

초고속 원심분리 회전축계의 최적설계

김종립*, 윤기찬*, 박종권**

An Optimum Design of a Rotor-Bearing Spindle System for a Ultra Centrifuge

Jong-Rip Kim*, Ki-Chan Yoon*, Jong-Kweon Park**

ABSTRACT

This paper presents an optimum design of a rotor-bearing spindle system for a ultra centrifuge (80,000 RPM) supported by ball bearings with nonlinear stiffness characteristics. To obtain the nonlinear bearing stiffnesses, a ball bearing is modeled in five degrees of freedom and is analyzed quasi-statically. The dynamic behaviors of the nonlinear rotor-bearing system are analyzed by using a transfer-matrix method iteratively. For optimization, we use the cost function that simultaneously minimizes the weight of a rotor and maximizes the separation margins to yield the critical speeds as far from the operating speed as possible. Augmented Lagrange Multiplier (ALM) method is employed for the nonlinear optimization problem. The result shows that the rotor-bearing spindle system is optimized to obtain 9.5% weight reduction and 21 % separation margin.

Key Words : Ultra centrifuge(초고속 원심분리기), Critical speed (임계속도), Natural frequency(고유진동수), Nonlinear bearing stiffness(비선형 베어링 강성), Optimum design (최적설계), Separation margin (분리여유)

1. 서론

원심분리기는 성분분석, 종자개발, 신소재개발, 원료의 분리정제 등에 이용되는 중요한 분석장비로 다양한 기초 연구 및 응용 산업 분야에서 널리 사용되고 있다⁽¹⁾. 원심분리기는 과학기술 및 산업발전과 밀접한 관계를 갖고 있으며 고도의 초고속 회전기술을 요하는 장비로 초고속 회전축계의 대표적인 예이다. 원심분리기의 분해능은 최대

허용 회전수의 함수로 이를 높이기 위한 연구가 계속되고 있다. 고속에서 안전하게 작동됨과 동시에 우수한 분리특성을 보장하기 위해서는 원심분리기의 회전자-베어링 시스템을 회전체동역학적(Rotordynamic)인 관점에서 설계함이 필요하다. 특히, 고속에서 회전자를 지지하는 구름베어링은 회전속도에 따른 현격한 강성 변화를 수반하고, 이는 축계의 동적 거동에 영향을 미치기 때문에 고속 회전자-베어링 시스템의 거동 해석시에는 베어링의 비선

* 한양대학교 대학원 기계설계학과
** 한국기계연구원 공작기계그룹

형 강성변화를 고려해야 한다. 원심분리기는 정격속도에 도달하기까지 몇 개의 임계속도(Critical speed)를 통과하게 된다. 그러므로 정격속도에서의 유해한 불균형응답을 효과적으로 억제시키거나 배제시키기 위해서는 최적화 기법을 이용한 최적설계가 필수적이라 할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 전달행렬법을 이용하여 베어링의 회전속도에 따른 강성변화를 고려한 고속회전축계의 동특성해석을 수행하고, 또한 정격속도(80,000~100,000 rpm) 범위에서 임계속도를 안전하게 통과하도록 분리여유를 극대화시킴과 동시에 회전자 시스템의 중량을 최소화하기 위한 최적설계를 수행하고자 한다.

2. 원심분리구동계의 회전자-베어링 시스템

Fig. 1은 모터, 2개의 지지 베어링, 유연축(Slender shaft), 부착 어댑터, 원심분리 회전자로 구성된 전형적인 원심분리기 회전자-베어링 시스템의 개략도이다. Fig.

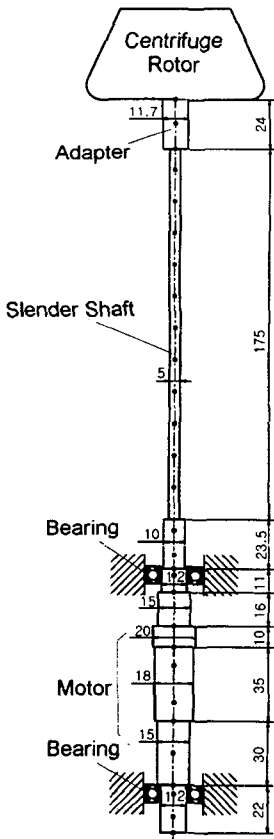


Fig. 1 A schematic of the ultra-centrifuge rotor-bearing system

1에서 보는 바와 같이 원심분리기는 정격속도에 도달하기 전에 나타나는 유해한 불균형응답을 효과적으로 억제시키기 위하여 고속에서 회전자의 질량중심이 회전축에 가능한 근접하도록 하거나, 고차모드에서 회전자를 가능한 한 절점에 위치하도록 하기 위해 무거운 분리회전자에 초유연축을 채택하고 있다. 또한 구름 베어링의 회전속도 한계를 극복하기 위하여, 전동체 재질이 세라믹(Si₃N₄)인 하이브리드(Hybrid) 타입의 앵글러 컨택 볼 베어링(Angular contact ball bearing)을 채택하고 있다.

3. 베어링의 강성해석

구름베어링은 기계적인 단순함에도 불구하고 운전조건에 따른 거동은 상당히 복잡한 양상을 나타낸다. 특히, 고속회전을 하는 볼 베어링의 경우, 전동체의 원심력과 마이크로스코픽 모우먼트는 전동체 접촉각, 변위, 하중 분포 등과 같은 베어링의 거동에 지대한 영향을 미친다⁽²⁾⁽³⁾. 따라서, 저속상태에서의 정적해석만으로는 이들의 영향을 충분히 고려할 수 없기 때문에 접촉각, 변위, 하중 분포에 따라 결정되는 구름 베어링의 강성 계산을 위하여 Fig. 2에서와 같이 5자유도로 모델링하여 식 (1)의 하중과 식 (2)의 베어링 내륜 중심의 변위량과의 관계식을 유도하여 준정적해석(Quasi-static analysis)을 통한 베어링의 동적 강성 변화를 해석하였다.⁽⁴⁾⁽⁵⁾

$$\underline{F} = \{F_x^b, F_y^b, F_z^b, M_y^b, M_z^b\}^T \quad (1)$$

$$\underline{r}^b = \{x^b, y^b, z^b, \theta_y^b, \theta_z^b\}^T \quad (2)$$

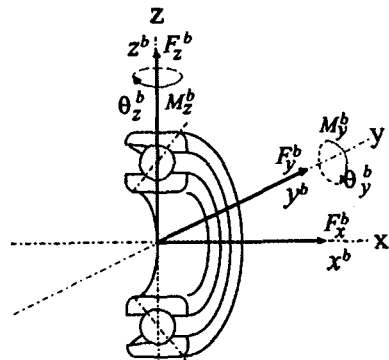


Fig. 2 Loads and displacements of a ball bearing

회전속도에 따라 변하는 볼 베어링의 강성을 구하기 위한 흐름도는 Fig. 3과 같으며, 삼첨자 I는 초기치, ϵ 는 수렴을 위하여 주어진 허용치이다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 먼저 베어링의 형상, 재질, 하중 및 운전 조건과 같은 데이터가 지정되고, 베어링의 내륜 중심의 변형량과 모든 볼 위치에서 내륜과 외륜의 초기 접촉각들을 자유 접촉각(Free contact angle)으로 설정하여 가정한 후, 주어진 초기 접촉각을 이용하여 하중-변형 인자 (K_{iq}, K_{op}), 볼 요소의 원심력 (F_{Cq})과 자이로스코픽 모우먼트 (M_{Gq})를 계산한다. 이들 값을 이용하여 볼의 기하학적 관계식과 힘 평형 방정식으로 표현되는 비선형 연립 방정식을 해석함으로써 각 볼의 내륜과 외륜에서 발생하는 접촉각과 접촉 하중을 구할 수 있으며, 이를 베어링의 힘 평형 방정식에 대입하여 개선된 베어링 내륜 중심의 변형량을 구할 수 있다⁽⁶⁾. 이때, 개선된 베어링의 변형량과 전 상태 값과의 차이가 주어진 허용치 범위내에 있는가를 확인한 후, 이를 만족하지 못하면 수렴될 때까지 상기의 계산 과정을 반복하게 된다. 그런 후, 수렴되어 계산된 각 궤도들에서의 접촉각과 초기 가정된 접촉각과

의 차이를 계산하여 그 값이 주어진 허용 범위내에 있는지를 조사한다. 만약, 허용 범위내에 존재하지 않는다면 현재의 접촉각을 초기값으로 치환하여 전체의 계산 과정이 수렴할 때까지 반복된다. 이상과 같은 과정으로 계산된 베어링 내륜 중심의 변형량, 접촉각, 접촉 하중을 식 (3)에 대입함으로써 베어링의 강성을 계산할 수 있다.⁽⁷⁾⁽⁸⁾

$$K^b = \left[\frac{\partial F_x^b}{\partial r_x^b} \quad \frac{\partial F_y^b}{\partial r_y^b} \quad \frac{\partial F_z^b}{\partial r_z^b} \quad \frac{\partial M_y^b}{\partial r_x^b} \quad \frac{\partial M_z^b}{\partial r_x^b} \right]^T \quad (3)$$

원심분리기 회전축계에 적용한 베어링의 제원 및 재료의 기계적 물성치는 Table 1 및 Table 2 와 같다.

Table 1 Ball bearing specification

Bearing Type	ACBB (Hybrid type)
Boundary Dimension	d12 × D28 × B8 (mm)
Pitch Circle Dia.	20 (mm)
Ball Dia. (Si ₃ N ₄)	4.762 (mm)
Number of Balls	10 (EA)
Initial Contact Angle	15°
Groove Radius of OR	0.54 × Ball Dia. (mm)
Groove Radius of IR	0.52 × Ball Dia. (mm)
Pre-load	21 (N)

Table 2 Material properties of the bearing

	Ring (SAE 52100)	Ball (Si ₃ N ₄)
Young's Modulus [MPa]	210,000	315,000
Poisson's Ratio	0.3	0.26
Density [Kg/m ³]	7800	3190

Fig. 4는 속도변화에 따른 반경방향 및 회전방향의 강성 변화를 도시한 것으로서 회전속도가 증가함에 따라 강성변화가 현저함을 알 수 있다. 회전속도에 따른 강성변화는 전동체에 작용하는 원심력과 자이로스코픽 모우먼트가 내륜과 외륜에서 발생하는 접촉각과 접촉 하중에 영향을 미치기 때문이다. 따라서 고속회전 축계의 동특성 해석시에는 이들 강성변화를 함께 고려하는 것이 타당하다⁽⁹⁾.

4. 회전체 동역학 해석

본 연구에서는 회전자-베어링 시스템의 동특성 해석을

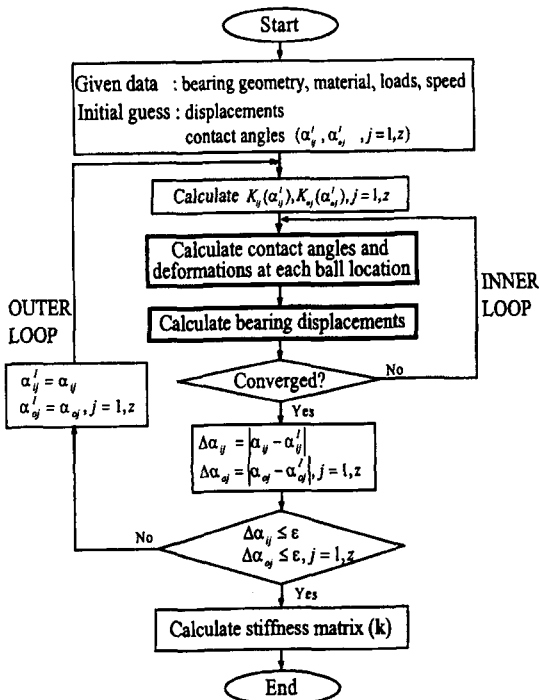


Fig. 3 Flow chart for ball bearing analysis

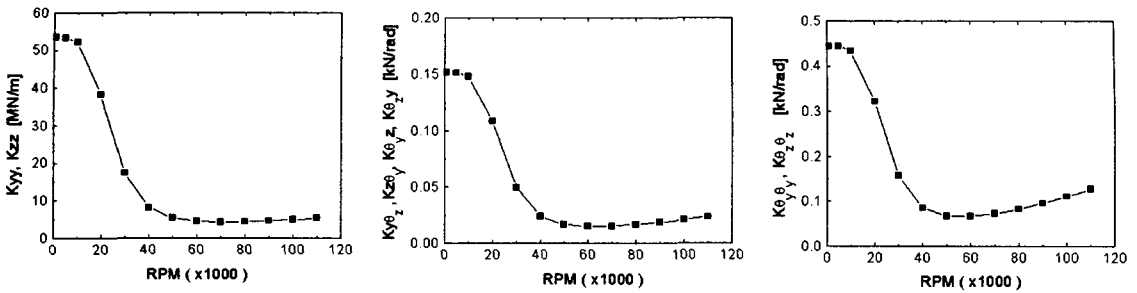


Fig. 4 Dynamic stiffnesses as a function of operating speed

위하여 전달 행렬법을 사용하였다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 전달행렬법은 회전자 시스템을 관성집중법(Lumping method)을 이용하여 등가 처리한 N개의 집중질량과 관성이 없는 축으로 모델링 한다⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾.

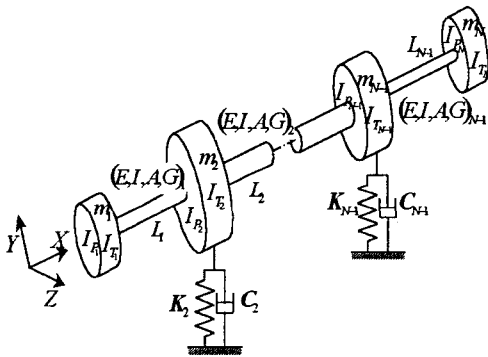


Fig. 5 A rotor-bearing system model for transfer matrix method

여기서, 집중 질량 부분의 m , I_y 와 I_z 는 각각 질량, 횡관성 모멘트와 극관성 모멘트를 나타내며, 관성이 없는 축 부분의 E, I, A, G 및 L 은 각각 탄성계수, 면적 모멘트, 단면 면적, 종탄성 계수 및 길이를 나타내고, 베어링 요소는 각각 등가 처리된 강성 행렬(K)과 감쇠 행렬(C)로 표현되며, 하첨자는 station의 위치를 가리킨다.

전달행렬법은 알고 있는 상태변수(변위, 기울기, 전달력, 모멘트) Z_n 을 이용하여, 전달행렬에 의해 다른 한쪽의 상태변수 Z_{n+1} 를 결정하며, 만일 1번 station의 상태변수를 알고 있을 때 2번 station의 상태변수는 식 (4)와 같이 표현된다. 둘 이상의 station에 대하여 단순한 행렬연산으로 구할 수 있으며, 식 (5)와 같은 형태로 표현된다.

$$Z_2 = [T]_1 Z_1 \tag{4}$$

$$Z_4 = [T]_3 [T]_2 [T]_1 Z_1 \tag{5}$$

동일한 방법으로, 전체 시스템에 대하여 각 station의 전달 행렬을 이용하여 시스템 전체 전달 행렬(T)을 얻을 수 있으며, 이를 이용하여 식 (6)과 같이 양 끝단의 관계를 얻을 수 있다.

$$Z_N = [T] Z_1 \tag{6}$$

식 (6)과 같이 얻은 전체 전달행렬에 양단의 경계조건을 적용하여 고유진동수를 구할 수 있으며, 이를 이용하여 각 station에서의 상태변수 값 및 모드 형상을 구할 수 있다⁽¹²⁾.

Fig. 6는 원심분리기 회전축계의 전달행렬 모델링 형상이며, 주축 부분과 유연축을 합하여 30개의 station으로 나누었다⁽¹³⁾. Table 3은 각각의 station에 대한 데이터를 보여주고 있다. Fig. 7은 Table 3의 데이터를 이용하여 해석한 결과를 보여주고 있으며, 회전속도에 대한 고유진동수(Natural frequency)를 나타낸 것으로 시스템의 정격운전속도내에서 5개의 위험속도를 통과하고 있음을 보여준다. 이때 모드형상은 Fig. 8과 같으며, 유연축 부분에서 많은 휨운동(Bending mode)이 발생되고 있음을 알 수 있고, 1차 모드를 제외한 고차 모드에서는 유연축 끝부분의 집중질량이 회전축에 근접하여 있음을 알 수 있다.

5. 최적설계

볼 베어링의 강성특성 변화를 고려한 시스템의 비선형 동특성 해석 프로그램을 이용하여 시스템에 주어진 구속

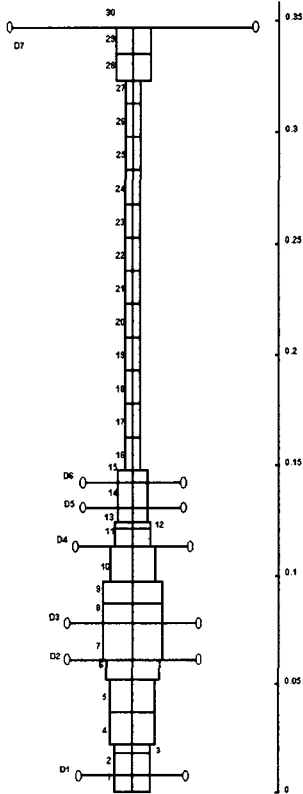


Fig. 6 TMM model of rotor system

Table 3 Station and lumped data for TMM model

Station #	Diameter [mm]	Length [mm]	addition
1	12.00	7.50	
2	12.00	10.50	Disk 1
3	12.00	4.00	Bearing 1
4	15.00	15.00	
5	15.00	15.00	
6	18.00	8.75	
7	18.00	17.50	Disk 2
8	18.00	8.75	Disk 3
9	20.00	10.00	
10	15.00	16.00	
11	12.00	8.00	Disk 4
12	12.00	3.00	
13	10.00	6.50	
14	10.00	11.50	Disk 5
15	10.00	5.50	Disk 6
16~26	5.00	15.00	
27	5.00	10.00	
28	11.70	12.00	
29	11.70	12.00	
30			Disk 7
Disk #	Mass [kg]	I_f [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]	I_T [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
1	1.97×10^{-2}	1.34×10^{-6}	9.26×10^{-7}
2, 3	5.79×10^{-2}	9.76×10^{-6}	6.36×10^{-6}
4	3.60×10^{-3}	1.93×10^{-7}	1.01×10^{-7}
5	1.45×10^{-2}	7.67×10^{-7}	5.16×10^{-7}
6	2.31×10^{-2}	1.56×10^{-6}	1.01×10^{-6}
7	4.55	1.03×10^{-2}	1.32×10^{-2}

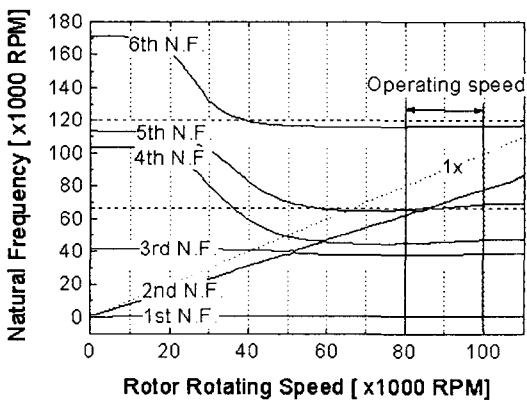


Fig. 7 Natural frequencies as a function of rotating speed.

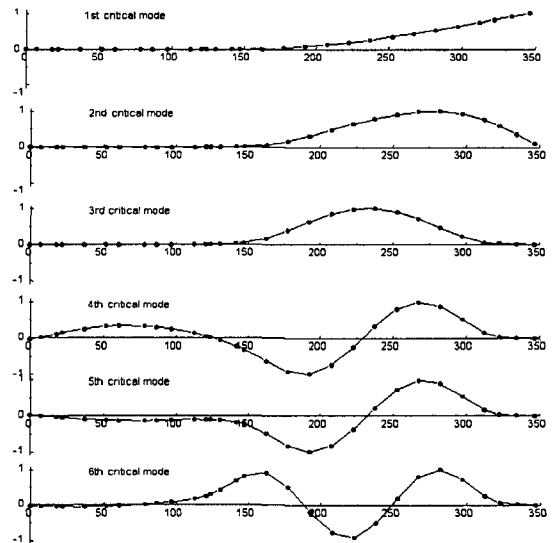


Fig. 8 Mode shapes

조건을 만족하면서 회전축계의 중량을 최소화하고 분리 여유는 최대화 시키도록 하는 최적 설계를 수행하였다.

5.1 최적설계 문제의 정의

회전축의 중량을 최소화하고 분리여유를 최대화하는 목적함수는 식 (7)과 같이 표현될 수 있다. 여기서 분리여유란 정격운전속도 범위에서 위험속도를 가급적이면 멀리 회피시키기 위하여 정의한 것이다. 식 (7)에서 W 와 β 는 각각 회전축의 중량과 분리여유이며 하첨자 0는 기준치를 의미한다. 여기에서 W_0 는 초기치에서 구한 회전축의 중량이며, 초기 분리여유 β_0 는 20%로 하였으며, γ 는 목적함수들 사이의 가중치이다. 최적설계에서 고려한 구속조건은 식 (8)과 같으며, g_1, g_2 는 고유진동수에 관한 구속조건으로 각각 하한 운전속도(80,000 rpm)에서 계산된 5번째 고유진동수에 분리여유를 고려한 값이 하한 운전속도를 초과해서는 안되며, 상한 운전속도 (100,000 rpm)에서 계산된 6번째 고유진동수가 상한 운전속도에 분리여유를 고려한 값보다 커야됨을 나타낸다. g_3, g_4, g_5, g_6 은 원심분리기 시스템의 변경 가능한 기하학적 치수로 변경 가능한 폭이 상당히 제한적이다. 설계변수 (Design variables)로는 4, 5, 9와 10번째 축 요소와 유연축의 외경과 길이 및 분리여유를 택하였다.

Minimize

$$\sqrt{\gamma \cdot \left(\frac{W}{W_0}\right)^2 + (1-\gamma) \cdot \left(\frac{\beta_0}{\beta}\right)^2} \quad (7)$$

subject to

$$\begin{aligned} g_1 &= (1 + \beta) \frac{[\omega_5]_{\Omega_{80,000}}}{80,000} - 1 < 0, \\ g_2 &= 1 - \frac{[\omega_6]_{\Omega_{100,000}}}{(1 + \beta) \cdot 100,000} < 0, \\ g_3 &= 1 - \frac{L_4 + L_5}{29} < 0, \\ g_4 &= \frac{L_4 + L_5}{31} - 1 < 0, \\ g_5 &= 1 - \frac{L_9 + L_{10}}{25} < 0, \\ g_6 &= 1 - \frac{L_9 + L_{10}}{27} - 1 < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

5.2 최적설계 프로그램 흐름도

최적화문제를 풀기 위하여 적용된 알고리즘은 ALM(Augmented Lagrange Multiplier)방법을 이용

하였고, 여기서 수렴방향(Decent direction)과 최적해를 찾아가는 방법(Line search)은 BFGS (Broyden Fletcher Goldfarb Shanno)와 PAM(Polynomial Approximation Method)을 적용하였으며⁽¹⁴⁾, 이를 토대로 본 연구에서 제안된 고속 회전축계에 대한 최적설계 프로그램은 회전자-베어링 시스템의 동특성해석 모듈과 최적화 모듈이 결합되어 이루어진 Fig. 9의 흐름도로 설명된다. 즉 Fig. 9에서 보는 바와 같이 시스템의 재원이 주어지고 최적설계를 위한 초기설계변수 (b^1)가 정의되면 이로부터 주어진 최적설계 문제가 수렴하여 설계변수의 최적치 (b^*)를 얻을 때까지 최적화 모듈은 모든 설계변수 영역내에서 반복적인 탐색작업을 수행하게 된다. 최적화 과정이 진행되는 동안 개선된 설계변수들 (b)은 해석 모듈에 전달되며, 이를 전달 받은 해석모듈은 목적함수 [$f(b)$]와 구속조건 [$g(b)$]의 계산에 필요한 여러 상태량들을 결정해주게 된다.

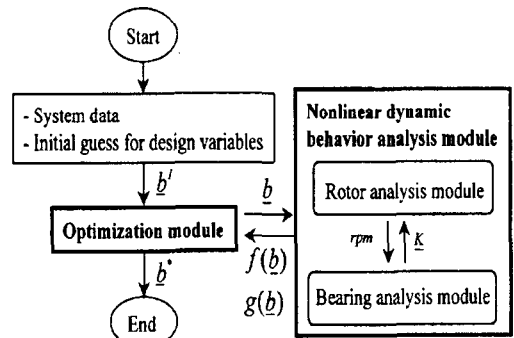


Fig. 9 Overall procedure of the optimal design program

5.3 최적설계 결과 및 고찰

5.1절에서 정의된 원심분리기 회전자-베어링 시스템의 최적설계 문제를 풀기 위하여 5.2절의 설계 프로그램을 적용하여 최적화를 수행하였으며, 이 경우 가중치(γ)는 0.6을 사용하였다.

설계변수 초기치로는 원심분리기 시작품의 치수를 사용하였으며, 기 가공된 부품과의 호환성 관계를 고려하여 설계변수 변화의 폭이 지극히 제한적이라는 점을 고려한다면, 최적 설계 결과는 만족할 만하다고 할 수 있다. Table 4와 5 및 Fig. 10은 최적설계를 수행한 결과를 나타내고 있으며, 이중에 Table 4는 설계변수의 상·하한 조건과 초기치 및 최적치를 보여주고 있고, Table 5는 초

기치와 최적치에 대한 임계속도의 변화를 보여주고 있다. 그리고 Fig. 10에서 보는 바와 같이 초기설계치의 결과에서 운전속도 영역의 상한 20% 범위내에 존재하던 6번째 고유진동수가 최적화 과정을 수행한 후 안전한 영역으로 옮겨져 있음을 알 수 있다.

Table 4 Initial and optimum design variable changes at the weighting factor 0.6

design variables	lower bound	initial value	optimum value	upper bound
r_{04} (mm)	6.5	7.5	6.50	9.5
r_{05} (mm)	6.5	7.5	6.50	9.5
r_{09} (mm)	9.0	12.0	9.00	12.0
r_{010} (mm)	6.5	7.5	6.50	9.5
$r_{0bearing}$ (mm)	1.5	2.5	2.52	3.25
L_4 (mm)	14.0	15.0	14.50	16.0
L_6 (mm)	14.0	15.0	14.50	16.0
L_9 (mm)	9.0	10.0	9.03	11.0
L_{10} (mm)	15.0	16.0	16.00	17.0
$L_{bearing}$ (mm)	75.0	175.0	171.84	200.0
β (%)	15.0	20.0	21.07	90.0

Table 5 Initial and optimum critical speed values

	Initial	Optimum
1st Critical	220 rpm	217 rpm
2nd Critical	2,590 rpm	2,610 rpm
3rd Critical	45,100 rpm	42,090 rpm
4th Critical	50,400 rpm	50,160 rpm
5th Critical	63,500 rpm	66,310 rpm
6th Critical	121,000 rpm	125,000 rpm

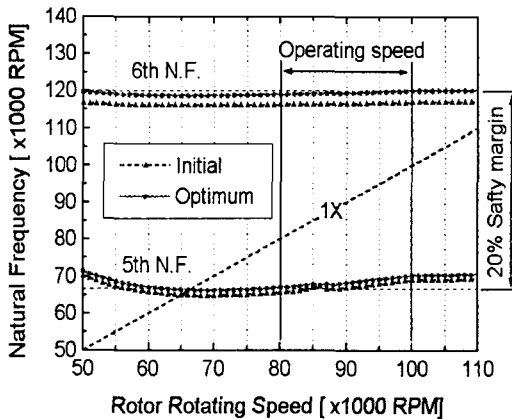


Fig. 10 5th and 6th natural frequencies of rotor-bearing system at the initial and optimal design

6. 결 론

본 연구에서는 비선형 강성특성을 갖는 구름 베어링으로 지지된 회전자-베어링 시스템의 동특성을 고려한 최적설계를 수행하였으며, 연구결과 주요사항을 요약하면 다음과 같다.

1) 원심분리기 회전축계를 지지하는 볼 베어링의 강성 특성은 정격속도에서 현저한 저하를 나타냄을 확인할 수 있었으며, 이에의해 고속 회전축계를 지지하는 볼 베어링의 특성은 선형 스프링으로 모델링하는 데는 한계가 있고, 특히 고속으로 회전되는 시스템의 경우, 정확한 동특성 해석을 위하여는 베어링의 비선형 강성 특성이 고려되어야 함을 확인할 수 있었다.

2) 최적화 기법을 이용하여 지지 베어링의 강성 특성 변화를 고려한 회전자-베어링 시스템의 중량 최적설계를 실시한 결과 초기설계치 대비 약 9.5%의 중량이 감소한 결과를 얻을 수 있었으며, 아울러 정격운전속도(80,000 ~ 100,000 rpm)에 안전계수($\pm 20\%$)를 고려한 안전한 범위내에서 고유진동수가 존재하지 않도록 하여 분리여유를 충분히 확보할 수 있는 최적의 설계치수를 제안하였다.

따라서, 본 연구 결과는 구름 베어링으로 지지되어 비선형 특성을 갖는 초고속 원심분리 시스템의 설계제작에 직접적으로 이용할 수 있으며, 나아가 공작기계, 산업기계 등의 분야에서 초고속으로 운전되는 회전축계의 설계 기술에도 활용할 수 있다.

후 기

본 연구는 서울대학교 터보·동력기계연구센터를 통한 한국과학재단 우수연구센터 지원금의 일부 지원에 의해서 수행되었으며, 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

1. 박종권, "초고속 원심분리시스템의 설계 및 제작기술 연구," 통상산업부 연구보고서, BSM051-367M, 1996.
2. Harris, T. A., "Rolling Bearing Analysis : 3rd Edition," John Wiley & Sons, pp. 395-399, 1991.
3. Jones, A. B., "A General Theory for Elasti-

- cally Constrained Ball and Roller Bearing Under Arbitrary Load and Speed Conditions," *J. of Basic Engineering, Trans. ASME*, Vol. 82, pp. 309-320, 1960.
4. While, M. F., "Rolling Element Bearing Vibration Transfer Characteristics : Effect of stiffness," *J. of Applied Mechanics, Trans. ASME*, Vol. 46, pp. 677-684, 1979.
 5. 이동수, "비선형 강성/감쇠 특성을 고려한 로터-베어링 시스템의 동특성 해석 및 최적설계," 한양대학교 대학원 박사학위 논문, 1996.
 6. Gargiulo, E. P., "A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness," *Machine Design*, Vol. 52, pp. 107-110, 1980.
 7. Lim, T. C. and Singh, R., "Vibration Transmission Through Rolling Element Bearing, Part I : Bearing Stiffness Formulation," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 139, No. 2, pp. 179-199, 1990.
 8. De Mul, J. M., Vree, J. M., and Maas, D. A., "Equilibrium and Associated Load Distribution in Ball and Roller Bearings Loaded in Five Degrees of Freedom While Neglecting Friction - Part I : General theory and Application to Ball Bearings," *J. of Tribology, Trans. ASME*, Vol. 111, pp. 142-148, 1989.
 9. Lee, D.-S. and Choi, D.-H., "Optimum Design of a Flexible Rotor in Ball Bearings with Nonlinear Stiffness Characteristics," *ASME Cogen-Turbo Power Conference*, 95-CTP-25, 1995.
 10. Rao, J. S., "Rotor Dynamics," John Wiley & Sons, 1983.
 11. Vance, J. M., "Rotordynamics of Turbomachinery," John Wiley & Sons, 1988.
 12. Murphy, B. T. and Vance, J. M., "An Improved Method for Calculating Critical Speeds and Rotor dynamics Stability of Turbomachinery," *J. of Engineering for Power, Trans. ASME*, Vol. 105, pp. 591-595, 1983.
 13. Lee, A.-S., Kim, Y.-C. and Park, J.-K., "The Rotordynamics Design of an Ultra-Centrifuge Rotor-Bearing System," *Pacific Conference on Manufacturing '96*, 1996.
 14. Vanderplaats, G. N., "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design : with Applications," McGraw-Hill, New York, 1984.