

분포접선력을 받는 탄성지지된 보의 동적 불안정

류봉조*, 김인우**, 이규섭**, 임경빈***, 최봉문****

Dynamic Instability of Elastically Restrained Beams under Distributed Tangential Forces

Bong-Jo Ryu*, In-Woo Kim**, Gyu-Seop Lee**, Kyung-Bin Yim*** and Bong-Mun Choi****

ABSTRACT

The dynamic behavior of elastically restrained beams under the action of distributed tangential forces is investigated in this paper. The beam, which is fixed at one end, is assumed to rest on an intermediate spring support. The governing equations of motion are derived from the energy expressions, and the finite element formulation is employed to calculate the critical distributed tangential force. Jump phenomena for the critical distributed tangential force and instability types are presented for various spring stiffnesses and support positions. Stability maps are generated by performing parametric studies to show how the distributed tangential forces affect the frequencies and the stability of the system considered. Through the numerical simulations, the following conclusions are obtained: (i) Only flutter type instability exists for the dimensionless spring stiffness $K \leq 97$, regardless of the position of the spring support. (ii) For the dimensionless spring stiffness $K \leq 98$, the transition from flutter to divergence occurs at a certain position of the spring support, and the transition position moves from the free end to the fixed end of the beam as the spring stiffness increases. (iii) For $K \leq 10^6$, the support condition can be regarded as a rigid support condition.

Key Words : Dynamic Instability (동적불안정), Distributed Tangential Forces(분포접선력), Elastically Restrained Beams (탄성스프링지지보), Finite Element Formulation (유한요소법)

1. 서론

비보존력을 받는 탄성계의 동적 안정성 문제는 기계공학, 항공우주공학, 토목공학 등의 분야에서 많은 관심의 대상이 되어져 왔다. 예를들어, 맥동토오크를 받는 회전

날개, 추진력을 받는 미사일이나 로켓, 축에 접선방향의 힘을 받는 교량 구조물, 파이프 배관계의 내부를 흐르는 유체힘에 의한 안정성 및 진동문제 등이다. 최근 이러한 동적 불안정 문제에 대한 특별한 관심이 분포접선력을 받는 계의 안정성문제로 발전되어져 왔다. 분포접선력은 거

* 대전산업대학교 기계설계공학과, 정회원
 ** 국방과학연구소, 정회원
 *** 대전산업대학교 기계설계공학과, 초빙교수
 **** 대전산업대학교 기계설계공학과 대학원

친 내부표면을 갖는 유체유동이나 높은 점성유체흐름 (highly viscous flowing fluid)을 갖는 파이프의 안정성 문제를 다루는데 나타날 수 있다. 왜냐하면, 유체유동을 포함한 파이프 구조물의 경우, 레이놀드 수(Reynolds number)가 매우 낮아 점성력이 관성력보다 훨씬 크다고 가정하면, 파이프의 내부 벽에 작용하는 전단력은 분포접선력으로 간주될 수 있기 때문이다.

이러한 분포접선력에 대한 연구는 많은 연구자들에 의해 시도되어졌다. Leipholz⁽¹⁾는 분포접선력에 대한 구조물의 동적 안정성 문제에 대한 접근을 시도하였으며, 그 후 Hauger⁽²⁾는 삼각분포하중을 받는 기둥의 동적안정성에 대한 연구를 하였다. Sugiyama와 Kawagoe⁽³⁾는 균일한 분포접선력과 분포수직력의 조합인 분포아접선력을 받는 탄성기둥의 진동과 안정성 문제를 유한차분법을 통하여 해석하였고, Leipholz와 Madan⁽⁴⁾도 균일 분포접선력을 받는 탄성보의 안정성문제의 임계접선력값을 구하였다. 특히, Leipholz⁽⁵⁾는 1980년 그의 저서에서 집중종동력, 균일분포 접선력, 삼각 분포 접선력을 받는 보의 동적 안정성 문제에 대한 엄밀해 또는 수치해석을 통한 근사해 등 비보존력 관련 다수의 문제들에 대한 해를 구하였다.

이러한 연구들과 더불어 접선력을 받는 탄성 지지된 보의 안정성 연구들⁽⁶⁻⁷⁾도 이루어져 왔다. Elishakoff와 Lottati⁽⁸⁾는 중간 견고지점(intermediate rigid support)을 갖고 집중종동력을 받는 한단 단순지지-타단 자유보 모델의 동적안정성을 엄밀해법을 통하여 연구하였다. 그후, 이러한 문제에 관심을 가졌던 Rosa⁽⁹⁾는 Winkler 탄성기초(Winkler elastic foundation)를 갖는 보의 동적안정성에 대한 연구를 하였고, 곧이어 Rosa와 Franciosi⁽¹⁰⁾는 순수 접선력을 받고 탄성스프링 지지된 외팔보의 임계하중값을 셀 방법(cell method)을 이용하여 구하였다. 특히 이들은 보에 주어지는 접선력의 형태가 삼각 분포 접선력이거나 집중접선력(concentrated tangential force)인 경우에 대해서도 확장하여 동적안정성을 연구하였으나, 지지점이 견고한 경우, 즉 스프링의 스프링 상수값이 대단히 큰 견고지점(rigid support)의 경우에 대해서만 그 동적안정성을 조사하였다. Chen과 Ku⁽¹¹⁾는 유한요소법을 이용하여, 균일 분포접선력을 받는 회전관성과 전단변형을 고려한 보의 안정성 해석을 하였는데, 특히 그는 고유치 민감도(eigenvalue sensitivity)를 개선시킨 반복절차(iteration procedure)법에 의해 조사하였다. 최근, Lee와 그의 공동연구자들⁽¹²⁾은

Winkler탄성기초를 갖고 집중접선력(concentrated tangential force)을 받는 불균일 보의 안정성 문제를 스프링 상수의 변화에 따라 연구하였고, 그 후, Lee와 Yang⁽¹³⁾은 탄성기초를 갖는 불균일 보의 비보존 불안정에 대한 연구를 하였다.

그러나, 위의 연구들의 대부분은 분포접선력이거나 집중접선력만을 받는 경우거나 아니면 스프링 상수가 큰 견고지점을 갖고 접선력을 받는 경우에 대한 연구였고, 스프링 상수와 스프링 위치의 동시변화에 대한 동적 안정성 연구는 거의 없는 실정이다.

따라서 본 논문의 목적은 균일 분포접선력을 받는 탄성 지지된 보의 동적안정성을 탄성지지점의 위치변화와 스프링 상수의 동시변화에 따라 연구하는데 있다.

2. 이론 해석

2.1 수학적 모델

분포접선력을 받는 탄성지지된 한단고정-타단자유보 모델에 대한 그림은 Fig. 1 에 나타난 바와 같다.

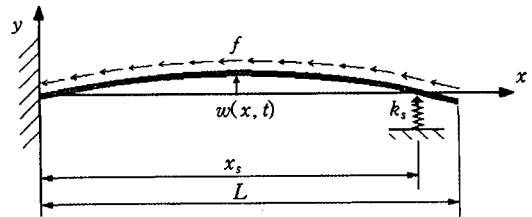


Fig. 1 A cantilevered beam with an intermediate spring support under distributed tangential forces.

Fig. 1에서 L 은 보의 전체길이, x_s 는 보의 고정단으로부터 스프링 지지점까지의 거리, k_s 는 스프링 상수, f 는 단위길이당 분포접선력, $w(x,t)$ 는 횡방향 변위, x 와 y 는 각각 축방향과 횡방향 좌표를 나타낸다.

2.2 지배 방정식

Fig.1 모델에 대한 운동의 지배 방정식을 유도하기 위해 에너지 표현식을 사용하면 운동에너지와 탄성포텐셜 에너지는 각각 식(1) 및 식(2)와 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k_s w^2(x_s, t) \quad (2)$$

식(1), (2)에서 ρ 는 보의 밀도, A 는 보의 단면적, E 는 영률(Young's modulus), I 는 단면의 2차 모멘트를 나타낸다. 한편, 분포 접선력의 보존성분(conservative component)에 의하여 하여진 일 W_c 와 비보존성분(non-conservative component)에 의하여 하여진 가상일(virtual work) δW_{nc} 는 각각 다음과 같이 표현되며 분포접선력의 보존성분과 비보존성분의 상세유도과정은 Ref.[5]에 잘 나타나 있다.

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L f(L-x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$\delta W_{nc} = -f \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \, dx \quad (4)$$

이제 식(1)부터 식(4)를 확장된 Hamilton 원리

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W_c) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (5)$$

에 대입하고 변분을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\int_0^L \left\{ \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - f(L-x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + f \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \right\} dx + k_s w(x_s, t) \delta w(x_s, t) = 0 \quad (6)$$

2.3 유한요소분할

식(6)에 유한요소법을 적용시키기 위해 보를 유한길이 ℓ 을 갖는 N 개의 요소로 분할하였으며, 분할된 요소 중 임의의 i 번째 요소에 대한 그림은 Fig.2에 나타난 바와 같다.

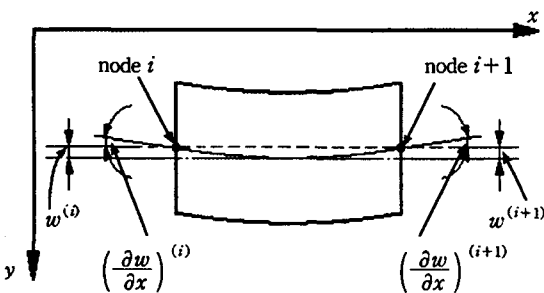


Fig. 2 Finite element model for i th element.

Fig.2에서 i 번째 요소는 두 절점(node) i 와 $i+1$ 로 구성되며, 각 절점은 횡방향변위 $w^{(i)}$, 보의 중심선의 기울기 $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^{(i)}$ 의 자유도를 갖는다.

계산상의 편의를 위해 다음과 같은 국부좌표들과 무차원 변수들

$$\begin{aligned} x'_s &= x_s - (b-1)\ell, \quad x' = x - (i-1)\ell, \quad \xi = \frac{x'}{\ell}, \quad \eta = \frac{w}{\ell}, \\ \xi_s &= \frac{x'_s}{\ell}, \quad q = \frac{x_s}{L} \end{aligned} \quad (7)$$

을 도입하면 식(6)은 각각 보 요소성분들의 보 전체에 걸친 합(sum)의 형태로 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \rho A I^3 \left(\frac{\partial^2 \eta(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right)^{(i)} \delta \eta(\xi, t)^{(i)} + \frac{EI}{\ell} \left(\frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right)^{(i)} \delta \left(\frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right)^{(i)} \right. \\ \left. - f \ell (L - (x' + (i-1)\ell)) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^{(i)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^{(i)} \right\} d\xi + \int_0^1 \ell^2 f \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \eta d\xi \\ + k_s \ell^2 \eta(\xi_s, t)^{(b)} \delta \eta(\xi_s, t)^{(b)} \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)에서 상첨자 (b)는 스프링이 위치한 보 요소를 나타낸다. 이제 식(8)의 해 $\eta(\xi, t)$ 를

$$\eta(\xi, t) = \eta(\xi) e^{i\omega t} \quad (9)$$

라 가정하고, 식(8)의 양변에 $\frac{\ell}{EI}$ 을 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ -\frac{\Omega^2}{N^4} \eta(\xi)^{(i)} \delta \eta(\xi)^{(i)} - \frac{Q}{N^3} (N - (\xi + i - 1)) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^{(i)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^{(i)} \right\} d\xi \\ + \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \frac{Q}{N^3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \eta d\xi + \frac{K}{N^3} \eta(\xi_s)^{(b)} \delta \eta(\xi_s)^{(b)} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)에서 무차원 변수들은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI}}, \quad Q = \frac{f L^3}{EI}, \quad K = \frac{k_s L^3}{EI} \quad (11)$$

식(10)을 전체의 보 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 고유치 문제의 행렬 방정식으로 귀결된다.

$$([K^*] - \Omega^2[M])\{U\} = 0 \quad (12)$$

여기서, $[K^*]$ 와 $[M]$ 은 각각 조합강성행렬(global stiffness matrix)과 조합질량행렬(global mass matrix)를 나타낸다.

식(12)의 고유치 Ω 의 변화에 따라 안정성이 판별된다.

2.4 안정성 해석

식(12)의 고유치 Ω 는 일반적으로 식(13)과 같이 표현될 수 있으며, α 와 β 값의 변화에 따라 안정성이 판별된다.

$$\Omega = \alpha + \beta i \quad (13)$$

즉, α 가 $\alpha \leq 0.0$ 인 경우는 안정한 상태로 간주하고, $\alpha > 0.0$ 인 경우는 불안정으로서, β 값의 부호에 따라 두가지의 불안정 형태로 구별된다. 첫째, $\beta = 0.0$ 인 경우는 발산형태의 불안정, $\beta > 0.0$ 인 경우는 플러터 형태의 불안정으로 구별된다.

3. 수치해석 결과 및 검토

분포점선력을 받는 탄성지지원 한단고정-타단자유 보 모델에 대해 스프링 지지점의 위치변화와 스프링 상수의 변화에 따른 동적안정성을 유한요소법을 이용하여 수치시뮬레이션 하였다. 보 요소는 20개의 요소로 나누었으며, 해의 정확도의 검증을 위해 Ref.[10]의 스프링 상수가 큰 견고지지점(rigid support)의 경우와 비교한 결과 근사한 오차를 보였다.

본 연구를 통해 알 수 있었던 특징들 중의 하나는 무차원 스프링상수가 $K \geq 10^6$ 에 대해서 K 가 증가해도 임계 분포점선력 값의 변화는 거의 없으므로 대체적으로 $K \geq 10^6$ 의 스프링지지점은 견고지지점으로 간주하여도 무관함을 알 수 있었다.

또한, 본 연구에서 안정과 불안정의 경계가 되는 무차원화된 임계분포점선력은 Q_{cr} 이지만 수치해석결과 그림상에서는 Q_{cr} 을 π^2 으로 나눈 값으로 표시하였다.

Fig.3에서 Fig.12는 $K=0.0$ 부터 $K=10^8$ 까지 스프링 지지점의 위치변화에 따른 임계 분포점선력값의 변화를 나타낸 그림들이다.

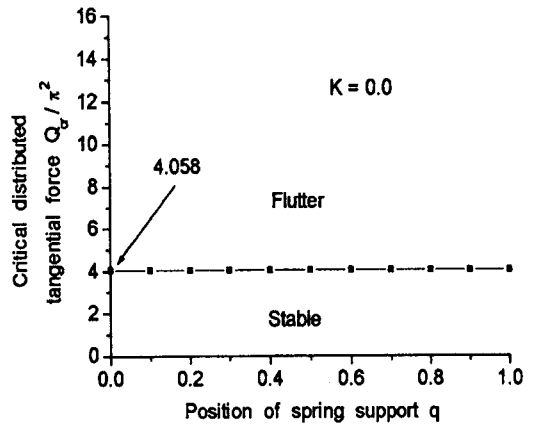


Fig. 3 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=0.0$.

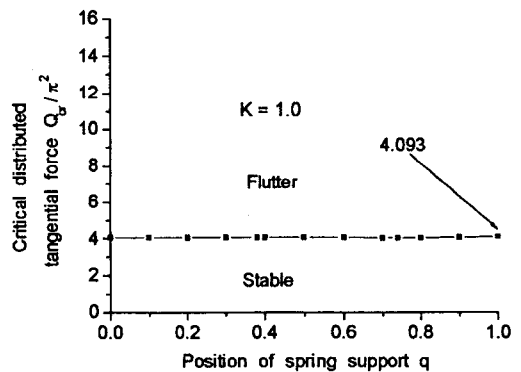


Fig. 4 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=1.0$.

먼저 Fig.3에서 Fig.5는 $K=0.0, 1.0, 10.0$ 에 대한 것으로서, 이 경우는 스프링 지지점의 어떤 위치에 있어서도 플러터형태(flutter type)의 불안정만이 일어남을 알 수 있다. $K=0.0$ 의 경우는 임계 분포점선력은 $Q_{cr}/\pi^2 = 4.058$ 로 균일하고, $K=1.0$ 의 경우 최대값은 무차원화된 스프링의 위치 $q=1.0$ 일때 $Q_{cr}/\pi^2 = 4.093$, $K=10.0$ 의 경우 $q=1.0$ 일때 $Q_{cr}/\pi^2 = 4.520$ 으로 나타났다.

Fig.6에서 Fig.12는 $K=10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$ 에 대한 것으로서, 특정한 스프링 지지점의 위치에서 불안정 형태의 천이가 일어남을 알 수 있다. $K=10^2$ 의 경우 $q=0.917$, 즉 고정단으로부터 보의 전체길이의 0.917되는 위치에서 플러터 불안정으로부터 발산형

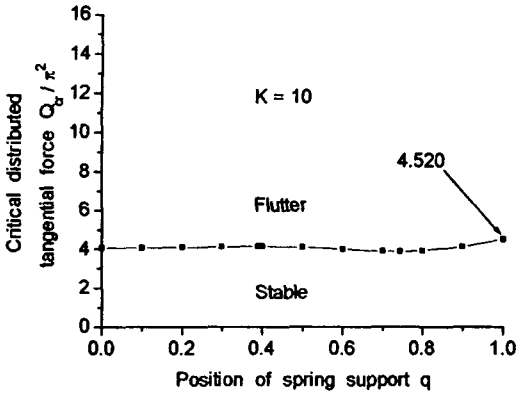


Fig. 5 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=10.0$.

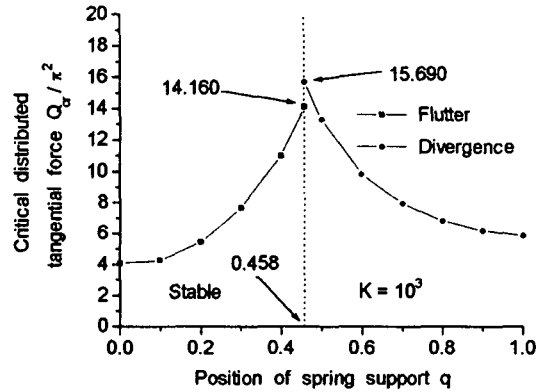


Fig. 7 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=10^3$.

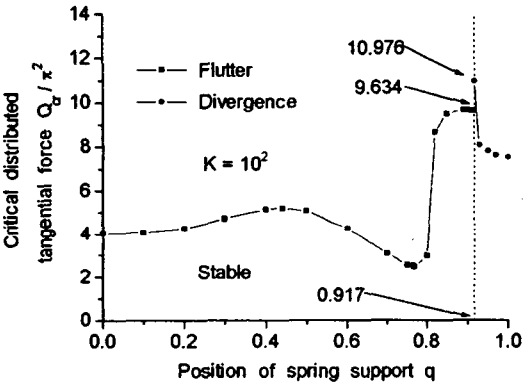


Fig. 6 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=10^2$.

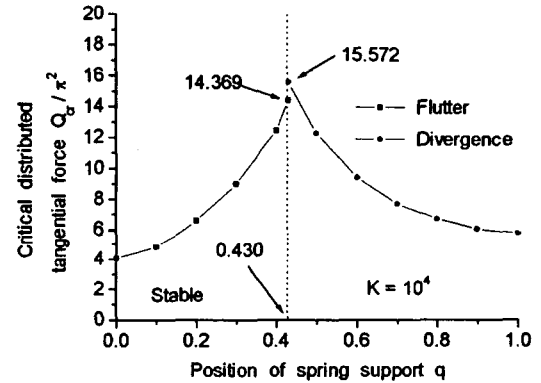


Fig. 8 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=10^4$.

(divergence type) 불안정로의 천이가 일어난다. 또한, 초기 플러터 불안정을 일으키는 임계 분포점선력 값은 $Q_{cr} / \pi^2 = 9.634$ 으로 점선력 크기의 증가와 함께 점프(jump)현상을 나타내고 발산형 불안정을 일으키는 임계 값은 $Q_{cr} / \pi^2 = 10.976$ 이다. $K=10^3$ 의 경우는 $q=0.458$ 에서 천이현상이 일어나며, 이때의 플러터 불안정의 임계 값은 $Q_{cr} / \pi^2 = 14.160$, 발산형 불안정의 임계 값은 $Q_{cr} / \pi^2 = 15.690$ 이다. $K=10^4$ 의 경우는 $q=0.430$ 에서, $k=10^5$ 이상에서는 $q=0.427$ 에서 각각 플러터로부터 발산형으로의 천이가 일어남을 알 수 있다. 즉 스프링 상수 K 값이 증가함에 따라 불안정 형태의 천이 위치는 고정 단 쪽으로 이동됨을 알 수 있다.

한편, Fig. 5의 $K=10$ 의 경우는 탄성지지점의 위치 변화

에 관계없이 항상 플러터 형태의 불안정만이 일어났고, Fig. 6의 $K=10^2$ 이상에서는 플러터로부터 발산형으로의 불안정 천이가 일어나므로, 스프링 상수 값의 어떤 값에서 정확히 천이가 일어나는지를 조사하기 위해 $K=10$ 부터 $K=10^2$ 까지 K 의 값을 변화시켜가며 동적안정성을 조사하였다. 그 결과 $K=97$ 까지는 스프링 위치 변화에 관계없이 항상 플러터 불안정만이 일어나고, $K=98$ 이상에서는 플러터로부터 발산형으로의 천이가 일어남을 알 수 있었다. 이에 대한 결과 그림을 스프링 위치 q 가 $q=1.0$ 인 위치에서 1, 2차 고유진동수의 변화로 Fig. 13과 Fig. 14에 나타내었다.

이러한 물리적 현상은 $K=98$ 이상에서는 진동수(frequency)가 영(zero)이 되는 좌굴(buckling) 불안정으로

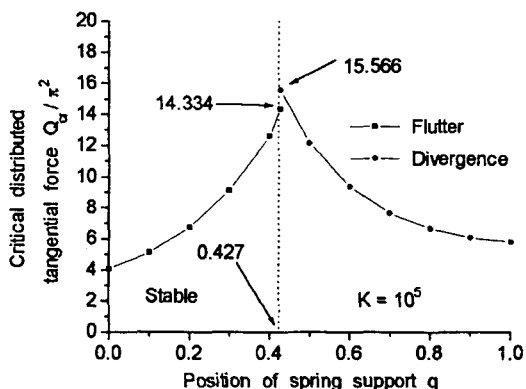


Fig. 9 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=10^5$.

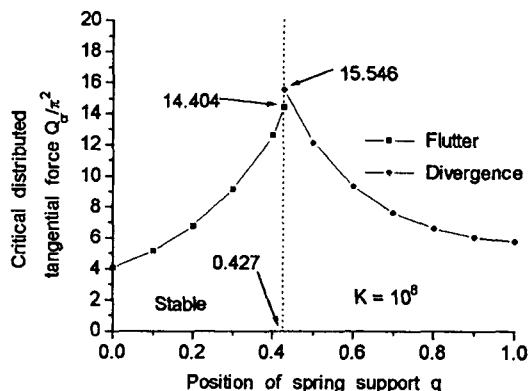


Fig. 12 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=10^6$.

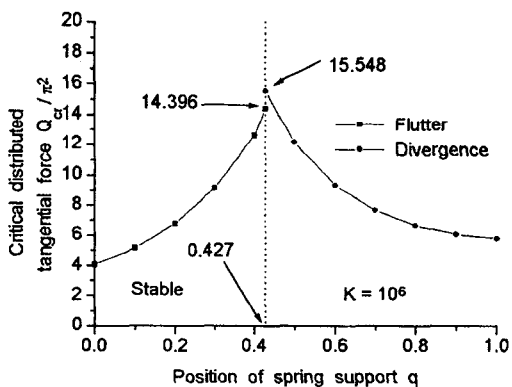


Fig. 10 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=10^7$.

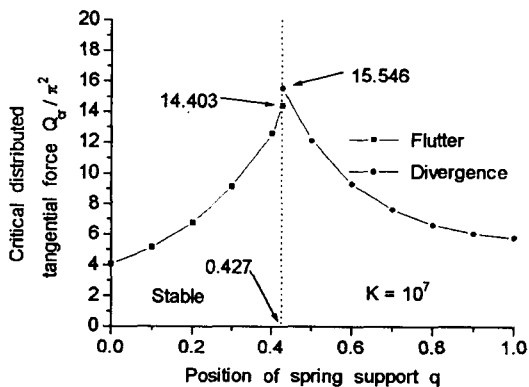


Fig. 11 Instability regions depending on the intermediate spring support for $K=10^8$.

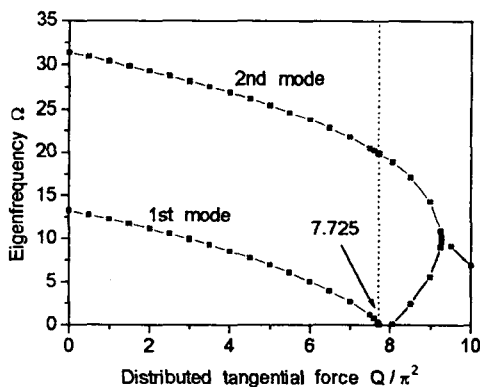


Fig. 13 Variations of critical distributed tangential force with eigenfrequencies for $K=98$ ($q=1.0$)

서 분포접선력이 주어질 때 보의 강성(stiffness)영향에 비해 관성(inertia)영향이 더 큰 결과라고 생각된다.

Fig.13은 $q=1.0$, $K=98$ 의 경우로 분포접선력의 증가와 함께 1차 고유진동수가 영(zero)으로 되어버리는 발산형 불안정이 일어남을 알 수 있고, Fig.14는 $q=1.0$, $K=97$ 의 경우로 접선력의 증가와 함께 1, 2차 고유진동수가 만나는 플러터 불안정을 보여준다. Fig.15와 Fig.16은 $K=98$ 인 경우에 있어 스프링 지지점의 위치가 $q=0.954$ 와 $q=0.955$ 인 각각에 대한 고유진동수와 분포접선력의 변화를 나타낸 그림들이다. 스프링 지지점의 위치가 $q=0.954$ 인 Fig.15의 경우, 플러터 불안정이 일어나고, $q=0.955$ 인 Fig.16의 경우는 발산형 불안정이 일어남을 알 수 있고, 이때의 $Q_{cr}/\pi^2=7.990$ 이다. 이

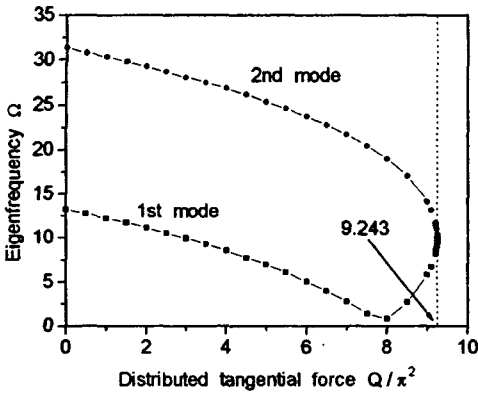


Fig. 14 Variations of critical distributed tangential force with eigenfrequencies for $K=97(q=1.0)$

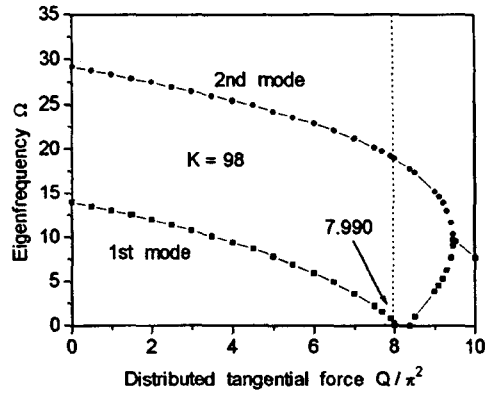


Fig. 16 Variations of critical distributed tangential force with eigenfrequencies for $q=0.955$.

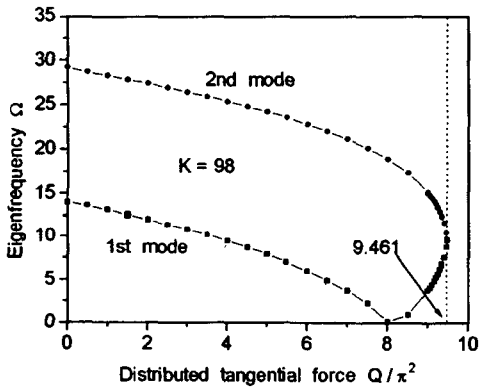


Fig. 15 Variations of critical distributed tangential force with eigenfrequencies for $q=0.954$.

는 스프링 상수 및 스프링 지지점의 위치변화에 따라 계의 불안정 형태가 변화될 수 있음을 보여준다.

4. 결 론

분포접선력을 받는 탄성 스프링 지지된 한단고정 타단 자유보 모델에 대한 동적안정성을 조사하기 위해 수치시물레이션한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 무차원 스프링 상수 K 값이 $K \leq 97$ 에서는 탄성스프링 지지점의 위치변화에 관계없이 항상 플러터 형태의

불안정만이 일어났다.

둘째, 무차원 스프링 상수 K 값이 $K \geq 98$ 에서는 스프링 지지점의 어떤 특정 위치에서 플러터형태로부터 발산형태로의 천이가 발생했으며, 이 천이점은 스프링 상수가 증가함에 따라 보의 자유단쪽으로부터 고정단 쪽으로 이동된다.

셋째, 무차원 스프링 상수 K 값이 $K \geq 10^6$ 에서는 스프링 상수값의 변화가 임계접선력값의 변화에 미치는 영향이 거의 없는 것으로 보아 $K \geq 10^6$ 의 스프링 상수값을 지닌 스프링지지점을 견고지지점(rigid support)으로 간주할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Leipholz, H., "Die Knicklast des einseitig eingespannten Stabes mit gleichmässig verteilter, tangentialer Längsbelastung," Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 6, pp. 581-589, 1962.
2. Hauger, W., "Die Knicklasten elastischer Stäbe unter gleichmässig verteilten und linear veränderlichen, tangentialen Druckkräften," Ingenieur-Archiv, Vol. 35, pp. 221-229, 1966.
3. Sugiyama, Y. and Kawagoe, H., "Vibration and Stability of Elastic Columns under the Combined Action of Uniformly Distributed Vertical and Tangential Forces," Journal of

- Sound and Vibration, Vol. 38, pp. 341-355, 1975.
4. Leipholz, H. and Madan, OM. P., "On the Solution of the Stability Problems of Elastic Rods Subjected to Uniformly Distributed Tangential Follower Forces," *Ingenieur-Archiv*, Vol. 44, pp. 347-357, 1975.
 5. Leipholz, H., *Stability of Elastic Systems*, Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1980.
 6. Kounadis, A. N., "Divergence and Flutter Instability of Elastically Restrained Structures under Follower Forces," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 19, pp. 553-562, 1981.
 7. Kounadis, A.N., "The Existence of Regions of Divergence Instability for Nonconservative Systems under Follower Forces," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 19, pp. 725-733, 1983.
 8. Elishakoff, I. and Lottati, I., "Divergence and Flutter of Nonconservative Systems with Intermediate Support," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, pp. 241-250, 1988.
 9. De Rosa, M. A., "Stability and Dynamics of Beams on Winkler Elastic Foundations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, pp. 371-388, 1989.
 10. De Rosa, M.A. and Franciosi, C., "The Influence of an Intermediate Support on the Stability Behavior of Cantilever Beams Subjected to Follower Forces," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, pp. 107-115, 1990.
 11. Chen, L. W. and Ku, D. M., "Stability Analysis of a Timoshenko Beam Subjected to Distributed Follower Forces using Finite Elements," *Computers and Structures*, Vol. 41, pp. 813-819, 1991.
 12. Lee, S. Y., Kuo, Y. H. and Lin, F. Y., "Stability of a Timoshenko Beam resting on a Winkler Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, pp. 193-202, 1992.
 13. Lee, S. Y. and Yang, C. C., "Nonconservative Instability of Non-uniform Beams resting on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, pp. 438-444, 1994.