논문 한국정밀공학회지 제15권 제1호 (1998년 1월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 15. No. 1. January. 1998.

서징 효과를 고려한 원통형 코일 스프링의 전달 함수 해석

김 대 원*, 신 중 호**

Transfer Function Analysis of Cylindrical Coil Springs by Considering Surging Effect

Dae-Won Kim*, Joong-Ho Shin**

ABSTRACT

This paper addresses the results of an experimental and analytical research of cylindrical coil spring subjected to dynamic behavior. Transfer functions are presented for both deflection and transmitted force as the output with force as the input. Steady state sinusoidal magnitude ratio and transmittance are plotted along with experimental data. It is shown that dynamic characteristic of cylindrical coil spring must be used to enhance the reability of vibration system dynamic behavior analysis in actuating over some frequency.

Key Words : Transfer Function Analysis(전달함수 해석), Cylindrical Coil Spring(원통형 코일스프링), Surging Effect(서징 효과), Dynamic Characteristic(동적특성), Transmitted Force(전달력)

1. 서 론

스프링(Spring)은 기계의 기초적인 요소로써 오래 전부터 주목되어 그것의 응력문제[1-4] 및 동특성 문제[5-12]에 대해 많은 연구가 있어왔다.

스프링의 서징(Surging)은 기계의 동적 불안정성을 유발하기도 하고 구조물의 방사한계 주파수와 일치할 경우 스프링의 서징에 의한 구조 소음 발생이 큰 문제로 될 수 있는데도 일반적으로 동특성 해석시 진동계의 구성요소인 질량, 댐퍼, 스프링 중 스프링을 질량이 없는 것(Massless)으로 간주한 정적 스프링 상수(K)만을 고려함[13-15]으로써 동특성 해석에 정적 상수를 활용하게되어 결과의 신뢰성이 저하되는 우를 범해왔다. 특히 요구가 격증하고 있는 높은 속도의 내연기관 개발시 캠(Cam)구동의 흡·배기 밸브용 코일(Coil) 스프링으로 유발되는 소음문제 해결 및 스프링 파손과 밸브의 정확한 동적 거동 제어를 위해서는 스프링 서징 효과의 고려가 필수적이다. 물론 스프링은 단순상하방향의 강제가진만 받더라도 스프링 자체의 공간적 특성 때문에 횡진동등이 유발되어 좌굴현상등이 일어날 수도 있다.

그러나, 본 연구에서는 실제로 높은 주파수의 종진동을 받는 구조물등의 동특성제어에 사용되는 스프링은 횡진동 영향을 무시해도 좋은 공간적 특성을 가지고 있는 것으로 알려져 있기 때문에 스프링의 동적 특성을 종진동

* 기아정기 기술연구소 제품개발 1부
** 창원대학교 기계설계공학과

방향만으로 단순화 시켜 힘과 변위에 대한 전달매트릭스(Transfer Matrix)를 정립하여 이를 이용한 높은 주파수의 각종 진동계의 동특성 해석결과의 신뢰성 확보와 효율성 측면을 도모했다.

2. 이론적 해석

2.1 모델링(Modeling)

원통형 코일 스프링을 코일 내경이 일정하고 코일과 코일의 피치가 등간격이고 피치각이 Zero에 가까운 스프링으로 단순화하여 횡진동이 무시되고 종방향 진동만이 고려된 모델로 그림 1과 같이 이상화 시켜 Distributed Parameter Element화했다.

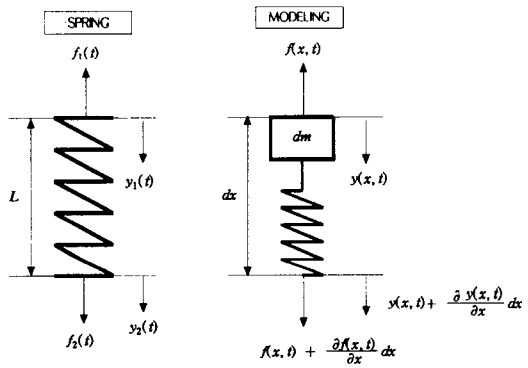

Fig. 1 Free Body Diagrams of Coil Spring

여기서,

$f_1(t), f_2(t)$: 스프링 양쪽단에 작용하는 힘

$y_1(t), y_2(t)$: 스프링 양쪽단의 변위

dx : 스프링의 요소길이

dm : 스프링의 요소질량

$f(x,t), y(x,t)$: 스프링요소에 작용하는 힘과 변위이다.

2.2 Transfer Function Analysis

코일 스프링의 질량(dm)에 가해지는 힘의 평형(Newton's 2nd Law적용)에 의해 다음과 같은 식이 주어진다.

$$F_x = dma_x \tag{1}$$

따라서, (1)식을 그림 1과 같이 단순화된 모델에 적용시키면 (2)식을 얻을 수 있다.

$$f(x,t)+\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx - f(x,t) = \frac{mdx}{L}\cdot\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{2}$$

그러므로, (2)식을 정리하면 (3)식과 같다.

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx = \frac{mdx}{L}\cdot\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{3}$$

또한 스프링의 정적 평형에 의해 (4)식이 유도되고, (4)식을 정리하면 (5)식과 같이 된다.

$$\frac{1}{2}[f(x,t)+\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx + f(x,t)] = \frac{KL}{dx}[y(x,t)+\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}dx - y(x,t)] \tag{4}$$

$$f(x,t) = KL\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \tag{5}$$

여기서 K는 정적 스프링 상수이다. 이러한 (5)식과 (3)식에 의해 (6)식과 같은 파동방정식이 유도된다.

$$c^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{6}$$

여기서,

$$c^2 = \frac{KL^2}{m}$$ 이다.

이 파동방정식을 Laplace Transform에 의해 해를 구해보면 (8)와 (9)식과 같은 x-편미방의 일반적 해를 구할 수 있다.

$$s^2Y(x,s) = c^2\frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial^2 x} \tag{7}$$

$$Y(x,s) = A(s)e^{sx/c} + B(s)e^{-sx/c} \tag{8}$$

$$\frac{\partial Y(x,s)}{\partial x} = A(s)\cdot\frac{s}{c}e^{sx/c} - B(s)\frac{s}{c}e^{-sx/c} \tag{9}$$

이러한 식을 이용해서 (5)식을 전환해보면 (10)식과 같다.

$$f(x,s) = KL(A(s)\frac{s}{c}e^{sx/c} - B(s)\frac{s}{c}e^{-sx/c} \tag{10}$$

$$f_1(s) = \frac{KLs}{c}(A(s)-B(s)) \tag{11}$$

$$f_2(s) = \frac{KLs}{c}(A(s)e^{sL/c} - B(s)e^{-sL/c}) \tag{12}$$

여기서 (11)식과 (12)식의 $f_1(s)$, $f_2(s)$는 $x=0$ 및 $x=L$의 경계조건을 대입한 값들이다. 또한 (8)식에 같은 경계조건을 대입하면 각각 (13)식과 (14)식을 얻을 수 있다.

$$Y_1(s) = A(s) + B(s) \tag{13}$$

$$Y_2(s) = A(s)e^{sL/c} + B(s)e^{-sL/c} \tag{14}$$

여기서 동적 스프링 특성치(Dynamic Spring Characteristic) u를 $u = \sqrt{m/K}$ 과 같이 정의하여 (14)식과 (13)식에 대입하여 풀면, (15)식과 같다.

$$Y_2(s) = A(s)(e^{su} - e^{-su}) + Y_1(s)e^{-su} \tag{15}$$

또한 (11)식의 $A(s)$를 이용하여 (16)식을 유도한다.

$$Y_2(s) = \frac{f_1(s)}{uKs}\cdot\frac{e^{su}-e^{-su}}{2} + Y_1(s)\frac{e^{su}+e^{-su}}{2} \tag{16}$$
$$= Y_1(s)\cosh(us) + \frac{f_1(s)}{uKs}\sinh(us)$$

(11), (12), (13)식을 이용하여 (17)식이 유도되었다.

$$f_2(s) = f_1(s)\frac{e^{su}+e^{-su}}{2} + uKsY_1(s)\frac{e^{su}-e^{-su}}{2} \tag{17}$$
$$= f_1(s)\cosh(us) + uKsY_1(s)\sinh(us)$$

일반적으로 진동을 절연하는 원통형 코일 스프링의 경우 한쪽은 고정단이고 또다른 한쪽은 자유로운 운동을 하는 자유단으로 이루어져 있다. 이러한 경계조건은 (18)식과 같다.

$$Y_1(s) = 0 \tag{18}$$

그러므로 (16)식과 (17)식은 (19)식과 (20)식과 같은 전달함수를 나타낼 수 있다.

$$Y_2(s) = \frac{f_1(s)}{uKs}\sinh(us) \tag{19}$$

$$f_2(s) = f_1(s)\cosh(us) \tag{20}$$

이것을 s대신에 $j\omega$를 대입하여 구한 주파수 전달함수는 (21), (22)식과 같다.

$$Y_2(j\omega) = \frac{f_1(s)}{uKs}\sin(u\omega) \tag{21}$$

$$f_2(j\omega) = f_1(j\omega)\cos(u\omega) \tag{22}$$

원통 코일 스프링의 진동 전달율과 동적 스프링율은 각각 (23), (24)식이 된다.

$$\frac{f_1(j\omega)}{f_2(j\omega)} = \sec(u\omega) \tag{23}$$

$$\frac{f_2(j\omega)}{KY_2(j\omega)} = u\omega\cot(u\omega) \tag{24}$$

원통 코일 스프링의 진동전달율과 동적스프링율에 대한 함수의 크기와 위상각을 동적 스프링 특성치와 주파수의 곱인 무차원 변수를 기준으로 하여 그림 2~5에 나타내고 있다

이러한 진동전달율의 크기(fig.2)는 무차원 변수가 작은 경우 정적인 경우와 같이 일정함을 알 수 있고 $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 인 경우 크기가 무한히 증가하는 공진 영역임을 나타내고 그 외의 무차원 변수의 영역에서의 진동전달율의 크기는 정적인 경우와 동일한 크기를 나타내고 있다. 또한 진동전달율의 위상각(fig.3)은 양(positive)이거나 혹은 -180°로 음(negative)을 나타내는 무차원변수 $u\omega$가 작은 경우 진동전달율의 부호가 양으로 정적인 경우와 동일함을 알 수 있고, 무차원변수의 $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 증가로 인해 코일 스프링의 양쪽단의 힘의 방향이 바뀜을 알 수 있다.

동적 스프링율의 위상각(fig.5)은 0°와 +180°로 이루어져 있고, 무차원변수가 작은 경우 $f_2(t)$ 와 $Y_2(t)$의 부호가 정적상태와 같이 양의 값을 가짐을 알 수 있으며 $n\pi$ 를 기점으로 위상각의 변화가 일어난다. 이와 같이

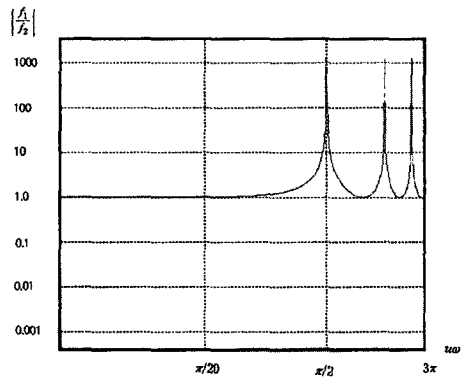

Fig. 2 Normalized Magnitude of Coil Spring's Transmittance

코일 스프링의 가진주파수 영역에 따라 $f_2(t)$ 와 $Y_2(t)$의 부호가 반대부호일 경우도 있음을 알 수 있다. 동적 스프링율의 크기(fig.4)는 무차원변수 $u\omega$가 작은 경우 정적 스프링상수(K)와 같음을 알 수 있으며, $\frac{\pi}{2}$에 접근하면 크기가 무한히 작아지는, 즉 작은 힘에 무한히 큰 변위가 발생되는 공진 현상이 나타나고, 무차원 변수가 더 증가하여 π 가 되면 크기가 무한히 커지는 즉, 힘은 무한히 크거나 변위는 작아지는 영역이 나타난다.

이러한 크기의 변화는 무차원변수 $u\omega$가 $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 인 경우는 Zero가 되고 $n\pi$ 인 경우에 무한대가 되게 일어나고 있다. 즉 동적 스프링율의 크기는 무차원변수의 크기가 큰 경우($u\omega > \frac{\pi}{4}$)는 정적스프링상수(K)와 다른 크기의 특성을 가지므로 진동계 설계에 원통형 코일 스프링을 적용시 정적스프링상수만 고려하면 해석결론의 신뢰성이 저하하는 원인이 될 수 있음을 나타낸다.

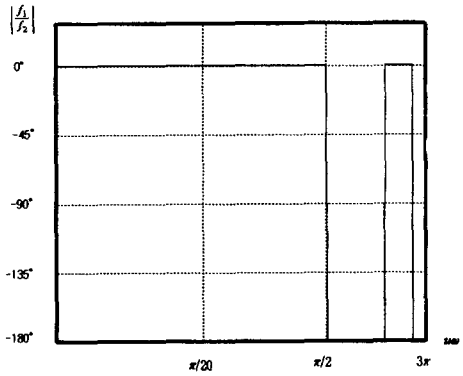

Fig. 3 Normalized Phase of Coil Spring's Transmittance

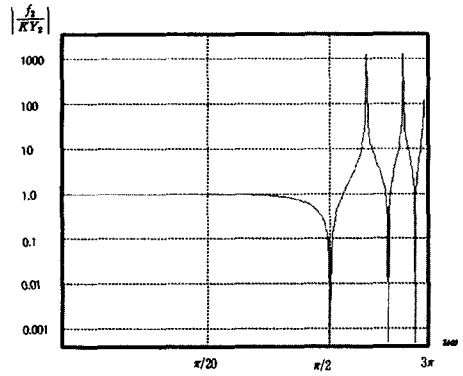

Fig. 4 Normalized Magnitude of Coil Spring's Dynamic Spring Modulus

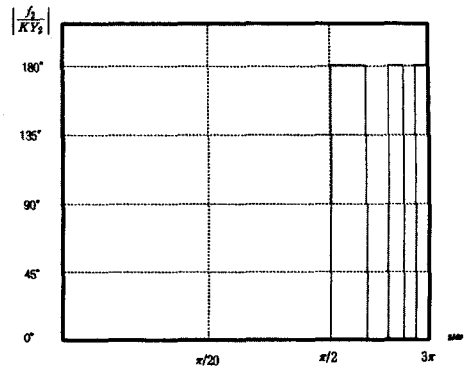

Fig. 5 Normalized Phase of Coil Spring's Dynamic Spring Modulus

3. 실험적 해석

3.1 실험장치

실험장치를 Fig.6과 같이 원통 코일 스프링의 양쪽단 힘을 측정하기 위해 두 개의 하중 센서를 사용하고 $x_i(t)$를 비접촉식 변위센서로 측정하고 코일 스프링의 한쪽단은 고정시키고 나머지 한쪽단은 가진기로 가진시켰다. 이러한 센서들에 의한 측정 결과들은 FFT Analyser를 이용해 가진주파수별 크기와 위상각을 해석했다.

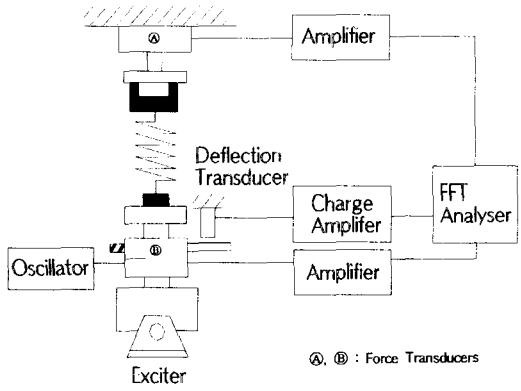

Fig. 6 Block Diagram of Experimental Setup

3.2 실험장치 모델링 및 해석(Analysis)

3.2.1 모델링

원통 코일 스프링의 전달함수(Transfer Function)를

실험적 해석을 하기 위해서는 스프링의 한쪽단은 고정시키고 다른 한쪽단을 가진 시키기 위해 별도의 질량(M)을 부가하는 Fig.7과 같이 모델링할 수밖에 없다.

3.2.2 전달함수해석

질량에 가해지는 힘의 평형(Newton's 2nd Law)에 의해 Fig.7과 같은 실험 시스템은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$F_3(s) = [Ms^2 + uKs\coth(us)] \cdot Y_2(s) \tag{25}$$

$$\frac{KY_2(s)}{F_3(s)} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + us\coth(us)} \tag{26}$$

여기서, $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$ 이다.

점 1에 작용하는 힘은 (19)식과 (25)식을 이용해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_1(s) = [\frac{uKs\coth(us)\sec h(us)}{Ms^2 + uKs\coth(us)}]F_3(s) \tag{27}$$

$$\frac{F_1(s)}{F_3(s)} = \frac{us\cos ech(us)}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + us\coth(u)} \tag{28}$$

이러한 (26)식과 (28)식에 s대신에 $j\omega$를 대입하여 주파수 전달함수화하여 스프링의 질량(m)과 부하된 질량(M)의 비를 무차원 ($\mu = \sqrt{\frac{m}{M}}$)으로 전환한 진동계의 진동전달율과 동적스프링율은 각각 (29)식과 (30)식이다.

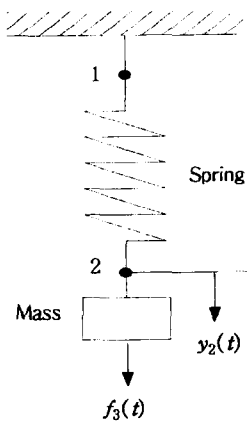

Fig. 7 Modeling of Experimental System

$$\frac{F_1(j\omega)}{F_3(j\omega)} = \frac{\mu r\cos ec(\mu r)}{\mu r\cot(\mu r) - r^2} \tag{29}$$

$$\frac{kY_2(j\omega)}{F_3(j\omega)} = \frac{1}{\mu r\cot(\mu r) - r^2} \tag{30}$$

4. 실험결과

표 1과 같은 원통 코일 스프링을 이용하여 실험적 · 이론적 해석을 해서 그림 8과 그림 9의 결과를 얻었다.

그림과 같이 코일 스프링에 대한 실험적 결과와 이론적 해석결과가 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 다만 1st 및 2nd 공진주파수 이후의 대역에서 실험결과와 이론결과의 차이는 이론 모델링시 고려치 않은 코일 스프링의 축에 반경방향의 횡진동과 원주방향의 비틀림 진동이 코일 스프링의 축방향진동에 영향을 주고 있기 때문인 것으로 추정된다.

코일 스프링의 질량을 고려치 않은 경우의 결과를 함께 나타냄으로써 어느 범위의 가진주파수 대역이상에서는 정적 스프링상수의 적용이 얼마나 동적해석결과에 영향을 미칠 수 있는지를 잘 나타내주고 있다.

Table 1 Physical Data of Coil Spring

Wire Diameter	0.004 m
Mean Diameter	0.033 m
Total Coils	10
Active Coils	8
Length	0.133 m
Total Weight	1.112 N
Static Spring Rate	9.106 KN/m
Mass Ratio(m/M)	8.5
Coil Pitch Angle	4°

5. 결 론

본 연구에서는 원통형 코일 스프링의 전달함수와 진동전달율, 동적스프링율에 대한 해석과 실험을 수행함으로

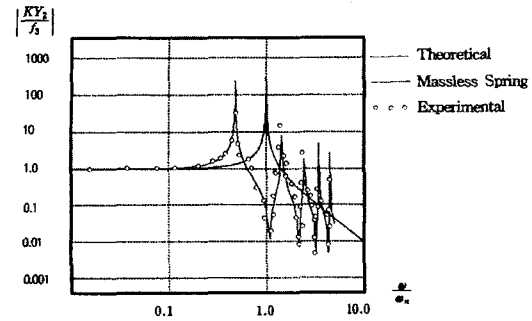

Fig. 8 Normalized Magnification Ratio of Theoretical and Experimental Results

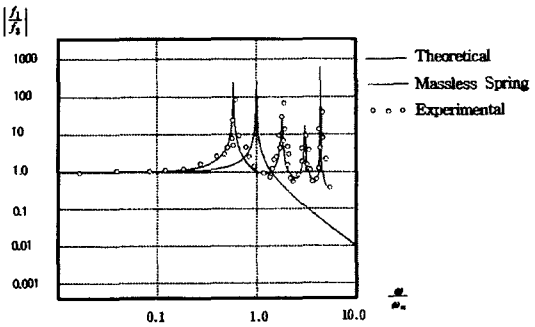

Fig. 9 Transmittance Comparision of Theoretical and Experimental Results

써 코일 스프링의 동적 거동에 대한 정확한 이해가 가능했고, 코일 스프링에 대한 동적 특성의 부주의가 시스템 설계에서 불안정을 유도할 수도 있다는 것을 알게 되었다.

만약, 코일 스프링이 일정한 스프링상수가 요구되는 힘-변위 트랜듀스에 사용될 경우 첫 번째 위험주파수(1st Critical Frequency) 이하의 가진주파수 영역에서만 사용되어져야 하는 것은 높은 주파수대역에서는 주파수 의존의 스프링 상수이기 때문이다.

본 연구에서 수행된 한쪽단이 고정되고 다른단은 자유로운 코일 스프링의 첫번째 위험주파수는 일반적으로 문헌에 알려져 있고 양쪽 고정단의 첫번째 위험주파수의 1/2 위치에 존재한다. 또한 변위특성은 위험하지 않아도 특정주파수에서 진동전달율의 무한한 증가에 의해 스프링 Seat 에 손상이 초래될 수도 있음을 알 수 있다.

향후 코일 스프링의 횡진동 및 비틀림진동을 고려함으로써 스프링의 동적거동 해석에 좀더 신뢰성을 추구할 수 있고, 코일 스프링의 피치가 일정하지 않은 경우와 코일 내경이 다를 경우, 즉 원통이 아닌 원추형등의 경우에 대해 전달함수등에 대한 연구를 진행함으로써 원통형 코일 스프링 뿐만 아니라 각종 다양한 형태의 스프링에 대해 동적거동해석이 가능하리라 본다.

참 고 문 헌

1. Wahl, A. M., "Stresses in Heavy Closely Coiled Helical Springs", ASME Journal, APM-51-17, 1929.
2. Yoshihiro, H., and Masayoshi, S., "Stress Analysis of Cylindrical Coil Spring",JSME Journal, Vol. 48, No. 435, pp. 1774 ~ 1777, 1982.
3. Nagaya, K., "임의 형상단면의 원통 Coil Spring 의 응력해석", 일본기계학회논문집, No. 84, pp. 138 ~ 145,1984.
4. 下關正義 and 岩崎茂夫, "Analysis of Compression Coil Spring Using Matrix Method", JSME Journal, Vol 45, No. 396,pp. 901 ~ 909, 1979.
5. Wahl, A. M., "Mechanical Springs", McGraw-Hill, New York, N.Y., 2nd ed. 1963.
6. Junkichi, I., and Akio, Y. , "On the Static and Dynamic Behavior of Coil Springs", JSME Journal, Vol. 1, pp. 1130 ~ 1137, 1990.
7. Junkichi, I., and Hirorhi, S., "On the Static and Behavior of Coil Springs(The End Effect)", JSME Journal, Vol. 1, pp. 1119 ~ 1129, 1970.
8. Junkichi, I., and Hiroshi, S., "On the Static and Dynamic Behavior of Coil Springs(Forced Vibrations)", JSME Jour nal,Vol. 1, pp. 1138 ~1146, 1970.
9. Lee, J. H., and Park, J. Y., "A Study on the Vibration of Automobil Spring Suspension System", KSME Journal, Vol. 12, No. 6, pp. 1450 ~ 1461, 1988.
10. Ward, A., and Barker, H. A., "Dynamic Analysis of Helical Springs by the

Assumed Mode Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 2, No. 112, pp. 305 ~ 320, 1987.

11. Jiang, W., and Jones, W. K., "Free Vibration of Helical Springs", ASME Transactions, Vol. 58, No. 222, March, 1991.
12. Park, Y. S., and Jeon, H. S., "Analytical and Experimental Motion Analysis of Finger Follower Type Cam-Valve System with a Hydraulic Tappet", KSME Journal, Vol. 4, No. 1, pp. 40 ~ 47, 1990.
13. Bagci, C., and Kurnool, S., "Exact Response Analysis and Dynamic Design of Cam-Follower Systems Using Laplace Transforms", Advances in Design Automation, ASME, Vol. 1, pp. 613 ~ 629, 1994.
14. Mercer, S., and Holowenko, A. R., "Dynamic Characteristics of Cam Forms Calculated by Digital Computer", ASME Transactions, Vol. 36, No. 8, pp. 1695 ~ 1705, 1958.
15. Mathew, G. K., and Tesar, D., "Cam System Design: The Dynamic Synthesis and Analysis of the One Degree of Freedom Model", Mechanism and Machine Theory, Vol. 11 , No. 4, pp. 247 ~ 257, 1976.