

초고속 원심분리기 복합재 로터의 해석 및 최적설계

박종권*, 김영호**, 하성규***

Optimal Design of Ultracentrifuge Composite Rotor by Structural Analysis

Jong Kweon Park*, Young Ho Kim**, Sung Kyu Ha***

ABSTRACT

A procedure of stress and strength analysis has been proposed for the centrifuge rotor of composite materials of quasi-isotropic laminates. The goal in this study is to maximize the allowable rotating speed, that is, to minimize maximum strength ratio with the given path length by changing the geometric parameter-outer radius and ply angles in quasi-isotropic laminates. Optimum values of the geometric parameter-outer radius and ply angles are obtained by multilevel optimization. All the geometric dimensions and stresses are normalized such that the result can be extended to a general case. Two dimensional analysis at each cross section with an elliptic tube hole subjected to internal hydrostatic pressures by samples as well as the centrifugal body forces has been performed along the height to calculate the stress distribution with the plane stress assumption, and Tsai-Wu failure criterion is used to calculate the strength ratio. The maximum allowable rotating speed can be increased by changing the radii of the outer surface along the height with the maximum strength ratio under the unit value; The optimal number of ply angles maximizing the allowable rotating speed in quasi-isotropic laminates is found to be the half number of tube hole, and the optimal laminate rotation angle is the half of $[\pi/m]$. A $[\pi/3]$ laminate, for instance, is stronger than a $[\pi/4]$ laminate for the centrifuge rotor of 6 tube hole number even though they have the same stiffness.

Key Words : Centrifuge rotor(원심분리기 로터), Composite Materials(복합재료), Multilevel Optimization (다단계 최적설계)

1. 서론

원심분리기(Centrifuge)는 로터를 회전시켜 그안에 담

긴 시료에 원심력을 가함으로써 시료를 밀도에 따라 분리하는 기계이다.⁽¹⁾ 기존의 사용중인 대부분의 원심분리기 로터는 알루미늄과 티타늄으로 만들어지는데 이러한 금

* 한국기계연구원 공작기계그룹
** 한양대학교 기계설계학과 대학원
*** 한양대학교 기계공학과

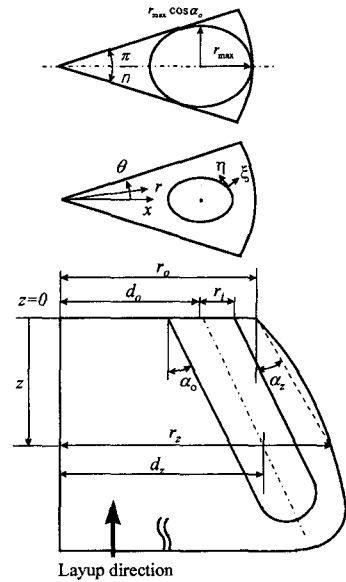
속개료의 사용에는 많은 제약이 따른다. 예를 들면 금속 피로(metal fatigue)와 부식(corrosion)에 의해 로터의 수명이 단축되며 무거운 금속 로터를 짧은 시간에 가속시키기 위해서는 많은 양의 토오크가 필요하게 된다. 복합재 원심분리기 로터는 이러한 문제를 해결하기에 적합하다. 복합재료는 로터의 무게를 줄이면서 원심분리하는 시료의 양을 증가시켜 로터의 효율을 증가시킬 뿐만 아니라, 부식과 금속피로가 발생하지 않아 수명이 길다.⁽²⁾ 또한 복합재료는 비강도가 크면서 주어진 하중과 형상에 대해 적층각을 바꿈으로써 강도를 높일수 있는 특성을 가지고 있다. 일반적으로 복합재 원심분리기는 면내 응력(In-plane stress)에 대해 등방성 물질과 같은 거동을 하는 준등방성 복합재료(Quasi-isotropic laminates)를 많이 이용한다.

원심분리기 로터는 일정형상이 주기적으로 $2n$ 번 반복되는 방사 대칭형(cyclic symmetry)이며 응력해석은 $r - \theta$ 평면에 평행한 단면에서 z 방향 응력을 무시하는 평면응력(plane stress)이라는 가정하에 수행되었다. 설계적 관점에서 볼 때 원심분리기 로터는 최대허용회전각속도를 최대화하는 것이 필요하다. 정적 선형 해석시 로터의 최대허용회전각속도는 특정회전수로 회전시 로터내에 발생하는 최대강도비의 제곱근에 반비례한다. 따라서 복합재 원심분리기의 최대허용회전각속도를 최대화하는 것은 바로 특정회전수에서 로터내에 발생하는 최대강도비를 최소화하는 문제로 대치될 수 있다. 과거에는 로터내에 분포하는 응력과 최대강도비를 계산하기 위해 이론해와 유한요소법이 이용되어져 왔으나⁽³⁻⁴⁾ 이론해의 경우 일반적인 로터에 대한 해가 구해지지 않았으며 복합재 로터의 형상과 적층각을 결정하는 방법이 아직 제시되지 않았다. 본 연구에서는 유한 요소법과 Tsai-Wu 파손기준을 이용하여 주어진 단면에서 발생하는 최대강도비를 구했다. 최적설계를 통해서 최대강도비를 최소화하는 외경과 적층각이 구해졌다. 최적설계에 있어서 계산시간을 줄이고 수렴성을 향상시키기 위해서 형상에 관계되는 변수와 조층각에 관계되는 변수를 분할(partitioning)하는 다단계 최적설계(Multilevel optimization)를 이용하였다.

2. 응력해석 및 강도해석

본 연구에서 고려된 복합재 원심분리기는 Fig. 1과 같이 회전축과 튜브가 이루는 각도가 α_0 인 고정각 로터(fixed angle rotor)이다. 원심분리기 로터는 $2n$ 개의 튜브에 있는 물질을 원심분리하며 이 때 입자들의 differential separation을 위해 원심력을 발생시킨다. 따라서 로터에 작용하는 하중은 체력으로서의 원심력과 시료의 원심력에 의해 튜브구멍의 표면에 가해지는 정수압(hydrostatic pressure)이 된다. 준등방성 복합재료로 로터를 설계시 플라이는 회전축 z 에 수직하게 적층한다. 준등방성 복합재료의 적층각은 Fig. 2와 같이 적층그룹수(number of ply groups, m)와 적층회전각(laminate rotating angle, β)에 의해 결정된다. 예를 들어 $m=3$ 인 경우 주어진 적층회전각 β 에 대해 준등방성 복합재료의 적층각은 $[\beta, \frac{\pi}{3} + \beta, \frac{2\pi}{3} + \beta]_s$ 가 된다.

Fig. 1 Geometries and coordinate systems for a fixed angle rotor with a tube angle α_0 ; Determination of the maximum length of the semi-axes of the elliptic tube hole for a repeating portion of angle π/n (the top figure)



2.1 응력해석
 평면응력일 때 원통좌표계에서 회전체의 평형방정식은 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho_c r \omega^2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

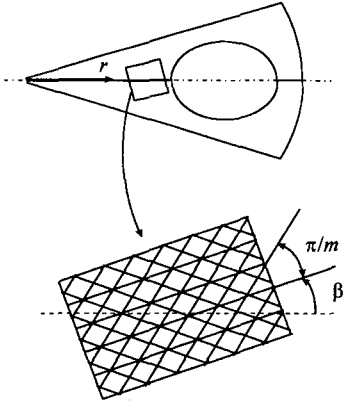


Fig. 2 Geometry of layup sequence of quasi-isotropic laminates in a composite centrifuge rotor; π/m is a ply angle and β is a laminate rotation angle

여기서 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 는 각각 반경방향 응력, 원주방향 응력 및 전단 응력이고 ρ_c 는 복합재료의 밀도, ω 는 회전 각속도이다. 길이와 응력이 각각 윗면의 외경 r_0 와 $\rho_c r_0^2 \omega^2$ 에 의해 식 (2)와 같이 무차원화 되었다.

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\rho_c r_0^2 \omega^2} \quad (2)$$

식 (2)를 이용하면 지배방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\theta^*}{r^*} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial \sigma_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial r^*} + \frac{2\tau_{r\theta}^*}{r^*} = 0$$

로터의 형상이 주기적으로 반복되기 때문에 반복되는 형상만 모델링 하여 해석하였다. 타원형 튜브구멍의 최대 장축의 길이는 주어진 튜브 구멍의 개수 $2n$ 과 튜브각도 α_0 에 의해 결정되며 다음과 같다.

$$r_{\max}^* = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \cos^2 \alpha_0}} \quad (4)$$

r_{\max}^* 이 결정되면 윗면에서 회전축으로부터 튜브구멍 중심까지 거리 d_0^* 가 구해지며 $z^* = 0$ 이 아닌 각 단면

에서 회전축으로부터 튜브구멍 중심까지의 거리 d_z^* 및 외경 반지름 r_z^* 는 z^* 의 함수로 표현되며 다음과 같다.

$$d_o^* = 1 - r_{\max}^*$$

$$d_z^* = d_o^* + z^* \tan \alpha \quad (5)$$

$$r_z^* = 1 + z^* \tan \alpha$$

Fig. 3은 유한요소모델의 요소분할을 나타낸 것으로 2차원 4절점 평면요소(2-D 4 nodes plane element)를 사용하였다.

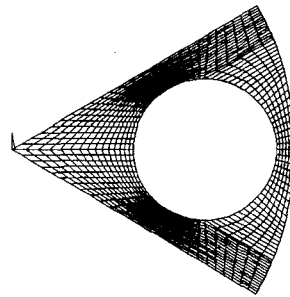


Fig. 3 Element meshes for 2-D FEM analysis

Fig. 4는 응력해석시 경계조건을 나타낸 것으로 구속 경계조건은 해석모델의 대칭성을 고려하였고 강제운동을 방지하였다. 하중조건은 로터의 원심력과 시료의 원심력으로 인해 로터에 가해지는 정수압을 고려하였다. 로터가 ω 의 일정한 각속도로 회전시 시료에 의해 튜브구멍의 안쪽에 가해지는 정수압 $P(r)$ 은 상대평형운동을 하는 유체에 대한 평형방정식을 적분하여 구할 수 있으며 중력을 무시하였을 때 다음과 같다.

$$P(r) = \int \rho_s r \omega^2 dr = \frac{1}{2} \rho_s \omega^2 (r^2 - r_f^2) \quad (6)$$

여기서, ρ_s 는 시료의 비중을 나타내며 r_f 는 회전축으로부터 자유표면까지의 거리를 나타낸다. 자유표면은 유체에 의한 정수압(hydrostatic pressure)이 0이 되는 등압면으로 중력을 무시할 경우 튜브내의 시료의 양에 의해 결정되며 높이는 무관한 상수값이 된다. 정수압 $P(r)$ 을 역시 무차원화하면 식 (7)의 $P^*(r^*)$ 의 값이 구해진다.

$$P^*(r^*) = \frac{1}{2} \frac{\rho_s (r^2 - r_f^2) \omega^2}{\rho_c r_o^2 \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho_c} (r^{*2} - r_f^{*2}) \quad (7)$$

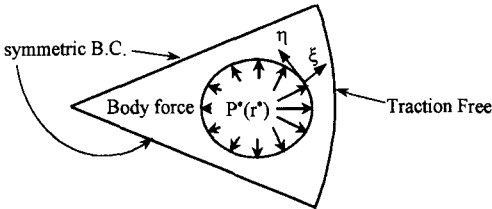


Fig. 4 Boundary conditions for the stress analysis of a centrifuge rotor subjected to internal pressures and centrifugal body forces

구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma^* = D \epsilon^* \quad (8)$$

여기서

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon}{\rho_c r_o^2 \omega^2} \quad (9)$$

이다. 강성행렬 D 를 구하기 위해 사용된 등가 물성치는 준등방성 복합재료이므로 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$\nu = \frac{A_{12}}{A_{11}}, \quad G = \frac{A_{66}}{h} \quad (10)$$

여기서 h 는 적층된 플라이의 총 두께이며 면내강성(In-plane modulus) A_{ij} 는 다음과 같다.

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz \quad (11)$$

Q_{ij} 는 각 플라이의 적층관축 강성(off-axis modulus)이다.

2.2 강도해석

주어진 경계조건에서 지배방정식을 풀어서 구한 변형률 ϵ^* : 적층관축 변형률(off-axis strain)이다. 각 플라이에 발생하는 무차원화된 플라이축 응력(on-axis stress) $\bar{\sigma}^*$ 은 변형률 변환행렬(Transformation matrix) T 와 플라이축 강성행렬(on-axis stiffness) \bar{Q} 을 이용하여 계산한다.⁽⁶⁾

$$\bar{\sigma}^* = \bar{Q} \bar{\epsilon}^* = \bar{Q} T \epsilon^* \quad (12)$$

여기서 변형률 변환행렬 T 는 다음과 같다.

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \cos \phi \sin \phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi \\ -2 \cos \phi \sin \phi & 2 \cos \phi \sin \phi & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (9)에서 ϕ 는 적층각도이다. 평면응력상태의 적층판에 대한 Tsai-Wu 파손기준은 아래의 식으로 표현된다.⁽⁶⁾

$$\bar{\sigma}^{*T} \bar{F} \bar{\sigma}^* + \bar{F} \bar{\sigma}^* R^* - R^{*2} = 0 \quad (14)$$

여기서 R^* 는 다음과 같다.

$$R^* = \frac{R}{\rho_c r_o^2 \omega^2} \quad (15)$$

식 (14)와 (15)에서 강도비 R 은 1보다 클 경우 파괴가 발생함을 나타내고 있다. 식 (14)에서 \bar{F} 와 \bar{F} 는 강도 변수(Strength parameter)로서 다음과 같이 나타난다.

$$\bar{F} = \left[\frac{1}{X} - \frac{1}{X'}, \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}, 0 \right] \quad (16)$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{XX'} & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{XX'} \frac{1}{YY'}} & 0 \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{XX'} \frac{1}{YY'}} & \frac{1}{YY'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S^2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서 X 와 X' 는 섬유 방향으로의 인장 및 압축강도, Y 와 Y' 는 섬유에 수직방향의 인장 및 압축강도이며 S 는 전단강도이다. 준등방성 복합재료에서 등가강성은 적층각에 무관한 값이므로 off-axis 응력 역시 적층각과 무관한 값을 가지게 된다. 그러나 준등방성 복합재료의 적층각이 바뀔때 따라 각 플라이에서의 플라이축 응력(on-axis stress)과 강도비는 다른 값을 가지게 된다.

3. 최적설계

로터의 각 단면에서 튜브구멍의 개수 $2n$, 튜브고정각 α_0 , 튜브내경 r_i^* 가 주어지면 특정회전수로 회전시 로터내에 발생하는 최대강도비를 최소화하기위해 최적설계가

수행되었다. 설계변수로는 로터의 외경 r_z^* , 적층수 m , 적층회전각 β 가 고려되었다. 이를 정식화하면 다음과 같다.

Given : n, α_0, r_i^* for each z^*

Minimize $R_max(r_z^*, m, \beta)$

Design variables r_z^*, m, β (18)

subject to $r_z^* - d_z^* > \frac{r_{max}}{\cos \alpha_0}$

$0 \leq \beta \leq \frac{180^\circ}{n}$

주어진 n, α_0, r_i^* 에서 로터내에 발생하는 적층판축 응력 (off-axis stress)은 r_z^* 의 함수이며 적층각과 관계되는 변수 m, β 는 응력해석과는 관계없이 강도해석에서만 필요로 하는 변수이다. 그러므로 위에서 정식화한대로 최적 설계할 경우 적층각에 대해서는 불필요한 응력해석을 수행하게 된다. 또한 r_z^* 의 최적값근방에서는 적층각의 민감도가 r_z^* 의 민감도에 비해 둔감하므로 정확한 최적해를 찾기가 힘들다. 따라서 m 과 β 에 대한 1단계 최적설계로 구해진 R_max 의 최소값을 목적함수로 해서 r_z^* 에 대해 2단계 최적설계하는 다단계 최적설계 (Multilevel Optimization)⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾를 수행하였다. 여기서 1단계 최적설계에서는 DOT⁽¹⁰⁾의 SQP(Sequential Quadratic Programming)를, 2단계 최적설계에서는 SUMT(Sequentially Unconstrained Minimization Technique)를 이용하였다. 위의 정식화된 문제에서의 다단계 최적설계의 적용을 Fig. 4의 흐름도에 나타내었다.

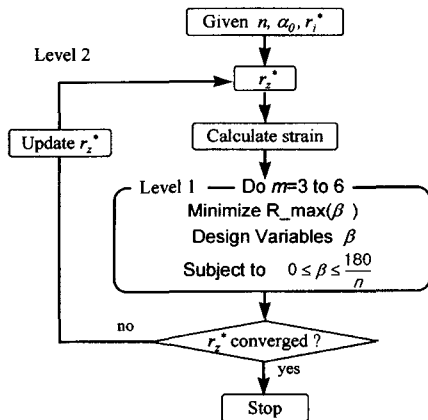


Fig. 5 Flowchart for multilevel optimization of centrifuge rotor

4. 결과 및 고찰

복합재료 로터의 설계시 윗면의 외경반지름 r_o 와 튜브 고정각 α_0 가 주어졌을 때 나머지 중요한 형상인자로는 튜브구멍 반지름 r_i , 외경의 반지름 r_z , 로터내 튜브구멍의 개수 $2n$ 이다. 본 논문에서는 윗면의 외경반지름, 튜브 고정각, 튜브구멍의 개수, 높이가 각각 10cm, 15°, 6, 12.5cm인 로터를 대상으로 하였으며 튜브내에서 시료의 비중은 일정하게 1.2인 것으로 하였다. 해석에 사용된 복합재료는 AS4/PK이며 물성치는 Table 1과 같다.

Table 1 Material properties of centrifuge composite rotor for numerical calculation

Material Property (AS4/PK)	Values
Longitudinal Young's Modulus, E_x	134 GPa
Transverse Young's Modulus, E_y	8.9 GPa
Shear Modulus, E_s	5.1 GPa
Longitudinal Poisson's Ratio, ν	0.28
Longitudinal Tensile Strength, X	2130 MPa
Longitudinal Compressive Strength, X'	1100 MPa
Transverse Tensile Strength, Y	80 MPa
Transverse Compressive Strength, Y'	200 MPa
Shear Strength, S	160 MPa
Density, ρ_c	1600 Kg/m ³

튜브구멍에서의 응력상태는 Fig. 4에서와 같이 전단응력 $\sigma_{\xi\eta}^*$ 이 0이 되며 수직응력 $\sigma_{\xi\xi}^*$ 는 시료의 원심력에 의한 압력으로 중력을 무시할 경우 튜브에 채워진 시료의 양에 의해 자유표면의 위치가 결정된다. 본 논문에서는 시료가 튜브에 완전히 채워져 있는 경우에 대해 수치실험을 하였으며 이때 자유표면의 위치인 r_f^* 는 $d_o^* - r_i^*$ 가 된다. 수치실험 결과 로터의 각 단면에서 α_z 는 응력분포에 큰 영향을 미친다. 따라서 각 단면에 발생하는 최대 강도비를 최소화하기 위해 두가지 경우, 즉 α_z 가 상수일 때와 α_z 가 높이에 따라 임의로 변하는 경우에 대해 최적의 α_z 를 구했다. Fig. 5는 z^* 가 0.25, 0.75, 1.25인 단면에서 튜브구멍의 원주방향 응력 $\sigma_{\xi\xi}^*$ 를 3가지 경우에 대해 나타내었다. 첫 번째는 α_z 가 초기값 α_0 로 일정한 경우이며 두 번째는 α_z 가 상수일 때 모든 단면에 발생하는 최대 강도비를 최소화하는 α_z 값인 25°인 경우, 마지막으로 α_z 를 높이에 따라 다르게 해서 각 단면에 발생하는 최대 강도비를 최소화했을 때이다. 그림에서 보듯이

첫 번째 경우보다 두 번째 세 번째 경우에 있어서 원주방향 응력이 많이 감소함을 알 수 있다.

강도해석시 최대강도비는 Fig. 6의 경계 ABC에서 나타나며 이 경계면에서의 강도비를 줄이는 것이 로터의 전체 강도를 증가시키게 된다. Fig. 7은 $z^* = 1.25$ 인 단면에서 r_i^* 가 초기값일때와 r_i^* 가 최적값일 때 $m=3, 4, 5, 6$ 인 각 경우의 적층회전각 β 에 대한 최대강도비를 나타내었다. 로터의 형상이 방사 대칭형이며 적층이 준 등방성임으로 인해 최대강도비는 $\frac{180^\circ}{m}$ 와 $\frac{180^\circ}{n}$ 의 최대공약수를 주기로 반복됨을 알 수 있다.

앞에서 주어진 조건하에서 최적설계 수행결과 최적의 m 값은 $\frac{180^\circ}{m}$ 와 $\frac{180^\circ}{n}$ 의 최대공약수가 최대로 될 때, 즉 $m=n$ 일 때이며 β 는 이러한 최대공약수의 $\frac{1}{2}$ 이 됨을 알 수 있다. 위의 주어진 예제에서는 $n=3$ 인 경우이므로 최적의 m 과 β 값은 모든 단면에서 $m=3$ $\beta=30^\circ$ 가 되었다. 각 단면에서의 최적화된 설계변수 r_i^* 와 목적함수인 최대 강도비를 Fig. 8에 나타내었다. 또한 최적설계전

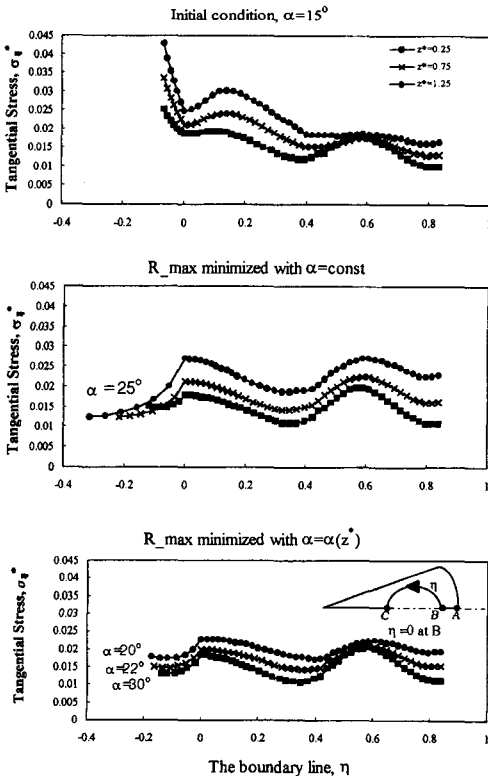
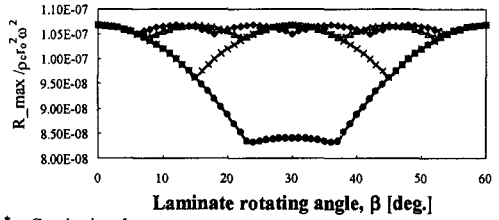


Fig. 6 Distribution of tangential stresses along the boundary line η for the rotor of $r_i^* = 0.8r_{max}^*$, $n = 3$, and $\alpha_0 = 15^\circ$

r_i^* : initial condition



r_i^* : Optimized

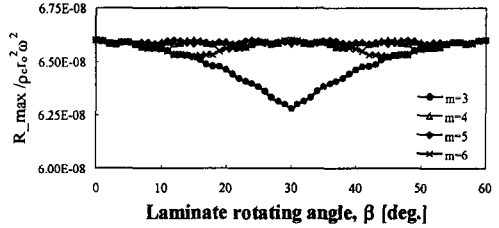


Fig. 7 Variation of maximum strength ratio R_{max} with respect to laminate rotating angle β $r_i^* = 0.8r_{max}^*$, $n = 3$, $\alpha_0 = 15^\circ$, and $z^* = 1.25$

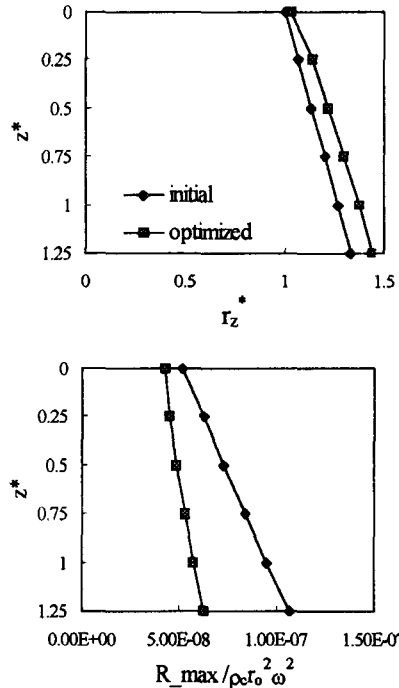


Fig. 8 The calculated optimal r_i^* and object function R_{max} along the height z^* when $r_i^* = 0.8r_{max}^*$, $n = 3$, and $\alpha_0 = 15^\circ$

과 최적설계후의 최대허용회전각속도를 Table 2에 나타내었다.

Table 2 The increase of the maximum allowable rotating speed ω along the height z^* by multilevel optimization when $r_i^* = 0.8r_{max}^*$, $n = 3$, and $\alpha_0 = 15^\circ$

z^*	Initial	Optimized
0	34700 rpm	38200 rpm
0.25	31700 rpm	37300 rpm
0.5	29300 rpm	35900 rpm
0.75	27300 rpm	34400 rpm
1	25700 rpm	32900 rpm
1.25	24200 rpm	31500 rpm

5. 결론

준등방성 복합재료로 만들어진 원심분리기 로터의 최대허용회전각속도를 최대화하기 위해서 일련의 응력해석과 강도해석 및 최적설계를 수행하였다. 특정회전수로 회전시 로터내에서 발생하는 최대강도비는 적층회전각에 대해 $\frac{180^\circ}{n}$ 와 $\frac{180^\circ}{m}$ 의 최대공약수를 주기로 반복되며 준등방성 복합재료로 만들어진 원심분리기 로터의 외경과 적층각을 최적설계하였다. 최적설계결과 모든 단면에서 m 은 튜브구멍 개수의 $\frac{1}{2}$, β 는 $\frac{\pi}{2n}$ 일 때 최적의 값을 가짐을 알 수 있었다. 또한 다단계최적설계를 이용하여 불필요한 계산을 줄이고 수렴성을 향상 시켰다. 최적설계를 통하여 최대허용회전각속도가 약 30%가량 향상되었다.

참고 문헌

1. 박종권, "초고속 원심분리시스템의 설계 및 제작기술 연구", 통상산업부 연구보고서, BSM051-

367 · M, 1996.
 2. <http://www.composite.com>, Composite Rotor, Inc. 1997.
 3. Kienzler, R. and Zhuping, D., "On the Distribution of Hoop Stresses around Circular Holes in Elastic Sheets", ASME J. Applied Mech., vol. 54, pp. 111-114. 1987.
 4. Ku, Ta-Cheng, "Stress Concentration in a Rotating Disk With a Central Hole and Two Additional Symmetrically Located Holes", ASME, J. Applied Mech., vol. 27, pp. 359-360. 1960.
 5. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York. 1970.
 6. Tsai, Stephen W. and Hahn, H. Thomas, Introduction to Composite Materials, TECHNOMIC Publishing Co., Inc. 1980.
 7. U. Kirsch, M. Reiss, and U. Shamir, "Optimum design by partitioning into substructures", ASCE Journal of the Structural design, Vol. 98, No. ST1, pp. 249-267, 1972.
 8. J. Sobieszczanski-Sobieski, B. James, and A. Dovi, "Structural optimization by multilevel decomposition", AIAA Journal, Vol. 23, No. 11, pp. 1775-1782, 1985.
 9. J. Sobieszczanski-Sobieski, B. B. James, and M. F. Riley, "Structural sizing by generalized, multilevel optimization", AIAA Journal, Vol. 25, No. 1, pp. 139-145, 1987.
 10. Vanderplaats Research & Development DOT-Design Optimization Tools, VR&D, Inc 1995.