논 문
한국정밀공학회지 제15권 제5호 (1998년5월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 15. No. 5. May. 1998.

장애물 접촉문제에서의 지역 A Posteriori 오차계산

이 춘 열*

Local A Posteriori Error Estimates for Obstacle Contact Problems

Lee, Choon-Yeol*

ABSTRACT

Differential inequalities occurring in problems of obstacle contact problems are recast into variational inequalities and analyzed by finite element methods. A new a posteriori error estimator, which is essential in adaptive finite element method, is introduced to capture the errors in finite element approximations of these variational inequalities. In order to construct a posteriori error estimates, saddle point problems are introduced using Lagrange parameters and upper bounds are provided. The global upper bound is localized by a special mixed formulation, which leads to upper bounds of the element errors. A numerical experiment is performed on an obstacle contact problem to check the effectivity index both in a local and a global sense.

Key Words : Variational Inequalities(변분 부등식), Finite Element Approximation(유한요소근사식), A Posteriori Error(해석후 오차), Minimization Problem(최소화 문제), Error Estimation(오차계산)

1. 서 론

먼저 경계 $\partial\Omega$가 리프지쯔(Lipschitz) 조건[1]을 만족하는 2차원 개방영역 Ω에서 정의된 다음과 같은 비선형 미분부등식을 생각해보자.

$$-\Delta u \geq f \quad in\ \Omega \tag{1}$$

$$u \geq \phi \quad in\ \Omega \tag{2}$$

$$(-\Delta u - f)(u-\phi) = 0 \quad in\ \Omega \tag{3}$$

$$u = g \quad on\ \partial\Omega \tag{4}$$

여기서 ϕ 및 g는 각각 문제의 영역 Ω와 경계 $\partial\Omega$에서 정의되고 입력으로서 주어지는 함수이며 다음 조건을 만족한다.

$$\phi \in C(\Omega),\ \phi \leq 0 \quad on\ \partial\Omega \tag{5}$$

이 방정식은 장애물 접촉문제[2]의 지배 방정식이며 다공매체 유동문제[3]와 탄성체의 접촉 문제[4]에서도 유사한 형태의 지배 방정식이 나타나게된다. 이러한 문제를 해석하는데 있어서 가장 어려운 점은 접촉경계 또는 자유경계를 미리 결정할 수 없다는 점이며 이로 인해 비선형성을 갖게되고 변분부등식 형태로 표현될 수 있다.

본 논문에서는 이러한 미분부등식의 형태로 주어지는 문제에 적응 유한요소법(adaptive finite element method)을 적용하여 해석하고자한다. 적응 유한요소법

* 영남대학교 기계공학과

은 유한요소 해석 후 각각의 요소들에 대한 추가적인 분할(refinement)이 필요할 것인가를 판단하여야하며 이를 위해서는 요소 각각에서의 유한요소 근사해의 오차를 계산할 수 있는 효과적인 지역 오차계산법(local error estimator)이 필수적이다. 유한요소 근사해의 오차를 각각의 유한요소에 대해서 알아내기 위해서는 a posteriori 오차계산방법[5,6]을 사용하게되며 본 논문에서는 먼저 선형 및 비선형 문제에 공통적으로 사용할 수 있는 새로운 a posterior 오차계산법을 소개한다. 또한 이 오차계산법의 정확도를 검증하기 위하여 비선형 미분부등식(non-linear variational inequality)[7,8,9] 형태의 지배방정식으로 표현되는 장애물 접촉문제에 적용하여 수치 실험을 수행하였다.

2. 문제의 Formulation

먼저 식(1)~(5)로 주어지는 문제에 대한 weak 문제를 구하기 위하여 convex 인정 함수 폐집합(closed convex set of admissible functions)을 생각하도록 한다.

$$K \equiv \{v \in H^1(\Omega) | v \ge \phi \ \ in \ \Omega, \ v = g \ \ on \ \partial\Omega\}$$

이제 $\Delta u \in L^2(\Omega)$라 가정하고 식(1)의 양변을 $(u-\phi)$으로 곱한 뒤 문제전체영역 Ω 에 대하여 적분을 수행하면 다음의 결과를 얻게된다.

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)(v-\phi)dx \ge 0 \ \ \forall v \in K \tag{6}$$

또한 식(3)을 전체영역 Ω 에서 적분한다.

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)(u-\phi)dx = 0 \tag{7}$$

여기서 u는 지배방정식을 만족하는 엄밀해이며 v는 인정함수집합 K에 속하는 임의의 함수를 나타낸다. 식(6)에서 식(5)를 빼고 정리하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$\int_\Omega -\Delta u(v-u)dx \ge \int_\Omega f(v-u)dx \tag{8}$$

여기에 $(v-u)$는 $\partial\Omega$에서 0이라는 것과 Green의 공식을 사용하여 부분적분을 수행한다.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \ge \int_\Omega f(v-u)dx \ \ \forall v \in K \tag{9}$$

이제 복선형 형태(bilinear form) $B(\cdot\,,\,\cdot)$,, 선형 범함수(linear functional) $F(\cdot)$, 범함수(functional) $I(\cdot)$를 정의한다.

$$B: K \times K \to R, \quad B(u,v) \equiv \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$F: K \to R, \quad F(v) \equiv \int_\Omega fv \ dx$$

$$I: K \to R, \quad I(v) \equiv \frac{1}{2}B(v,v) - F(v)$$

위의 정의와 식(9)를 이용하면 지배방정식 (1,2,3)은 weak 형태의 변분 부등식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}&Find\ \ u \in K \ \ such \ \ that\\ &B(u, v-u) \ge \ F(v-u) \ \ \forall v \in K\end{aligned} \tag{10}$$

또한 위 식과 동등한 문제로서 최소화문제(minimization problem)를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}&Find\ \ u \in K \ \ such \ \ that\\ &I(u) \le I(v) \ \ \forall v \in K\end{aligned} \tag{11}$$

이제부터는 식(1,2,3)으로 표현되는 특정한 문제뿐만이 아니라 변분부등식 (10)으로 표현될 수 있는 일반적인 모든 문제에 대하여 기술하고자한다. 우선 식(10)과 식(11)에 대한 유한요소 근사식을 구성하기 위하여 요소 Ω_k에서 정의되는 형상함수집합 $P(\Omega_k)$로부터 유한요소부분집합 $V_h \subset H^1(\Omega)$을 정의한다.

$$V_h \equiv \{v_h \in C(\Omega) \mid v_h \in \prod_k P(\Omega_k), \ v_h = g \ \ on \ \partial\Omega\}$$

또한 이를 이용하여 유한 convex 폐부분집합(finite dimensional closed convex subset) 을 정의한다.

$$K_h \equiv \left\{v_h \in V_h \mid v_h \ge \phi\right\}$$

그러므로 식(11)에 대한 유한요소 근사식은 다음과 같이 주어지게 된다.

$$\begin{aligned}&Find\ \ u_h \in K_h \ \ such \ \ that\\ &I(u_h) \le I(v_h) \ \ \forall v_h \in K_h\end{aligned} \tag{12}$$

여기에서 식(12)의 근사해 u_h는 h 가 0에 접근함에 따라 식(11)의 해 u에 수렴하며 이 것은 참고문헌[4]에 증명되어 있다.

3. 오차 계산법

먼저 유한요소 근사해의 오차와 오차가 속하는 집합을 다음과 같이 정의한다.

$$e \equiv u - u_h$$

이제 오차의 energy norm을 다음과 같이 정의한다.

$$\|e\|_E \equiv \sqrt{\int_\Omega \nabla e \cdot \nabla e \ dx}$$

위의 정의를 이용하여 오차의 energy norm에 대한 제한(bound)을 구하기 위하여 다음계산을 수행하도록 한다.

$$\begin{aligned} I(u) - I(u_h) &\equiv \frac{1}{2}B(u,u) - F(u) - \frac{1}{2}B(u_h,u_h) + F(u_h) \\ &= B(u,u-u_h) - F(u-u_h) - B(u,u-u_h) + \frac{1}{2}B(u,u) - \frac{1}{2}B(u_h,u_h) \\ &= B(u,u-u_h) - F(u-u_h) - \frac{1}{2}B(e,e) \end{aligned} \tag{13}$$

여기에서 식 (10)으로부터 다음과 같은 결과를 알 수 있으므로

$$B(u,u-u_h) - F(u-u_h) \le 0 \tag{14}$$

식(13)은 다음과 같이 표현되며

$$I(u) - I(u_h) \le -\frac{1}{2}B(e,e) \tag{15}$$

오차의 energy norm에 대한 상위제한(upper bound)을 얻을 수 있다

$$\|e\|_E^2 = B(e,e) \le -2\{I(u) - I(u_h)\} \tag{16}$$

이렇게 구해진 오차의 제한은 영역전제의 값(global error)이므로 각각의 유한요소에서의 지역 오차(local error)를 구하기 위하여 형상함수가 요소간의 경계에서 불연속을 가질 수 있도록 한다. 이를 위하여 각각의 유한요소 Ω_k에서 요소간의 경계에서 불연속을 갖는 인정함수 집합 $\hat{K}_k$와 $\hat{K}$을 정의한다.

$$\hat{K}_k \equiv \{w \in H^1(\Omega) | w \ge \phi \ in \ \Omega_k, \ w = g \ on \ \partial\Omega_k \cap \partial\Omega\}$$

$$\hat{K} \equiv \prod_k \hat{K}_k$$

또한 요소 Ω_k와 Ω_l의 경계에서의 단위 법선 벡터를 각각 $\boldsymbol{n}_k$, $\boldsymbol{n}_l$라 할 때 이 두 요소의 공통경계 Γ_{kl}에서의 단위 법선 벡터 $\boldsymbol{n}_{kl}$을 정의하자.

$$\boldsymbol{n}_{kl} \equiv \begin{Bmatrix} \boldsymbol{n}_k & if \ k > l \\ \boldsymbol{n}_l & if \ k < l \end{Bmatrix}$$

이 공통경계 Γ_{kl}에서 발생하는 불연속의 차이(jump)와 평균값(average)을 다음과 같이 정의한다.

$$[w]_{kl} \equiv \begin{Bmatrix} w|_{\Omega_k} - w|_{\Omega_l} & if \ k > l \\ w|_{\Omega_l} - w|_{\Omega_k} & if \ k < l \end{Bmatrix} \tag{17}$$

$$< w >_{kl} \equiv \frac{1}{2}(w|_{\Omega_k} + w|_{\Omega_l}) \tag{18}$$

이제 이러한 정의들로부터 요소간의 경계에서 형상함수의 불연속에 대해 Lagrangian을 취하도록 한다.

$$\begin{aligned} &L : \hat{K} \times R \to R \\ &L(w,\mu) \equiv I(w) - I(u_h) \\ &-\sum_{\Gamma_{kl}} \int_{\Gamma_{kl}} \mu(s)[w - u_h]_{kl} ds \end{aligned} \tag{19}$$

이때 $w - u_h$가 요소경계에서 연속이면 (또는 $[w - u_h]_{kl} = 0$ 이면) $L(w,\mu) = I(w) - I(u_h)$임을 알 수 있다.

이제 식(16)과 (19)를 사용하여 다음과 같이 안장형문제(saddle point problem) 을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|e\|_E^2 &\le -\{I(u) - I(u_h)\} \\ &= -\inf_{w \in K}\{I(w) - I(u_h)\} \\ &= -\inf_{w \in \hat{K}} \sup_{\mu \in R} L(w,\mu) \\ &\le -\sup_{\mu \in R} \inf_{w \in \hat{K}} L(w,\mu) \\ &\le -\inf_{w \in \hat{K}} L(w,\mu) \ \ \forall \mu \in R \end{aligned} \tag{20}$$

위의 결과를 각각의 유한요소에 대해 적용하기 위하여 요소경계에서의 다음과 같은 등식을 생각하도록 한다.

$$\sum_k \int_{\partial\Omega_k \backslash \partial\Omega} <\nabla u_h>_{kl} \cdot \boldsymbol{n}_k (w-u_h) ds$$
$$= \sum_{\Gamma_{kl}} \int_{\Gamma_{kl}} <\nabla u_h>_{kl} \cdot \boldsymbol{n}_{kl} [w-u_h]_{kl} ds \qquad (21)$$

위의 등식을 사용하면 Lagrangian $L(w,\mu)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L(w,\mu) = \frac{1}{2}B(w,w) - F(w) - \frac{1}{2}B(u_h,u_h) + F(u_h) - \sum_k \int_{\partial\Omega_k \backslash \partial\Omega} <\nabla u_h>_{kl} \cdot \boldsymbol{n}_k (w-u_h) ds + \sum_{\Gamma_{kl}} \int_{\Gamma_{kl}} <\nabla u_h>_{kl} \cdot \boldsymbol{n}_{kl} [w-u_h]_{kl} ds$$

위 식을 간단히 표현하기 위하여 유한요소 Ω_k 에서 범함수 $I_k(w)$를 정의한다.

$$I_k(w) \equiv \frac{1}{2}\int_{\Omega_k} \nabla w \cdot \nabla w \; dx - \int_{\Omega_k} f(x) w \; dx - \sum_k \int_{\partial\Omega_k \backslash \partial\Omega} <\nabla u_h>_{kl} \cdot \boldsymbol{n}_k w \; ds$$

그러면 Lagrangian $L(w,\mu)$는 다음과 같이 나타내어진다.

$$L(w,\mu) = \sum_k \{I_k(w) - I_k(u_h)\} - \sum_{\Gamma_{kl}} \int_{\Gamma_{kl}} \{\mu - <\nabla u_h>_{kl} \cdot \boldsymbol{n}_{kl}\} [w-u_h]_{kl} ds \qquad (22)$$

여기서 $[w-u_h]_{kl}$을 포함하는 couple 된 항을 없애기 위하여 Lagrange 매개변수 μ 를 요소간 평균값으로 취한다.

$$\mu = <\nabla u_h>_{kl} \cdot \boldsymbol{n}_{kl} \qquad (23)$$

이제 식(21)과 (22)를 사용하면 오차의 제한은 다음과 같이 얻어지게된다.

$$\|e\|_E^2 \le -2 \inf_{w \in \hat{K}} \sum_k \{I_k(w) - I(u_h)\} \qquad (24)$$

그러므로 이 오차의 제한은 다음과 같은 각각의 요소에서의 지역 최소화문제를 통하여 얻을 수 있게된다.

$$\textit{Find} \;\; \hat{w}_k \in \hat{K}_k \;\; \textit{such that}$$
$$I_k(\hat{w}_k) \le I_k(w_k) \;\; \forall w_k \in \hat{K}_k$$

이러한 지역문제는 형식적으로는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} -\Delta w_k &\ge f && in\ \Omega_k \\ w_k &\ge \phi && in\ \Omega_k \\ (-\Delta w_k - f)(w_k - \phi) &= 0 && in\ \Omega_k \end{aligned}$$
$$\frac{\partial w_k}{\partial n} = \begin{cases} <\nabla u_h>_{kl} \cdot \boldsymbol{n}_{kl} & on\ \partial\Omega_k \backslash \partial\Omega \\ 0 & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

이제 이문제의 해 $\hat{w}_k$ 를 각각의 요소에서 구하면 영역전체에서의 오차의 제한은 다음과 같이 주어지게 된다.

$$\|e\|_E^2 \le -2\sum_k \{I_k(\hat{w}_k) - I(u_h)\} \qquad (25)$$

이제 식(25)를 사용하여 전체오차(global error)를 다음과 같이 정의한다.

$$\varepsilon = \sqrt{-2\sum_k \{I_k(\hat{w}_k) - I(u_h)\}} \qquad (26)$$

또한 여기서 주목해야할 것은 식(15)에서의 전체적인 문제가 요소 각각의 지역문제들로 나뉘어졌다는 점이며 전체영역에서의 오차는 지역문제에서 구한 오차의 합으로 표현된다는 것이다. 이로써 요소 Ω_k에서의 지역오차는 다음과 같이 정의하며 전체오차는 이렇게 정의된 지역오차로부터 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\varepsilon_k = \sqrt{-2\{I_k(\hat{w}_k) - I(u_h)\}} \qquad (27)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_k \varepsilon_k^2} \qquad (28)$$

4. 수치해석

전술된 오차계산법의 정확도를 확인하기 위하여 Fig.1에 나타난 바와 같이 얇은 막이 장애물에 접촉하는 문제를 해석하였다. 본문제의 영역은 Fig.2에 나타나있으며 지배방정식과 경계조건은 식(1)~(5)의 형태이고 다음과 같다.

지배방정식

$$-\Delta u \geq -1 \qquad in\ \Omega$$
$$u \geq 0 \qquad in\ \Omega$$
$$(-\Delta u+1)\ u = 0 \qquad in\ \Omega$$

경계조건

구간 AB :

$$u=\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{(x+1)^2}{2}\right\}$$

구간 AC :

$$u=\frac{1+y^2}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1+y^2}{2}\right\}$$

구간 CD, BD :

$$u = 0$$

위의 지배방정식과 경계조건에 대하여 다음과 같은 엄밀해가 존재한다

$$u=\frac{(x+1)^2+y^2}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{(x+1)^2+y^2}{2}\right\}$$

이 문제는 전술한 바와 같이 비선형 변분부등식의 형태로 표현될 수 있으며 이렇게 주어진 변분부등식에 대하여 유한요소해석을 수행하였다. 유한요소 해석에서는 문제의 대칭성을 이용하여 위쪽 반의 영역만을 해석하였으며 사용된 유한요소는 제한 절점(constrained node)을 사용하지 않아도 지역적인 분할이 항상 가능하며 문제영역 내에서 조건식 $v_h \geq \phi$ 를 만족하기 용이한 삼각형 선형 유한요소이다. Fig.3~6에는 전체문제를 풀기 위한 삼각형요소가 유한요소의 크기가 세분화됨에 따라 나타나 있으며 이등변 직각삼각형의 직교하는 한 변의 길이를 유한요소의 크기 매개변수 h로 택하였으며 요소의 번호는 좌측 아래에서 오른쪽으로 진행하며 위쪽으로 가면서 주어졌다. Fig.3~6에 나타난 각각의 삼각형요소에 대하여 전술한 바와 같이 지역문제를 정의하였으며 주어진 변분부등식을 풀기 위하여 전체문제 및 지역문제에 모두 projected SOR (successive over-relaxation) 방법을 사용하였다. 전체 효과지수(global effectivity index) η 와 지역 효과지수(local effectivity index) η_k 는 각각의 지역문제에서 계산된 지역오차 ε_k와 실제유한요소 근사해의 오차 $\|u-u_h\|_{E,\Omega_k}$ 의 비로써 다음과 같이 정의되며 효과지수가 1이 될 때 오차계산은 가장 정확한 것을 의미한다.

$$\eta \equiv \left[\frac{\sum_k \varepsilon_k^2}{\sum_k \|u-u_h\|^2_{E,\Omega_k}}\right]^{1/2}$$

$$\eta_k \equiv \frac{\varepsilon_k}{\|u-u_h\|_{E,\Omega_k}}$$

지역문제에서는 지역분할(local refinement)에 따른 효과지수의 영향을 보기 위하여 Fig.7에 나타난 바와 같이 세 종류의 지역분할을 적용하였으며 여기에서 refinement 0 는 추가적인 지역분할 없이 지역문제를 해석한 것이다.

Fig.8에는 영역 전체에서의 전체효과지수의 지역분할에 따른 변화가 나타나있으며 Fig9~12에는 각각의 요소에서의 효과지수의 분포가 요소번호 및 지역분할에 따라 나타나 있다. 여기서 주의할 점은 요소번호는 임의로 주어져 있으므로 요소번호에 따르는 변화는 의미가 없으며 지역오차의 효과지수가 0으로 표시되는 요소는 그 요소에서의 엄밀오차가 0임을 의미한다.

5. 결 론

선형문제에 대해서는 이상과 같이 소개한 방법보다는 간단한 방법을 통하여 식(28) 형태의 오차계산법을 구할 수가 있으며 선형문제에서는 이러한 오차계산법이 상당히 효과적인 것으로 나타나있다.(12) 그러나 본 논문에서는 이러한 방법을 일반화하여 비선형 문제에까지 적용할 수 있는 보다 일반적인 오차계산법을 개발하였으며 이것은 물론 기본적인 선형문제에도 적용 가능하다. 이 오차계산법의 정확성을 수치적인 실험을 통하여 검증하기 위하여 비선형 미분방정식 형태의 장애물 접촉문제에 대하여 수치해석을 수행하였으며 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 소개된 오차계산 결과는 전체효과지수가 0.7에서 1.5사이의 값을 갖는 것을 알 수 있으며 참고문헌 [5,6,10]에서 소개된 오차계산법의 결과와 비교하여 볼 때 낮은 수준의 값이다. 이로써 본 논문에서 소개된 오차계산법은 상당히 효과 적인 것을 알 수 있다.

2. 적응유한요소법을 사용하기 위하여는 전체효과지수

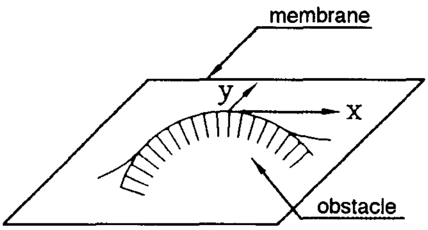

Fig. 1 A Membrane in Contact with an Obstacle

보다는 각각의 요소에서의 지역효과지수가 고르게 나타나는 것이 중요하다. 그래야만 비로소 적응격자가 필요한 요소를 판단할 수 있기 때문이며 본 논문에 소개된 지역오차계산법은 요소각각에서의 지역효과지수가 1.0 에서 2.0 사이의 값을 가지고 있고 지역분할을 많이 할수록 이 값의 분포가 균일해짐을 알 수 있다. 그러므로 소개된 오차계산법은 적응유한요소법에 적합함을 알 수 있다.

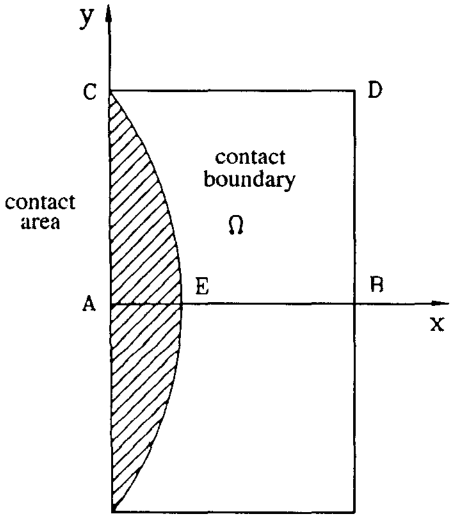

Fig. 2 Configuration of the Obstacle Contact Problem

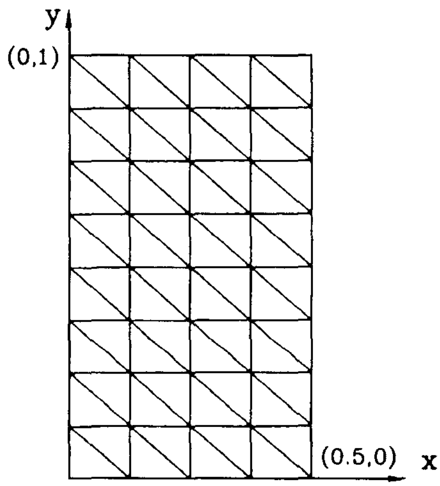

Fig. 4 Finite Element Mesh Used for the Contact Problem (h=1/8)

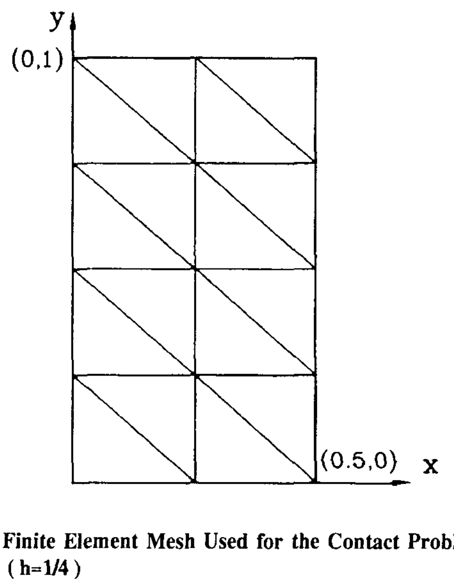

Fig. 3 Finite Element Mesh Used for the Contact Problem (h=1/4)

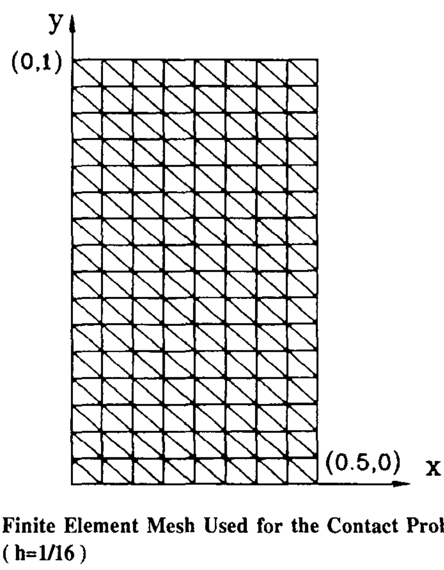

Fig. 5 Finite Element Mesh Used for the Contact Problem (h=1/16)

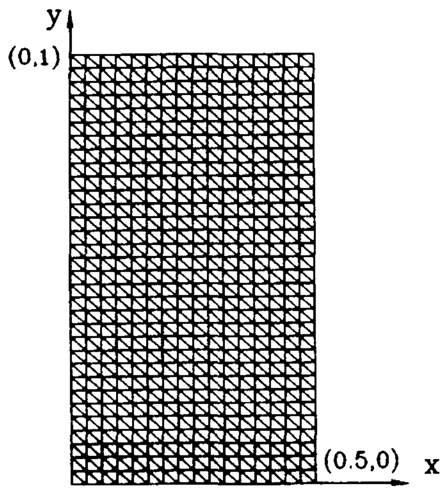

Fig. 6 Finite Element Mesh Used for the Contact Problem (h=1/32)

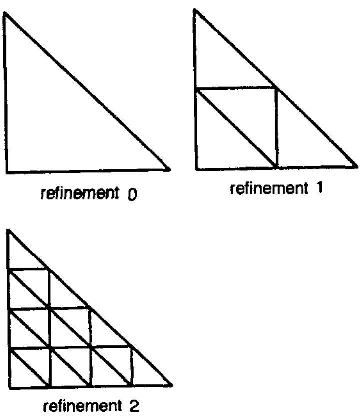

Fig. 7 Local Refinements

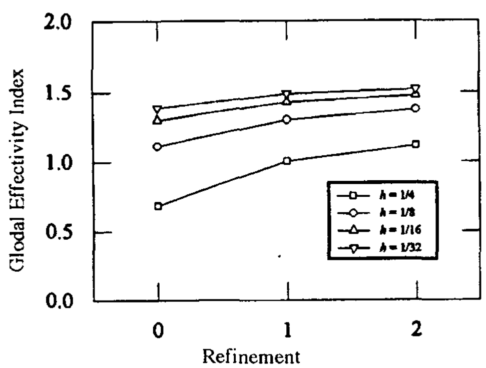

Fig. 8 Global Effectivity Index

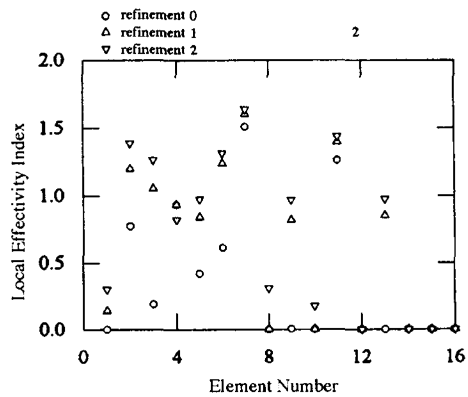

Fig. 9 Local Effectivity Index with respect to the Element Number (h=1/4)

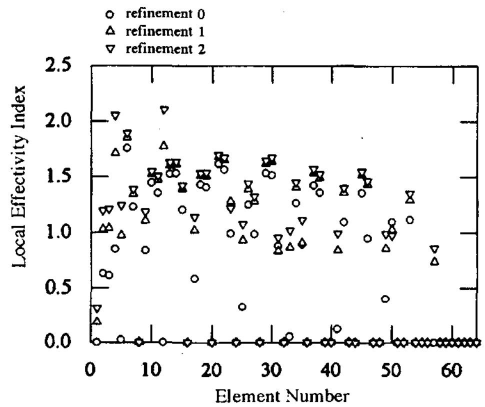

Fig. 10 Local Effectivity Index with respect to the Element Number (h=1/8)

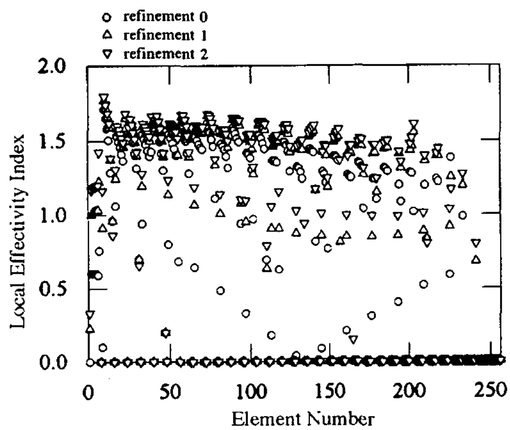

Fig. 11 Local Effectivity Index with respect to the Element Number (h=1/16)

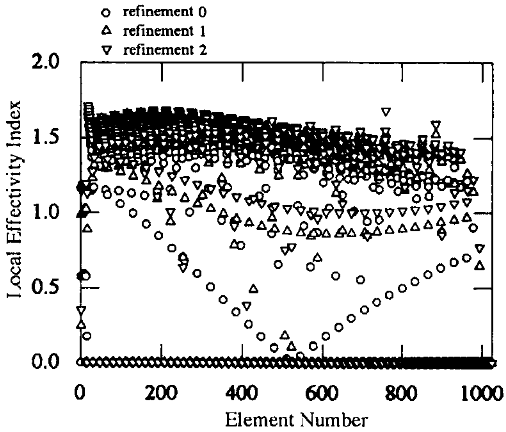

Fig. 12 Local Effectivity Index with respect to the Element Number (h=1/32)

참 고 문 헌

1. Adams, R.A., "Sobolev Spaces," Academic Press, New York, 1975.
2. Ainsworth, M., "Analysis of a Signorini-Obstacle Type Variational Inequality," TICOM Report 91-1, TICOM, Austin, Texas, 1991.
3. Elliot, C. M. and Ockenden, J. R., "Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems," Pitman Pub., Boston, 1982.
4. Kikuchi, N. and Oden, J. T., "Contact Problems in Elasticity," SIAM, Philadelphia., 1988.
5. Oden, J.T., Demkowicz, L., Rachowicz, W. and Westermann, T.A., "Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy. Part 2. A Posteriori Error Estimation," Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 77, pp. 113-180, 1989.
6. Bank, R.E. and Weiser, A., "Some A Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations," Math. Comp., 44, pp. 283-301, 1985.
7. Duvaut, G. and Lions, J.L., "Inequalities in Mechanics and Physics," Springer, Berlin, 1976.
8. Hlavacek, I., Haslinger, J., Necas, J. and Lovisek, J., "Solution of Variational Inequalities in Mechanics," Applied Mathematical Sciences, 66, Springer-Verlag, 1980.
9. Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G., "An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications," Academic Press, 1980.
10. Percell, P. and Wheeler, M.F., "A local residual finite element procedure for elliptic equations," SIAM J. Numer. Anal., 15, pp. 705-714, 1978.
11. Ainsworth, M., Oden, J.T. and Lee, C.Y., "Local A Posteriori Error Estimators for Variational Inequalities," Numerical Methods for Partial Differential Equations, 9, pp. 23-33, 1993.
12. Ainsworth, M. and Oden, J.T., "A Unified Approach to a Posteriori Error Estimation Using Element Residual Methods", TICOM Report 92-2, TICOM, Austin, Texas, 1992.