일부인 부분행렬  $N_{\lambda_i}$ 로부터 생성되는 열공간에 속해야만 한다는 제약을 가지고 있음을 알 수 있다. 이러한 제약으로 인하여 획득 가능한 우고유벡터들은  $m$ 과  $N$ 의 관계에 따라 최소한 최소사승의 관점에서 최적인 값들을 가지게 된다.

정리 3.1에 따르면 획득 가능한 우고유벡터  $\phi_i^a$ 는 부분행렬  $\{N_{\lambda_i}\}$ 의 열공간에 속해야 하며, 이러한  $\phi_i^a$ 들로 우모드행렬  $N_{\lambda_i}$ 를 구성하면 다음과 같다.

$$\Phi^a = [\phi_1^a, \phi_2^a, \dots, \phi_i^a, \dots, \phi_N^a] \tag{3.6}$$

그리고,  $\phi_i^a$ 는  $N_{\lambda_i}$ 의 열들의 일차결합으로 주어지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_i^a = N_{\lambda_i} \bar{p}_i \tag{3.7}$$

이 때 식(3.7)에서  $(m \times 1)$ 차원의 계수벡터  $\bar{p}_i$ 를 다음과 같이 정의되는 성능지표 함수를 최소화하도록 선택하게 되면 요구되는 우고유구조를 최적으로 성취하게 된다.

$$J = \|(\Phi^d)^{-1} \Phi_{aug}^a \bar{P} - I_N\| \tag{3.8}$$

식(3.8)과 같이 주어지는 성능지표 함수의 최소화 문제는 요구되는 우모드행렬  $\Phi^d = \Phi_{aug}^a \bar{P}$ 를 만족하게 하는

계수행렬  $\bar{p}$ 를 해석적으로 구하는 문제가 된다. 식(3.8)에서  $(mN \times N)$ 차원의 계수행렬  $\bar{p}$ 와  $(N \times mN)$ 차원의 획득 가능한 우모드행렬  $\Phi^a$ 는 다음과 같이 구성된다<sup>(1)</sup>.

$$\bar{P} = \text{block diag}[\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_i, \dots, \bar{p}_N] \quad (3.9)$$

$$\Phi_{aug}^a = [N_{\lambda 1}, N_{\lambda 2}, \dots, N_{\lambda i}, \dots, N_{\lambda N}] \quad (3.10)$$

식(3.8)에서  $\Phi^d$ (또는  $\Psi^d$ ) 및  $\Phi_{aug}^a$ (또는  $\Psi_{aug}^a$ )는 사전에 알 수 있는 값들이 되므로 이 값들을 이용하여  $\Phi^d$ (또는  $\Psi^d$ )를 가장 최적으로 만족시키는 계수행렬  $\bar{p}$ 를 구할 수 있게 된다. 먼저, 식(3.9)에서  $\bar{p}$ 의 임의의 한 원소인 계수벡터  $\bar{p}_i$ 는 성능지표 함수  $J$ 를 최소화하도록 다음과 같이 결정된다.

$$\bar{p}_i = (\Omega_i)^+ n_k \quad (3.11)$$

여기서, 위첨자  $(\cdot)^+$ 는  $(\cdot)$ 의 의사역행렬을 의미하며,  $(N \times m)$ 차원의 행렬  $\Omega_i$ 는 다음과 같이 주어지는  $(N \times mN)$ 차원의 행렬  $\{(\Phi^d)^{-1} \Phi_{aug}^a\}$ 의 부분행렬이 된다.

$$[\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N] = \{(\Phi^d)^{-1} \Phi_{aug}^a\} \quad (3.12)$$

그리고, 벡터  $n_k$ 는 행렬  $\{(\Phi^d)^{-1} \Phi_{aug}^a\}$ 의  $k$ 번째 부분행렬에 대응하는  $(N \times N)$ 차원의 단위행렬의  $k$ 번째 열에 해당한다. 따라서 행렬  $\bar{p}$ 와  $\Phi_{aug}^a$ 를 이용하면 요구되는 우모드행렬  $\Phi^a$ 는 다음 식과 같이 구해진다.

$$\Phi^a = \Phi_{aug}^a \bar{P} \quad (3.13)$$

획득 가능한 좌모드행렬  $\Psi^a$ 는 좌 및 우모드행렬들 사이의 상호 수직조건을 이용하여 위에서 구한 우모드행렬  $\Phi^a$ 로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\Psi^a = (\Phi^a)^{-T} \quad (3.14)$$

그리고, 이러한  $\Phi^a$ 를 성취하기 위한 상태도역임 이득행렬  $K$ 는 행렬  $S_{\lambda}$ 의 영공간과 위에서 구한 획득 가능한 우모드행렬  $\Phi^a$ 를 이용하면 구할 수 있다.

$$w_i = M_{\lambda i} \bar{p}_i \quad (3.15)$$

$$W = [w_1 \dots w_i, \dots, w_N] \quad (3.16)$$

$$K\Phi^a = W \quad (3.17)$$

여기서 행렬  $\Phi^a$ 는 비특이(nonsingular)이므로 이득행렬  $K$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$K = W(\Phi^a)^{-1} \quad (3.18)$$

## 2. LQR 가중행렬

지금까지 블록 제어기 형태로 변환된 시스템에서 고유구조 지정법으로 이득행렬을 구하였다. 이제는 블록으로 나누어진 이득행렬로부터 가중행렬을 구한다. 행렬 리카티 방정식의 해인 행렬  $P$ 와 이득행렬  $K$ 의 형태를 다음과 같이 가정하자.

$$K = W(\Phi^a)^{-1} \quad (3.18)$$

$$K = [K_1 \mid K_2] \quad (3.19)$$

$m \times m \quad m \times (N - m)$

$$P \equiv \begin{matrix} m \times m & (N - m) \times m \\ \left[ \begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline \dots & \dots \\ P_{21} & P_{22} \end{array} \right] & \\ m \times (N - m) & (N - m) \times (N - m) \end{matrix} \quad (3.20)$$

$P_{12} = P_{21}^T, \quad P_{22} = P_{22}^T$

여기서  $P_{11}$ 과  $K_1$ 는 모두  $(m \times m)$ 행렬이다.  $P_{22}$ 는  $K$ 에 영향을 주지 않는 부분이다. 행렬  $P$ 가 대칭이 되려면  $P_{11}$ 이 최소한 대칭이어야 하며,  $P_{11}$ 이 대칭이 되게 양의 한정인 대칭행렬(positive definite symmetric matrix)  $R$ 을 선택하여야 한다. 식(3.19)와 식(3.20)의 특수한 구조를 2장의 식(2.4)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} K &= [K_1 \mid K_2] \\ &= R^{-1} \bar{B}^T P \\ &= R^{-1} [I_m \mid 0] \begin{bmatrix} P_{11} & | & P_{12} \\ \hline P_{21} & | & P_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} &= [R^{-1} \mid 0] \begin{bmatrix} P_{11} & | & P_{12} \\ \hline P_{21} & | & P_{22} \end{bmatrix} \\ &= [R^{-1} P_{11} \mid R^{-1} P_{12}] \\ P_{11} &= RK_1, \quad P_{12} = RK_2 \end{aligned} \quad (3.21b)$$

그리고,  $P_{11}$ 이 대칭이 되게 만드는  $R$ 을 구한다. 계산상의 편의를 위해  $m=2$ 라고 가정하면  $P_{11}$ ,  $K_1$ ,  $R$ 은 각각 다음과 같이 나누어진다.

$$P_{11} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix}$$

식(3.21b)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$p_{11} = R_{11}k_1 + R_{12}k_2, \quad p_{12} = R_{11}k_3 + R_{12}k_4$$

$$p_{21} = R_{21}k_1 + R_{22}k_2, \quad p_{22} = R_{21}k_3 + R_{22}k_4$$

여기서,  $P_{11}$ 이 대칭이 될 조건은  $p_{12}=p_{21}$ 이고,  $R$ 은 양의 한정인 대칭행렬로서  $R_{12} = R_{21}$ 이므로

$$R_{12} = \frac{k_3}{k_1 - k_4} R_{11} - \frac{k_2}{k_1 - k_4} R_{22}$$

이고,  $R_{11}$ 과  $R_{22}$ 의 크기를 각각 1이라고 두면 최종적으로  $R$ 은 다음과 같이 정리된다.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k_3 - k_2}{k_1 - k_4} \\ \frac{k_3 - k_2}{k_1 - k_4} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$P_{22}$ 는  $K$ 의 결정에 영향을 주지 않는 부분이므로  $I_m$ 으로 설정하면 리카티 방정식의 유일한 해  $P$ 는 식(3.22)의  $R$ 을 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$$P = \begin{bmatrix} RK_1 & | & RK_2 \\ \hline (PK_2)^T & | & I_m \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

이렇게 구한 행렬  $P$ 는 양의 한정행렬임을 보장하지는 않는다. 따라서 이와 같이 구한  $P$ 를 리카티 방정식에 대입하여  $Q$ 를 구하게 되면  $Q$ 도 역시 양의 한정행렬임을 보장할 수 없게 된다. 역으로  $Q$ 가 양의 한정행렬이면, 리카티 방정식으로부터 구해지는  $P$ 는 양의 한정성이 보장된다<sup>(10)</sup>. 하지만  $P$ 의 양의 한정성 조건은  $P$ 가 존재할 충분조건<sup>(15)</sup>이므로 반드시 양의 한정행렬이 아니어도 해가 존재할 수 있다. 비한정(indefinite)행렬로  $Q$ 가 주어질 경우 시스템의 제어 특성이 어떻게 바뀌는지에 대한 연구는 4

절에서 논의될 것이다.

행렬  $\bar{A}$ 는 다음과 같이 나누어진다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

그리고, 다음의 리카티 방정식에 대입하여 정리하면 가중행렬을 얻을 수 있다.

$$Q = -\bar{A}^T P - P\bar{A} + \bar{P}\bar{B}R^{-1}\bar{B}^T P \quad (3.24a)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{11}^T \\ A_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}R^{-1}P_{11} & P_{11}R^{-1}P_{12} \\ P_{21}R^{-1}P_{11} & P_{21}R^{-1}P_{12} \end{bmatrix} \quad (3.24b)$$

$$Q_{11} = -A_{11}^T P_{11} - A_{12}^T P_{21} - P_{11} A_{11} - P_{12} A_{21} + P_{11} R^{-1} P_{11}$$

$$Q_{12} = -A_{11}^T P_{12} - A_{12}^T P_{22} - P_{11} A_{12} - P_{12} A_{22} + P_{11} R^{-1} P_{12}$$

$$Q_{21} = -A_{12}^T P_{11} - A_{22}^T P_{21} - P_{21} A_{11} - P_{22} A_{21} + P_{21} R^{-1} P_{11}$$

$$Q_{22} = -A_{12}^T P_{12} - A_{22}^T P_{22} - P_{21} A_{12} - P_{22} A_{22} + P_{21} R^{-1} P_{12} \quad (3.24c)$$

이제 위의 결과가 페루프 고유치를 정확하게 지정하는 가중행렬인지 다음의 정리로 확인한다.

**정리 3.2 :** 다음의 경우를 만족하면 가중행렬  $Q$ 는 고유치 지정문제에서의 이득행렬  $K$ 와 LQR 제어문제에서의 이득행렬  $K$ 를 동시에 만족한다.

1) LQR Hamiltonian 시스템은 다음의 행렬로 구성된다.

$$H = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B}R^{-1}\bar{B}^T \\ -Q & -\bar{A} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

2) Hamiltonian 행렬의 안정한 고유치가 원하는 페루프 고유치와 같다. 즉,  $\mu_i$ 가 고유벡터  $[X_i^T \ \Lambda_i^T]^T$ 에서  $X_i \in R^N$ 에 대응되는 Hamiltonian  $H$ 의 안정한 고유치라면,  $\mu_i$ 는 또한 고유 벡터  $X_i$ 에 대응되는 페루프 시스템  $(\bar{A} - \bar{B}K)$ 의 고유치이다<sup>(15)</sup>.

정리 3.2에서  $M_i$ 를 안정한 고유치로 이루어진 대각행렬이라고 하면, LQR 제어문제에서의 이득행렬  $K$ 와 고유치 지정문제에서의 이득행렬  $K$ 는 다음과 같이 된다.

$$K = W(\Phi^0)^{-1} = R^{-1}\bar{B}^T \Lambda_i M_i X_i^{-1} \quad (3.26)$$

그리고, 정리 3.2를 만족하는  $Q$ 는 최소한 하나는 존재

한다. 위의 정리 3.2를 만족하지 않는다면 변환행렬  $T$ 를 다시 설정하여야 한다. 이것은 변환행렬  $T$ 가 유일하지 않기 때문에 생기는 문제이다. 가중행렬  $Q$ 가 위의 정리를 만족한다면, 원래 시스템에 대한 이득행렬과 가중행렬을 구하기 위해서 변환행렬을 사용하여 다음과 같이 역변환한다.

$$K_o = KT^{-1} \quad (3.27)$$

$$Q_o = T^{-T}QT^{-1} \quad (3.28)$$

여기서, 아래 첨자 'o'는 원래 시스템을 표시하는 것이다.

### 3. 설계 알고리즘

LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법의 설계 알고리즘을 간단히 요약하면 다음과 같다.

**단계 1:** 제어대상 시스템을 변환행렬  $T$ 를 이용하여 다음과 같은 블록 제어기 형태로 변환한다.

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

**단계 2:** 제어대상 시스템에 대하여 원하는 고유치  $\lambda_i$ 와 우고유벡터  $\phi_i^d$ 를 결정한다.

**단계 3:** 다음 행렬들을 계산한다.

$$S_{\lambda_i} \equiv [\lambda_i I_N - \bar{A} \mid \bar{B}], \quad R_{\lambda_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}$$

여기서, 행렬  $R_{\lambda_i}$ 의 열들은 행렬  $S_{\lambda_i}$ 의 영공간의 기저를 이룬다

**단계 4:** 식(3.10)과 같이 주어지는 확장된 획득 가능한 우모드행렬  $\Phi_{aug}^o$ 를 구성한다.

**단계 5:** 단계 2에서 주어지는 원하는 우모드행렬  $\Phi^d$ 와 단계 4에서 주어지는 확장된 획득 가능한 우모드행렬  $\Phi_{aug}^o$ 를 이용하여 식(3.11)에 의해 계수벡터  $\bar{p}_i$ 를 정한다.

**단계 6:** 다음과 같이 주어지는 획득 가능한 우모드행렬  $\Phi^o$ 를 계산한다.

$$\Phi^o = \Phi_{aug}^o \bar{P}$$

**단계 7:** 다음과 같이 계산되는 벡터  $w_i$ 를 구하여 행렬  $W$ 를 다음과 같이 구성한다.

$$w_i = M_{\lambda_i} \bar{p}_i, \quad W = [w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_N]$$

**단계 8:** 앞 단계들로부터 구한 행렬  $\Phi^o$  및  $W$ 를 이용하여 요구되는 되먹임 이득행렬  $K$ 를 구한다.

$$K = W(\Phi^o)^{-1}$$

**단계 9:** 블록행렬 형태로 주어지는 이득행렬로부터 다음과 같은 형태의 리카티 방정식의 유일한 해  $P$ 를 구한다.

$$P = \begin{bmatrix} RK_1 & RK_2 \\ (RK_2)^T & I_m \end{bmatrix}$$

**단계 10:** 단계 9에서 구한  $P$ 를 리카티 방정식 (3.2a)에 대입하여 가중행렬  $Q$ 의 각각의 블록을 계산한다.

**단계 11:** 이제 단계 10까지의 결과가 정리 3.2를 만족하는지 확인한다. 만족하지 않는다면 단계 1의 변환행렬  $T$ 를 다시 설정해서 위의 단계를 반복한다. 만족한다면 다음의 단계 12로 넘어간다.

**단계 12:** 블록 제어기 형태로 변환되기 전의 원래 시스템에 대한 이득행렬  $K_o$ 와 가중행렬  $Q_o$ 를 아래 식들로부터 구한다.

$$K_o = KT^{-1}, \quad Q_o = T^{-T}QT^{-1}$$

### 4. 비한정 Q 해석

3절의 설계 알고리즘으로 제어기를 설계하면 폐루프 시스템의 고유치는 정확하게 지정되고, 고유벡터들은 최소자승의 관점에서 최적으로 배치하게 되며, 대칭성을 만족하는 LQR의 가중행렬을 구해낼 수 있는 반면 가중행렬은 비한정행렬이 된다. 따라서, 비한정행렬이 시스템의 제어특성에 어떤 영향을 미치는지에 대해 논의해 보고자 한다.

현재까지 LQR은 상태 가중행렬의 어떤 고유치도 음이 아니라는 가정아래에서 논의되었다. 가중행렬이 대각화된 행렬이라면 대각요소들의 값들이 모두 0 또는 양수라는 것과 동일하다. 그 결과로 된 조건(circle condition)이 만족되고, 좋은 교차(crossover) 특성이 보장되었다. 이러한 특성 때문에 LQR 기법을 극점배치에 대해 사용하였으나 상대 차수(relative degree)가 높은 시스템에 대해서는 댐핑특성을 만족시키지는 못한다. 따라서, 일반적인 LQR에 의해 제어된 시스템은 큰 대역폭을 항상 가지게 된다. 더 나아가서 고주파수 영역의 동역학 시스템

에서는 제어기 설계 목적과 달리 시스템이 불안정하게 될 수 있다. 그리고, 고주파수 잡음의 감쇠율을 작게 하기 위하여 제어이득 롤오프 특성(rolloff property)은 항상 -20 dB/dec 이다.

지금까지 비한정 대칭 가중행렬에 대한 연구는 많이 진행되어 왔다. 이미 알려진 바에 의하면 비한정 대칭 가중행렬이 주어질 경우 리카티 방정식의 해의 유일성에는 영향은 없고<sup>(16)</sup>, 원 조건은 만족하지 않는다<sup>(17)</sup>. 이 경우 각각의 조건들이 어떻게 바뀌는지 고찰해 본다.

### 해의 유일성

일반적으로 시스템이 제어가능하고, 가중행렬  $Q$ 가 양의 한정일 경우 리카티 방정식은 유일한 양의 한정해를 가진다. 하지만 다음 정리에는  $Q$ 의 부호에 대한 언급은 없다. 따라서, 리카티 방정식의 해의 유일성은 가중행렬  $Q$ 가 어떤 부호나 하는 제약 없이 블록 제어가 유일한 해를 주느냐하는 문제가 된다.

**정리 3.3** <sup>(16)</sup> : 입력가중행렬에 의해 정규화된 LQR 문제를 고려할 때 Hamiltonian 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$H = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix}$$

이제,  $(A, B)$ 가 제어가능하다고 가정하자. 그러면 다음의 조건들은 동일하다.

- 1) 리카티 방정식  $PA + A^T P - PBB^T P + Q = 0$  은  $\text{Re}\{\lambda(A - BB^T P)\} < 0$ 을 만족하면 유일한 대칭 해  $P$ 를 가진다.
- 2) 모든  $H$ 의 고유치  $\lambda$ 에 대해서  $\text{Re}\{\lambda(H)\} \neq 0$ 이다.

정리 3.3에 대한 증명은 참고문헌(16)을 참조하기 바란다. Hamiltonian 행렬의 특성방정식은  $\Phi_c(s)\Phi_c(-s)$ 와 동일하다. 여기서,  $\Phi_c(s)$ 는 페루프 시스템의 특성다항식이다. 증명에 따르면 정리 3.3의 특성 2)는 항상 만족한다. 그러므로, 리카티 방정식은 특성 1)로부터 유일한 해를 가진다. 정리 3.3에 따르면 비한정 가중행렬은 리카티 방정식의 해의 유일성에 무관하다.

### 순환 조건

LQR 문제에서, 리카티 방정식에서 유도된 Kalman 식은 다음과 같다.

$$[I + K\Phi(-s)B]^T R [I + K\Phi(s)B] = R + B^T \Phi^T(-s) Q \Phi(s) B$$

여기서  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ 이고,  $R$ 은 입력 가중행렬이다. 만약  $Q$ 가 양의 반한정(positive semi-definite)행렬이면, 원 조건은  $s = j\omega$ 의 모든 주파수  $\omega$ 에 대해 다음 식을 만족한다.

$$[I + K\Phi(-j\omega)B]^T R [I + K\Phi(j\omega)B] \geq R$$

LQR 제어기는 위 식에서 행렬  $I + K\Phi(-j\omega)B$ 가 감도행렬의 역행렬이기 때문에 모든 주파수에 대해 저감도의 특성을 가진다. 특히, 단일 입력 시스템의 루프 전달함수  $K\Phi(s)B$ 의 이득여유는 무한대이고, 위상여유는  $60^\circ$ 보다 크다. 따라서, 원 조건을 만족하면 견실성은 자동적으로 보장된다고 할 수 있다.

가중행렬이 음의 고유치를 가지게 되면 원 조건은 성립하지 않는다. 하지만, 원 조건을 희생하더라도 여러 가지 제어 특성은 그대로 유지된다. 즉, 페루프 시스템의 견실성 또한 그대로 유지된다<sup>(17)</sup>. 이것은 가중행렬의 양의 한정 조건이 LQR의 정상상태해의 존재성과 안정성에 대하여 충분조건으로 작용하기 때문이다<sup>(18)</sup>. 또한, 수학적 모델이 원 조건을 만족하고, 충분한 이득여유, 위상여유를 가지고 있는 경우에도 고주파수에서 모델링되지 않은 모드에서는 언제나 불안정해질 수 있다. 이런 경우, 음의 대각 상태 가중치가 성능지수에 사용된다면, LQR 기법을 향상시키는 것도 가능하다. 성능지수에 사용되는 상태변수는 상태 방정식과 관련되어 있고, 변수는 서로 각각에 독립적이지 못하므로, 가중치를 더 자유롭게 선택할 수 있는 가능성이 남아 있다. 그러나, 일반적으로 음의 가중치를 선택하는 지침은 아직까지 알려진 바가 없다.

## IV. 수치예제 및 자동차 능동 현가장치 제어에의 응용

본 논문에서 제안된 LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법 설계 방법을 통해 간단한 수치예제와 1/2 자동차 능동 현가장치의 설계과정에 적용하여 그 타당성 및 유용성을 고찰한다.

### 1. 수치예제

다음과 같이 주어지는 두 개의 입력을 가진 3차의 연속가제어 시스템<sup>(9)</sup>을 고려하자.



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

준 시스템 A의 개루프 시스템의 고유치는  $\Lambda^{open} = \{-1 \pm 2j, 2\}$ 로 주어진다. 원하는 폐루프 시스템의 고유치를  $\Lambda^d = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{-7, -5, -4\}$ 라 하자. 원하는 우모드행렬  $\Phi^d$ 를 임의로  $I_N$ 으로 선정하면,  $\phi_i^T \phi_i = \delta_{ij}$  관계를 이용하여 정규화한 행렬  $\Phi_{nor}^d$ 은 다음과 같다.

$$\Phi_{nor}^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■장에서 기술한 설계지침에 따라 획득 가능한 정규화된 우모드행렬  $\Phi_{nor}^a$ 를 구해 보면 최소자승의 관점에서 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi_{nor}^a = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & -0.5300 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0.8480 \end{bmatrix}$$

Fig. 1은 획득 가능한 우고유벡터 및 원하는 우고유벡터의 방향들을 도시한 것으로, 일반적으로 입력행렬

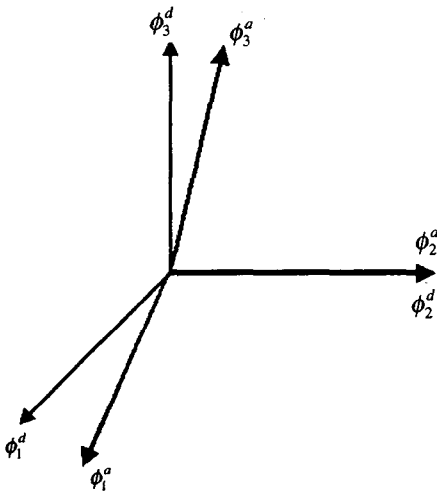


Fig. 1 Desired right eigenvectors  $\phi_i^d$  and achieved right eigenvectors  $\phi_i^a$

$B$ (rank= $m$ )와 시스템행렬  $A$ (rank= $N$ )의 랭크조건에 따라 정확히 배치되거나 최소자승의 관점에서 최적으로 배치된다. 즉,  $m$ 과  $N$ 이 같은 경우는 정확하게 배치되고,  $m < N$ 인 경우에는 최소자승의 관점에서 최적으로 배치된다. 그럼에서는  $m=2, N=3$ 이므로  $\phi_2^a$ 는  $\phi_2^d$ 에 정확하게 배치되고  $\phi_1^a$ 와  $\phi_3^a$ 는 각각  $\phi_2^d$ 와  $\phi_3^d$ 에 최소자승의 관점에서 최적으로 배치되었다.

또한, 원하는 폐루프 고유치는  $m$ 과  $N$ 의 차수에 상관없이 정확하게 지정되며, 되먹임 이득행렬  $K$ 와 가중행렬  $R$  및  $Q$ 는 각각 다음과 같이 구해진다.

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 4.5 & 0.5 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5714 \\ 0.5714 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 19.8571 & 14.6429 & 3.0714 \\ 14.6429 & 13.01786 & -6.0357 \\ 3.0714 & -6.0357 & -5.9643 \end{bmatrix}$$

Ochi와 Kanai<sup>(9)</sup>는 위의 예제를 사용하여 Hamiltonian 행렬의 특성방정식에서 유도된 미분방정식을 풀어서 대각형태를 가지는 가중행렬로 원하는 폐루프 극점을 정확하게 옮겼지만 고유벡터 지정 문제는 다루어지지 않았다. 본 논문에서는 Ochi와 Kanai가 제안한 방정식과 같이 복잡한 미분방정식을 풀 필요 없이 간단한 행렬연산만으로도 폐루프 극점(고유치)과 고유벡터까지 동시에 지정할 수 있는 LQR의 가중행렬  $Q$ 와  $R$ 을 구해 내었다.

## 2. 자동차 능동 현가장치 제어

현가장치 시스템 제어의 주목적은 도로표면에 대한 적절한 조종성, 캠버 자세유지, 그리고 사시의 구름(roll)에 대한 저항, 최소 하중 변화에 따른 타이어의 노면접촉에 대하여 수직 추종성(compliance)을 제공하는 것이다.

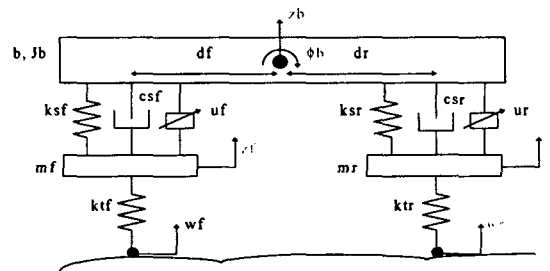


Fig. 2 A half car model

이 장에서는 Fig. 2의 1/2 자동차 능동 현가장치 시스템에 노면 외란에 대해 승차감을 향상시키기 위하여 LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법을 통해서 제어기를 설계하고, 개루프 응답과 비교한다. 시스템 방정식은 다음의 요소로 구성되며 상태벡터는 다음과 같다.

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T$$

여기서 각 상태들은 각각 앞바퀴 편향 ( $x_1 = z_f - z_b - d_f \phi_b$ ), 뒤 바퀴 편향 ( $x_2 = z_r - z_b + d_r \phi_b$ ), 앞 타이어 편향 ( $x_3 = w_f - z_f$ ), 뒤 타이어 편향 ( $x_4 = w_r - z_r$ ), 앞 현가장치 속도 ( $x_5 = \dot{z}_f$ ), 뒤 현가장치 속도 ( $x_6 = \dot{z}_r$ ), 차체의 수직가속도 ( $x_7 = \dot{z}_b$ ) 그리고 차체의 피치율 ( $x_8 = \phi_b$ )을 나타낸다<sup>(12)</sup>.

시스템 행렬 A, B와 노면 외란 입력은 각각 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -499 & 0 & 4387.5 & 0 & -32.2 & 0 & 32.2 & 32.2 \\ 0 & -486.1 & 0 & 4875 & 0 & -45 & 45 & 81 \\ 27.3 & 24 & 0 & 0 & 1 & -2.4 & 1.3 & 2.2 \\ 16.2 & -25.6 & 0 & 0 & 1 & -2.4 & 1.3 & -5.3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & 0.0014 & 0.0008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0278 & 0.0014 & -0.0015 \end{bmatrix}^T$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

제어입력은 다음과 같다.

$$u = [u_f, u_r]^T$$

여기서  $u_f$ 와  $u_r$ 은 각각 앞과 뒤 액추에이터 명령을 나타낸다.

노면 외란 입력  $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T = [\dot{w}_f, \dot{w}_r]^T$ 은 높이 0.1m, 폭 1m인 둔덕으로 고려하였다. 이 시스템에 대한 개루프 고유치는  $\Lambda^{open} = \{-16.38 \pm 67.43i, -22.95 \pm 67.68i, -1.15 \pm 6.19i, -2.79 \pm 7.69i\}$ 이다.

이제, 본 논문에서 제안한 제어기 설계방법을 통해서 상태 피드백 제어 법칙을 설계해보자. 수직가속도 성분을 줄이고 범퍼 통과 후 잔여진동을 줄이는 방향으로 바라는 페루프 고유치를 다음과 같이 각각 선정하자.

$$\Lambda = \{\lambda_{1,2}, \lambda_{3,4}, \lambda_{5,6}, \lambda_{7,8}\} \\ = \{-5.38 \pm 66.43i, -8.95 \pm 67.68i, -2.36 \pm 6.19i, -2.95 \pm 6.69i\}$$

이번에는 앞의 수치예제와는 달리 좌 및 우모드행렬의 상호 수직조건  $\Psi^a = (\Phi^a)^{-T}$ 을 이용하여 식(3.8)의 성능지표 함수를 최소화하는 좌모드 행렬을 지정한다. 원하는 좌모드 행렬  $\Psi^d$ 와 이를  $\phi_i^T \phi_i = \delta_{ij}$  관계를 이용하여 정규화한 행렬  $\Psi_{nor}^d$ 를 참고문헌<sup>(18)</sup>의 설계지침에 따라 제어효과를 크게 하고 외란을 잘 억제할 수 있도록 구성하면 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\Psi^d = \begin{bmatrix} -0.1-0.1i & -0.1+0.1i & -0.1690-0.1690i & -0.1690+0.1690i & 0 & 0 & -0.2-0.2i & -0.2+0.2i \\ 0.4+0.4i & 0.4-0.4i & 0.35+0.35i & 0.35-0.35i & 0.4+0.4i & 0.4-0.4i & 0.3+0.3i & 0.3-0.3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05+0.05i & 0.05-0.05i & 0.04+0.04i & 0.04-0.04i & 0.05+0.05i & 0.05-0.05i & 0.05+0.05i & 0.05-0.05i \\ 0.05+0.05i & 0.05-0.05i & 0.04+0.04i & 0.04-0.04i & 0.05+0.05i & 0.05-0.05i & 0.05+0.05i & 0.05-0.05i \\ 0.1+0.1i & 0.1-0.1i & 0.3+0.3i & 0.3-0.3i & 0.2+0.2i & 0.2-0.2i & 0.1+0.1i & 0.1-0.1i \\ 0.1+0.1i & 0.1-0.1i & 0.001+0.001i & 0.001-0.001i & 0.1+0.1i & 0.1-0.1i & 0.1+0.1i & 0.1-0.1i \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{nor}^d = \begin{bmatrix} -0.1601-0.1601i & -0.1601+0.1601i & -0.2418-0.2418i & -0.2418+0.2418i & 0 & 0 & -0.3592-0.3592i & -0.3592+0.3592i \\ 0.6405+0.6405i & 0.6405-0.6405i & 0.5008+0.5008i & 0.5008-0.5008i & 0.6100+0.6100i & 0.6100-0.6100i & 0.5388+0.5388i & 0.5388-0.5388i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0801+0.0801i & 0.0801-0.0801i & 0.0572+0.0572i & 0.0572-0.0572i & 0.0762+0.0762i & 0.0762-0.0762i & 0.0898+0.0898i & 0.0898-0.0898i \\ 0.0801+0.0801i & 0.0801-0.0801i & 0.0572+0.0572i & 0.0572-0.0572i & 0.0762+0.0762i & 0.0762-0.0762i & 0.0898+0.0898i & 0.0898-0.0898i \\ 0.1601+0.1601i & 0.1601-0.1601i & 0.4292+0.4292i & 0.4292-0.4292i & 0.3050+0.3050i & 0.3050-0.3050i & 0.1796+0.1796i & 0.1796-0.1796i \\ 0.1601+0.1601i & 0.1601-0.1601i & 0.0014+0.0014i & 0.0014-0.0014i & 0.1525+0.1525i & 0.1525-0.1525i & 0.1796+0.1796i & 0.1796-0.1796i \end{bmatrix}$$

■장에서 기술한 설계 지침에 따라 획득 가능한 정규화된 좌모드행렬  $\Psi_{nor}^a$  를 구해보면 최소자승의 관점에서 다음과 같이 주어진다.

$$\Psi_{nor}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0001-0.0001i & -0.0001+0.0001i & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001+0.0001i & 0.0001-0.0001i & 0.0001+0.0001i & 0.0001-0.0001i & -0.0001i & 0.0001i & -0.0001i & 0.0001i \\ 0.2706-0.2716i & 0.2706+0.2716i & 0.3135-0.3196i & 0.3135+0.3196i & 0.2838-0.2056i & 0.2838+0.2056i & 0.4483-0.3601i & 0.4483+0.3601i \\ -0.3231+0.3178i & -0.3231-0.3178i & -0.3308+0.3178i & -0.3308-0.3178i & -0.1910+0.4935i & -0.1910-0.4935i & -0.2414+0.4641i & -0.2414-0.4641i \\ 0.2460-0.2592i & 0.2460+0.2592i & -0.0424+0.0194i & -0.0424-0.0194i & 0.0344+0.6366i & 0.0344-0.6366i & -0.0011+0.4401i & -0.0011-0.4401i \\ 0.2984-0.2989i & 0.2984+0.2989i & 0.3811-0.3811i & 0.3811+0.3811i & 0.0544-0.0348i & 0.0544+0.0348i & 0.0314-0.0259i & 0.0314+0.0259i \\ -0.2910+0.2909i & -0.2910-0.2909i & -0.3845+0.3830i & -0.3845-0.3830i & 0.0203-0.0019i & 0.0203+0.0019i & 0.0199+0.0028i & 0.0199-0.0028i \\ -0.2902+0.2967i & -0.2902-0.2967i & 0.0404-0.0212i & 0.0404+0.0212i & 0.0270-0.4305i & 0.0270+0.4305i & 0.1186-0.4312i & 0.1186+0.4312i \end{bmatrix}$$

이 경우 원하는 페루프 고유치는 정확하게 지정된다. 그리고, 되먹임 이득행렬  $K$ 와 가중행렬  $R$  및  $Q$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$K = \begin{bmatrix} -5269 & -4338 & -21518 & 2969 & 861 & -176 & 1214 & -295 \\ -5166 & 6303 & -5048 & -14301 & -8 & 978 & 478 & 451 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8147 \\ 0.8147 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = 10^5 * \begin{bmatrix} 4771 & 1311 & -9658 & -12941 & -124 & -52 & -760 & 115 \\ 1311 & -829 & 5104 & 6564 & -125 & -167 & -176 & -98 \\ -9658 & 5104 & -85899 & -49799 & 1817 & 1422 & 1795 & 547 \\ -12941 & 6564 & -49799 & -38421 & 1412 & 1644 & 1934 & 802 \\ -124 & -125 & 1817 & 1412 & -2 & -6 & 17 & 2 \\ -52 & -167 & 1422 & 1644 & -6 & -10 & 12 & -9 \\ -760 & -176 & 1795 & 1934 & 17 & 12 & 116 & -11 \\ 115 & -98 & 547 & 802 & 2 & -9 & -11 & -2 \end{bmatrix}$$

여기서,  $K$ 의 Frobenius Norm, 즉,  $\|K\|_{fro} = 28610$  이다. 페루프 시스템  $\dot{x} = (A - BK)x + E\xi$ 의 응답이 개루프 시스템의 응답과 비교되어 Fig. 3에 도시되어 있다. 모의실험은 노면입력 외란으로 주어진 둔덕을 1/2 자동차가 10 rm/sec로 통과하는 상태에서, 수직가속도와 각가속도 성분의 변화를 살펴보았다. 제어결과  $1G(= 9.8m/sec^2)$ 에 가깝던 개루프 수직가속도와 각가속도가 상당히 감소되었다. 따라서, 본 제어방법이 외란 억제 문제에 효과적으로 적용됨을 알 수 있다.

본 논문에서 제안한 제어 알고리즘을 적용한 결과, 원하는 페루프 극점(고유치)을 정확하게 옮기는 동시에 고유벡터까지 원하는 방향에 최소자승의 관점에서 최적으로 배치시키는 기능을 갖는 LQR의 가중행렬  $Q$ 와  $R$ 을 구해낼 수 있었다. 그리고 가중행렬의 비대각요소항들은 0이 아닌 의미있는 값들을 가지므로 대각형태의 가중행렬

보다 더 실제적인 결과를 의미한다고 할 수 있다. 또한, 가중행렬이 비한정 대칭행렬로 구해지는데,  $Q$ 가 양의 정칙성을 만족하지 않는 경우 원 조건은 성립하지 않으나 페루프 시스템의 견실성은 유지되고 리카티 방정식의 해의 유일성에 무관하므로 비한정  $Q$ 를 해로서 사용할 수 있다.

## V. 결론

일반적으로 고유구조 지정법은 페루프 시스템의 고유치와 고유벡터를 적절히 지정함으로써 페루프 시스템의 응답 특성을 임의로 바꿀 수 있는 반면, 견실성은 제어기 설계 과정에 직접 반영할 수 없는 구조이다. 한편 LQR은 전상태되먹임을 사용하여 페루프 시스템의 견실성은 어느 정도 보장하지만, 페루프 시스템의 고유구조는 임의로 지정할 수 없는 구조이다.

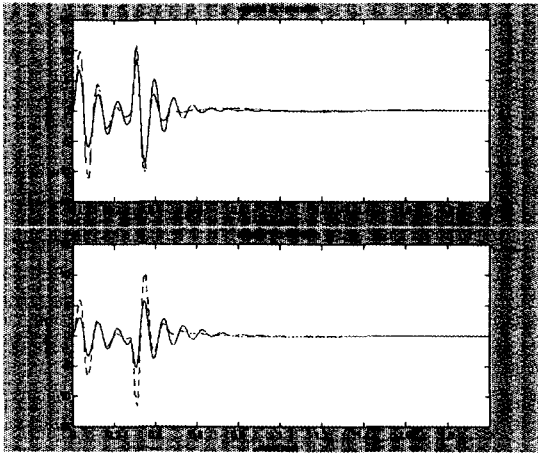


Fig. 3 Vertical and Angular acceleration responses (solid line : Closed-loop, dashed line : Open-loop)

본 논문에서 제안한 방법은 블록 제어를 사용한 고유구조지정에 의한 알고리즘으로 이득행렬을 구하고 블록행렬 형태로 페루프 고유구조를 정확하게 지정하는 가중행렬을 구해냄으로써 페루프 시스템의 고유치를 정확하게 지정하는 동시에 좌 및 우고유벡터들의 방향을 요구되는 방향에 최소자승의 관점에서 최적으로 위치시키고, 이를 만족시키는 LQR의 가중행렬을 구해낼 수 있으며 가중행렬의 대칭성도 보장한다. 그리고, 가중행렬에 비대각요소들이 포함됨으로써 더 많은 자유도가 남게 되어 고유구조 지정과 LQR제어를 동시에 이루게 된다

간단한 수치예제와 자동차 능동 현가장치 설계예제를 통하여 본 논문에서 제안한 LQR 특성을 갖는 고유구조 지정 제어기법의 설계과정을 살펴보고 그 타당성 및 유용성을 고찰하였다.

### 참 고 문 헌

1. J. W. Choi, "A Simultaneous Assignment Methodology of Right/Left Eigenstructures," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 34, No. 2, pp. 625-634, April, 1998.
2. P. Dorato, C. Abdallah, and V. Cerone, *Linear-Quadratic Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, pp. 63-75, 1995.
3. M. Innocenti, and C. Stanziola, "Perfor-

- mance-Robustness Trade Off of Eigenstructure Assignment Applied to Rotorcraft," *Aeronautical Journal*, Vol. 94, No. 934, pp. 124-131, 1990.
4. R. F. Wilson, and J. R. Cloutier, "Optimal Eigenstructure Achievement with Robustness Guarantees," *Proceedings of the 1990 American Control Conference*, San Diego, USA, pp. 952-957, May, 1990.
5. J. R. Broussard, "A Quadratic Weight Selection Algorithm," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-27, pp. 945-947, August, 1982.
6. C. A. Harvey, and G. Stein "Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, No. 3, pp. 378-387, June, 1978.
7. T. Hiroe, T. Morimoto, S. I. Inoue, and H. Takamatsu, "A New Method for Selecting Weighting Matrices of LQ Regulators and Its Application to an Industrial Turbine," *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, USA, pp. 3333-3334, December, 1993.
8. T. Fujii, "A New Approach to the LQ Design from the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, No. 11, pp. 995-1003, November, 1987.
9. Y. Ochi, and K. Kanai, "A New Way of Pole Placement in LQR and Its Application to Flight Control," *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Monterey, CA, USA, pp. 1295-1301, August, 1993.
10. 김희섭, 김유단, "The Study on the Relations Between LQR and Eigenstructure Assignment," *Proceedings of the 11th KACC*, pp. 1091-1094, October, 1996.
11. A. N. Andry, E. Y. Shapiro, and J. C. Chung, "Eigenstructure Assignment for Lin-

- ear Systems," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-19, No. 5, pp. 711-729, 1983.
12. J. W. Choi, K. S. Hong, and W. S. Yoo, "Eigenstructure Assignment Methodology with Application to Automotive Active Suspension Control," Proceedings of the *SICE '97, Tokushima, Japan*, pp. 983-988, July, 1997.
  13. C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Saunders College Publishing, 1984.
  14. B. H. Kwon, and M. J. Youn, "Eigenvalue-Generalized Eigenvector Assignment by Output Feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, No. 5, pp. 417-421, May, 1987.
  15. F. L. Lewis, *Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc, pp. 213-214, 1986.
  16. B. P. Molinari, "The Stable Regulator Problem and Its Inverse," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 1, pp. 4-16, February, 1981.
  17. H. Ohta, M. Kakinuma, and P. N. Nikiforuk, "Use of Negative Weights in Linear Quadratic Regulator Synthesis," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, pp. 791-796, July, 1990.
  18. J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. S. Kang, "Design of an Effective Controller via Disturbance Accommodating Left Eigenstructure Assignment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 2, pp. 347-354, March-April, 1995.