

로봇팔의 장애물 중에서의 시간 최소화 궤도 계획

박종근*

Minimum-Time Trajectory Planning for a Robot Manipulator amid Obstacles

Jong-keun Park*

ABSTRACT

This paper presents a numerical method of the minimum-time trajectory planning for a robot manipulator amid obstacles. Each joint displacement is represented by the linear combination of the finite-term quintic B-splines which are the known functions of the path parameter. The time is represented by the linear function of the same path parameter. Since the geometric path is not fixed and the time is linear to the path parameter, the coefficients of the splines and the time-scale factor span a finite-dimensional vector space, a point in which uniquely represents the manipulator motion. The displacement, the velocity and the acceleration conditions at the starting and the goal positions are transformed into the linear equality constraints on the coefficients of the splines, which reduce the dimension of the vector space. The optimization is performed in the reduced vector space using nonlinear programming. The total moving time is the main performance index which should be minimized. The constraints on the actuator forces and that of the obstacle-avoidance, together with sufficiently large weighting coefficients, are included in the augmented performance index. In the numerical implementation, the minimum-time motion is obtained for a planar 3-link manipulator amid several rectangular obstacles without simplifying any dynamic or geometric models.

Key words : Minimum-Time Motion(시간 최소화 운동), Nonlinear Programming(비선형 계획법), Quintic B-spline(5차 B 스플라인), Penetration Growth Distance(침투 성장 거리)

1. 서론

본 연구는 로봇팔이 움직여야 할 기하학적 경로(geometric path)가 고정되지 않았을 때 여러 가지 동적 제

약 조건 혹은 장애물 회피 제약 조건 속에서 운동 시간을 최소화하는 궤도를 구하는 것이다.

이 분야는 지금까지 여러 연구자들에 의하여 많은 연구가 수행되어 왔다. 그 한가지 방법은 최적 제어 이론을 응

* 경남대학교 기계공학부

용하는 것이다^{1), 2)}. 이 방법은 궁극적으로 경계치 문제 (boundary value problem)의 해를 구하는 것으로 요약되는데 로봇팔의 동역학이 매우 복잡하고 관절끼리의 연상 (coupling)이 커서 해를 구하기가 어렵다. 더구나 동역학의 해를 구하는 과정은 시간 영역에서의 수치 적분을 포함하게 되는데 이 과정에서 무시하기 어려운 계산 오차가 누적되어 해의 신뢰성이 감소된다.

다른 한가지 방법은 적자 생존 개념에 바탕을 둔 유전 알고리즘 (genetic algorithm)을 이용하는 것이다.³⁾ 이 방법은 전역 최적 운동 (globally optimal motion)을 구하는데 적합하지만 아직 초보적인 수준이고 더구나 근본적으로 해석적인 (analytical) 방법은 아니다.

또 다른 유용한 방법은 비선형 계획법 (nonlinear programming)을 이용하는 것인데⁴⁻⁷⁾, 지금까지의 연구는 해를 구하는 방법에서 본질적으로 다른 두 가지 과정을 반복적으로 사용하고 있다. 즉, 이 두 가지 과정이란 1) 제어점^{4), 5)} 등을 이용하여 기하학적 경로를 구하는 것 그리고 2) 이 경로 상에서 최적 속도 분포를 구하는 것이다. 이런 방법은 최적화라는 관점에서 완전한 방법은 아니다.

저자는 이전의 연구⁶⁾에서 각각의 관절 변위를 유한 개의 (finite term) 3차 B-스플라인의 일차 결합 (linear combination)으로 표현하고 비선형 계획법을 이용하여 에너지 최소화 운동을 구하였다. 즉, 위의 두 가지 과정을 하나로 통합하여 유한 차원 벡터 공간에서 최적화를 수행하였다.

본 연구에서는 시간 척도를 새로운 변수로 추가함으로써 운동 시간을 고정시키지 않고 최적화를 수행할 수 있으며 3차 B-스플라인 대신 5차 B-스플라인을 사용함으로써 관절 제어 (관절 변위의 3차 도함수)를 추가로 고려할 수 있다. 요약하면, 시간 최소화 운동을 구하는 최적 제어 문제를 유한 차원 벡터 공간에서의 비선형 계획법 문제로 변환하여 해를 구하고자 한다.

2. 연속계로서의 공식화

로봇팔의 운동 방정식의 일반적인 형태는:

$$\tau = M(\theta)\alpha + V(\theta, \omega) + G(\theta) \quad (1)$$

여기서, τ 는 일반화 관절 구동력 ($n \times 1$), M 은 관성 행렬 ($n \times n$), θ , ω 및 α 는 일반화 관절 변위, 속도 및 가속도 ($n \times 1$), V 는 원심력과 코리올리력 ($n \times 1$) 그리고 G 는

중력 ($n \times 1$)이다.

시간 구간 $[0, T]$ 에서 운동 시간을 최소화해야 하므로 성능 지수 (performance index)는:

$$J = \int_0^T dt = T \quad (2)$$

대부분의 실제적인 경우에 최대 관절 구동력은 관절 속도와 어떤 관계가 있다. 본 연구에서는 Fig. 1과 같이 가정하였다. 즉:

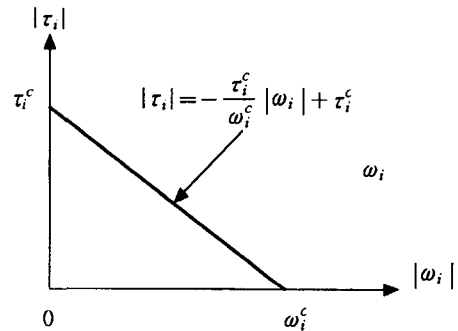


Fig. 1 Actual relation between actuator force and joint velocity of i -th joint.

$$|\tau_i| \leq -\frac{\tau_i^c}{\omega_i^c} |\omega_i| + \tau_i^c, \quad \forall i \in I_n \quad (3)$$

여기서, 뿔첨자 c 는 Fig. 1에 정의한 바와 같이 관절 액추에이터의 성능을 고려한 관절 속도와 관절 구동력의 제한 값을 의미하고 정수 집합 I_n 은 $\{1, 2, \dots, n\}$ 이다. 이 제약 조건을 다시 쓰면:

$$\tau_i^c \leq \tau_i^c \quad (4)$$

여기서, 등가 구동력 (equivalent actuator forces) τ_i^c 는:

$$\tau_i^c = |\tau_i| + \frac{\tau_i^c}{\omega_i^c} |\omega_i| \quad (5)$$

운동 중에서의 불필요한 진동이나 궤도 추적에서의 어려움을 피하기 위하여 관절 제어 제한 조건이 부과되는 것이 좋다. 즉:

$$|\zeta_i| \leq \zeta_i^c, \quad \forall i \in I_n \quad (6)$$

여기서, ζ_i 는 임의의 시간에서 i 번째 관절의 관절 저어 크 그리고 ζ_i^c 는 최대 허용 값이다. 이러한 동적 제약 조건들은 다음과 같이 무차원 항으로 표시될 수 있다.

$$\left(\frac{\tau_i^c}{\tau_i} - 1\right)_+ + \left(\frac{|\zeta_i^c|}{\zeta_i^c} - 1\right)_+ = 0 \quad (7)$$

$$\forall t \in [0, T], \forall i \in I_n$$

여기서, 양의 연산자 $(\cdot)_+$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$(\cdot)_+ \equiv \begin{cases} (\cdot), & \text{if } (\cdot) \geq 0, \\ 0, & \text{if } (\cdot) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

관절 변위 혹은 관절 가속도 등의 제한 조건은 식 (7)과 같은 형태 속에 추가로 포함될 수 있다.

작업 공간 내에 m 개의 정적 장애물($O_1, \dots, O_m \subset E^3$)이 존재하고 이 장애물과 모든 링크($R_1, \dots, R_n \subset E^3$)가 볼록(convex)하다고 가정한다. 그러나 이것들이 $R_i \cap R_j = \emptyset$ 혹은 $O_i \cap O_j = \emptyset$ 일 필요는 없다.

장애물 회피 제약 조건을 유도하기 위하여 성장 거리 개념⁽⁸⁾을 여기서 간략히 소개하고자 한다. E^3 공간 내에 볼록하고 속이 찬(compact) 물체 A 가 존재할 때 성장 모델(growth model) $A(\sigma)$ 는 Fig. 2와 같이 정의된다. 즉:

$$A(\sigma) = \{x^2 \mid x^2 - p = \sigma(x^1 - p), x^1 \in A, \sigma \in R^+\} \quad (9)$$

여기서, R^+ 는 1차원 양의 실수의 집합이고 p 는 A 의 내부에 고정된 점, 즉 종자점(seed point)⁽⁸⁾이다. 로봇 링크 R_i 와 장애물 O_j 사이의 성장 함수(growth function) σ^* 는 다음과 같이 정의된다. 즉:

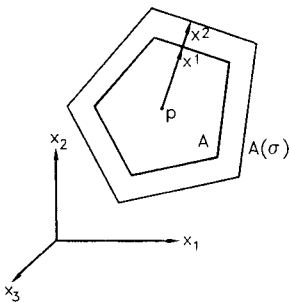


Fig. 2 The growth model $A(\sigma)$ of A .

$$\sigma^*(R_i, O_j) = \min\{\sigma \mid R_i(\sigma) \cap O_j(\sigma) \neq \emptyset\} \quad (10)$$

이 성장 함수는 두 물체가 블록한 다면체(convex polyhedra) 일때 선형계획법(linear programming)으로 구할 수 있다. 이와 같은 정의에 의하여 침투 성장 거리(penetration growth distance)는 다음과 같다.

$$D^p(R_i, O_j) = (d_i + d_j) \{1 - \sigma^*(R_i, O_j)\}_+ \quad (11)$$

여기서, d_i 와 d_j 는 각각 R_i 와 O_j 의 기하학적 크기를 표현하기에 적당한 양의 실수이다. 이와 같은 개념을 이용하면 장애물 회피 제약 조건은 다음과 같이 된다.

$$D^p(R_i, O_j) = 0, \forall t \in [0, T], \forall i \in I_n, \forall j \in I_m \quad (12)$$

여기서, 정수 집합 I_m 은 $\{1, \dots, m\}$ 이다.

운동의 시작과 끝 위치에서 관절 변위, 관절 속도 및 관절 가속도를 다음과 같이 규정한다.

$$\begin{aligned} \theta_i(0) &= \theta_i^s, \omega_i(0) = \omega_i^s, \alpha_i(0) = \alpha_i^s, \\ \theta_i(T) &= \theta_i^f, \omega_i(T) = \omega_i^f, \alpha_i(T) = \alpha_i^f, \forall i \in I_n \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, 관절 가속도의 제한은 부드러운 운동을 위해서 필요하다.

이제, 시간 최소화 운동은 제약 조건인 식 (1) 및 식 (7), (12), (13)을 만족시키면서 T 를 최소화하는 $\theta_i(t)$ 를 구하는 문제로 요약된다.

3. 유한 차원에서의 공식화

임의의 부분 연속 함수는 완전 집합(complete set)의 1차 결합(linear combination)으로 표현될 수 있다. 본 연구에서 5차(quintic) B-스플라인을 완전 집합으로 선택하여 관절 공간에서 로봇팔의 운동을 표현하고자 한다. 본 연구에서 이용한 5차 B-스플라인은 아래와 같다.*

Table 1 Values of $B_j(s)$ and its derivatives at nodes.

| s | $j-3$ | $j-2$ | $j-1$ | j | $j+1$ | $j+2$ | $j+3$ |
|-------------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|
| $120B_j(s)$ | 0 | 1 | 26 | 66 | 26 | 1 | 0 |
| $24B_j'(s)$ | 0 | 1 | 10 | 0 | -10 | -1 | 0 |
| $6B_j''(s)$ | 0 | 1 | 2 | -6 | 2 | 1 | 0 |

* $B_j(s)$ 는 s 가 $j-3 < s < j+3$ 의 범위에 있을 때 양의 실수 값을 가지고 그렇지 않으면 영(zero)이다.

$$B_j(s) = \frac{1}{120} [\{s - (j-3)\}_+^5 - 6\{s - (j-2)\}_+^5 + 15\{s - (j-1)\}_+^5 - 20\{s - j\}_+^5 + 15\{s - (j+1)\}_+^5 - 6\{s - (j+2)\}_+^5 + \{s - (j+3)\}_+^5], s \in [-\infty, \infty] \quad (14)$$

여기서 j 는 임의의 정수이고 s 는 경로 매개 변수이다. 로봇팔의 운동을 엄밀하게 표현하기 위하여 무한개의 B-스플라인이 필요하지만 유한 개로도 최소 오차 노름 (nimum error norm) 개념에 의하여 유일(unique) 하게 표현할 수 있다. 따라서 관절 변위를 아래와 같이 표현한다.**

$$\theta_i(s) = \sum_{j=-2}^{k+2} C_{ij} B_j(s), S = \beta t, t \in [0, T], s \in [0, k], i \in I_n \quad (15)$$

여기서, β 는 시 불변 척도(time-invariable scale factor)로서 상수 k 와 더불어 전체 운동 시간($T=k/\beta$)을 정의한다. 5차 B-스플라인이 C^4 함수이므로 관절 속도와 관절 가속도는 식 (15)를 경로 매개 변수 s 에 대하여 미분하여 구할 수 있다. 즉,

$$\omega_i(s) = \beta \sum_{j=-2}^{k+2} C_{ij} B_j'(s), \alpha_i(s) = \beta^2 \sum_{j=-2}^{k+2} C_{ij} B_j''(s) \quad (16)$$

여기서, $(\cdot)', (\cdot)''$ 은 s 에 대한 1차 및 2차 미분이다. 스플라인들이 선형 독립이고 s 와 t 는 시 불변 척도 β 에 의하여 1 대 1 대응을 이루므로 $\{\beta, C_{ij}\}$ 는 $R^{n(k+5)+1}$ 차원 벡터 공간을 형성하고 이 공간은 운동 시간이 고정되지 않은 근사 로봇팔 운동의 집합이다. 로봇팔의 운동이 식 (15), (16)과 같이 표현되면 운동의 시작과 끝 위치에서의 조건인 식 (13)은 Table 1을 이용하여 아래와 같이 스플라인의 계수들에 관한 식으로 바꿀 수 있다. 즉,

$$C_{i,-2} + 26C_{i,-1} + 66C_{i,0} + 26C_{i,1} + C_{i,2} = 120\theta_i^s \quad (17)$$

$$-C_{i,-2} - 10C_{i,-1} + 10C_{i,1} + C_{i,2} = \frac{24\omega_i^s}{\beta} \quad (18)$$

$$C_{i,-2} + 2C_{i,-1} - 6C_{i,0}$$

$$+ 2C_{i,1} + C_{i,2} = \frac{6\alpha_i^s}{\beta^2} \quad (19)$$

$$C_{i,k-2} + 26C_{i,k-1} + 66C_{i,k} + 26C_{i,k+1} + C_{i,k+2} = 120\theta_i^f \quad (20)$$

$$-C_{i,k-2} - 10C_{i,k-1} + 10C_{i,k+1} + C_{i,k+2} = \frac{24\omega_i^f}{\beta} \quad (21)$$

$$C_{i,k-2} + 2C_{i,k-1} - 6C_{i,k} + 2C_{i,k+1} + C_{i,k+2} = \frac{6\alpha_i^f}{\beta^2} \quad (22)$$

이 식들을 이용하여 위의 벡터 공간의 차원을 $6n$ 만큼 감소시킬 수 있다. 즉, 식 (17), (18), (19)를 $C_{i,-2}, C_{i,-1}, C_{i,0}$ 에 관하여, 그리고 식 (20), (21), (22)를 $C_{i,k}, C_{i,k+1}, C_{i,k+2}$ 에 관하여 정리하고 식 (15)에 대입하면 관절 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\theta_i(s) = F_i^s(s) + \sum_{j=1}^{k-1} C_{ij} B_j^d(s) + F_i^f(s) \quad (23)$$

여기서, 운동의 시작과 끝 위치에서의 경계 조건을 표현하는 제약 스플라인 $F_i^s(s), F_i^f(s)$ 와 수정된 스플라인 $B_j^d(s)$ 는 부록 A에 기술한다.

식 (23)에 의하여 관절 속도, 관절 가속도 및 관절 제어크는 다음과 같다.

$$\omega_i = \beta \left[F_i^{s1}(s) + \sum_{j=1}^{k-1} C_{ij} B_j^{d1}(s) + F_i^{f1}(s) \right] \quad (24)$$

$$\alpha_i = \beta^2 \left[F_i^{s2}(s) + \sum_{j=1}^{k-1} C_{ij} B_j^{d2}(s) + F_i^{f2}(s) \right] \quad (25)$$

$$\zeta_i = \beta^3 \left[F_i^{s3}(s) + \sum_{j=1}^{k-1} C_{ij} B_j^{d3}(s) + F_i^{f3}(s) \right] \quad (26)$$

이제, $\{\beta, C_{ij}\}$ 는 $R^{n(k+1)+1}$ 차원 벡터 공간을 형성하고 이 공간은 운동 시간이 고정되지 않은 근사 점 대 점 로봇팔 운동(point-to-point manipulator motion)의 집합이다.

동적 제약 조건과 장애물 제약 조건은 충분히 큰 가중 계수와 함께 통합된 성능 지수에 포함될 수 있다. 즉:

$$J = J_1 + w_d J_d + w_o J_o \quad (27)$$

* 임의의 시간에서 로봇팔의 운동은 6개의 스플라인으로 표현된다. 예를 들면, 만일 s 가 $j \leq s \leq j+1$ 일때 $B(s)(i=j-2, \dots, j+3)$ 이외에는 모두 영이다. 또한 $[0, T]$ 구간에서의 전체 운동은 $k+5$ 개의 스플라인 $B(s)(j=-2, \dots, k+2)$ 으로 표현된다.

여기서:

$$J_i = \left(\frac{k}{\beta}\right)^2 \quad (28)$$

$$J_d = \sum_{j=0}^l \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\tau_i^c}{\tau_i^e} - 1\right)_+^2 + \left(\frac{|\zeta_i^c|}{\zeta_i^e} - 1\right)_+^2 \right\} \right]_{s=j\Delta s} \quad (29)$$

$$J_o = \sum_{k=0}^l \left[\sum_{j=1}^m \{D^p(R_i, O_j)\}^2 \right]_{s=k\Delta s}, \quad (30)$$

$k \neq \text{end of } s$

$$\Delta s = \frac{k}{l} \quad (31)$$

전체 구간 $[0, k]$ 를 l 개의 등 구간으로 나눈다. 여기서 사용된 제품들은 단지 비선형 계획법에서의 수렴을 쉽게 하는 역할만 한다.

이제, 점 대 점 시간 최소화 운동을 찾아내는 것은 제약 조건인 식 (1), (23)~(26)을 만족시키면서 식 (27)을 최소화하는 $R^{(k-1)+1}$ 공간 내의 점 $\{\beta, C_{ij}\}$ 를 찾아내는 것으로 요약된다.

4. 비선형 계획법에 의한 최적화

$\{\beta, C_{ij}\}$ 에 임의의 초기 값이 주어져서 로봇팔의 운동이 정해지면 $l+1$ 개의 절점에서 식 (23), (24), (25), (26), (1), (5), (11)의 값을 차례로 계산할 수 있고 식 (28), (29), (30)을 계산하여 성능지수인 식 (27)을 계산할 수 있다. 따라서 제약 조건 없는 다차원 최소화 기법을 사용할 수 있고 본 연구에서는 BFGS법⁽¹⁰⁾을 사용하였다. 더구나 식 (1)이 폐형식(closed form)으로 존재하지 않는다 하더라도 외향 및 내향 반복법(outward and inward iteration method)⁽¹¹⁾을 사용하여 구동력을 정확하게 계산할 수 있다.

BFGS법에서 탐색방향을 구하기 위해서는 식 (27)의 $\beta, C_{ij}(i=1, \dots, n; j=1, \dots, k-1)$ 에 관한 구배가 계산되어야 한다. 식 (27)을 $\{\beta, C_{ij}\}$ 의 항으로 직접 표현하는 것은 불가능하지만 구배는 수치적으로 계산할 수 있다. 즉 양과 음의 증분($\pm \delta_g$)을 $\{\beta, C_{ij}\}$ 의 한 원소에 가하고 나머지 원소를 고정시킨 채, 식 (27)을 두 번 계산하면 된다(유한 차분법). β 는 J_i 와 J_d 에만, 그리고 C_{ij} 는 J_d 와 J_o 에만 영향을 미친다. 또한, J_o 는 기하학적 경로에만 의존한다. 더구나 C_{ij} 는 구간 $j-3 \leq s/j+3$ 에만 영향을 미친다. 이런

영향들을 주의 깊게 고려하면 구배를 계산하는 시간을 크게 절약할 수 있다. 실제 계산에서 증분값(δ_g)으로 $\{\beta, C_{ij}\}$ 의 E_2 노음의 10^{-8} 을 사용하였고 수치 정밀도는 배정도(double precision)를 사용하였다.

BFGS법에 의하여 탐색방향이 결정되면 1차원 최소화(직선 탐색)를 수행해야하고 황금 분할 탐색법(golden section search method)을 이용하였다. 이 직선 탐색에서 불확실 구간(interval of uncertainty)을 20회 갱신한 후 2차 함수 보간으로 최소 점을 계산하였다.

한 최적화(BFGS법) 과정에서 다음의 수렴 조건이 부과된다.

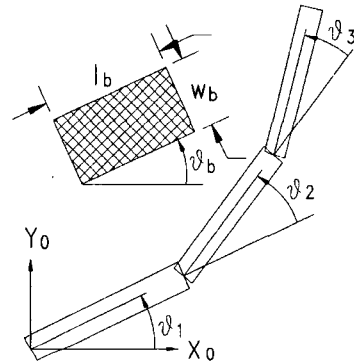


Fig. 3 Planar 3-link manipulator and an obstacle.

$$(J^{*i-1} - J^i) / J^{*i-1} \leq \epsilon_j \quad (32)$$

여기서, J^i 는 i 번째 직선 탐색에서 식 (27)의 최소 값이다. 식 (32)를 만족시켜서 한 최적화 과정이 끝나면 다음 조건의 만족 여부를 검사한다.

$$J_d \leq \epsilon_d, \quad J_o \leq \epsilon_o \quad (33)$$

실제 계산에서 장애물을 실제보다 약간 크게, 그리고 동적인 허용 값을 실제보다 약간 작게 가정하면 이 조건은 실제의 제약 조건을 만족시킬 수 있다.

식 (33)이 만족되면 계산을 끝내고 그렇지 않으면 w_d, w_o 에 각각 100을 곱하여 최적화(BFGS법) 과정을 다시 시작한다. 물론 앞 단계에서의 최적 운동을 초기 추정치로 사용한다. 최초의 w_d, w_o 값은 각각 0.1, 10으로 넣는다. 이런 초기 값은 적당히 작지만 하면 수렴에는 영향을 미치지 않고 단지 최적화 과정의 전체 횟수에만 영향을

다. $\epsilon_j, \epsilon_d, \epsilon_o$ 의 값으로 $10^{-8}, 10^{-3}, 10^{-5}$ 을 사용하였다.

본 기법에서 초기 추정 운동은 임의로 잡아도 된다. 하지만 빠른 수렴을 위해서 초기 추정 운동을 아래와 같이 계산하였다. 즉 운동 시간을 고정시킨 채 다음의 오차 놈 제곱을 최소화하도록 또 하나의 BFGS법을 적용하였다. 두배는 역시 유한 차분법을 사용하여 구하였다.

$$\begin{aligned} & \text{find } C_{ij} \in R^{n(k-1)} \\ & \min \sum_{j=1}^{l-1} \left[\sum_{i=1}^n \{ \theta_i^p(s) - \theta_i(s) \}^2 \right]_{s=j\Delta s} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, $\theta_i^p(s)$ 는 식 (13)를 만족시키는 5차 다항식 [쿠룩 B]이고 $\theta_i(s)$ 는 식 (23)이다.

정수 k 와 l 에는 20과 100을 각각 배당하였다. 장애물 c 없는 경우 l/k 의 값은 2 혹은 3이 적당하다. 그러나 J_o 는 $l+1$ 개의 절점에서만 장애물 회피를 보장하므로 l 값이 작으면 장애물 회피가 불완전하거나 수렴이 불안정해질 수 있다.

Table 2 Specifications of the model.

| | link 1 | link 2 | link 3 |
|---------------|---------|---------|---------|
| length | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| cross section | 0.1×0.1 | 0.1×0.1 | 0.1×0.1 |
| mass | 50 | 30 | 20 |

Table 3 Specifications of the obstacles.

| angle (θ_b , deg.) | length (l_b) | width (w_b) | X_0 of center | Y_0 of center |
|-------------------------------|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| -45 | 0.5 | 0.3 | 1.25 | 0.4 |
| 45 | 0.5 | 0.3 | -1.25 | 0.4 |

침투 성장 거리는 선형계획법으로 계산된다. 선형 계획법 중에서 active set method⁽¹²⁾가 이 문제를 계산하기에 적당하다⁽⁸⁾. 링크가 장애물에서 충분히 멀리 떨어져 있을 때 이 침투 성장 거리를 계산하지 않음으로써 계산 시간을 절약할 수 있다. 이 거리 정보는 한 직선 탐색에서 바로 직선의 성능 지수를 계산할 때 언어질 수 있다. 그러나 직선 탐색을 새로 시작할 때에는 모든 절점에서 이 거리를 다시 계산하는 것이 좋다. 실제의 계산에서 로봇팔의 마지막 링크에 대해서만 모든 장애물과의 침투 성장

거리를 계산함으로써 계산 시간을 절약하였다.

모든 프로그램은 FORTRAN으로 작성하였고 기본 함수 라이브러리 이외에는 어떤 상업적 프로그램도 사용하지 않았다.

5. 예제 및 고찰

5.1 예제

예제 모델은 평면 3절 로봇팔(Fig. 3)이고 관절은 모두 회전 대우이다. 본 논문에서 제안한 방법은 특별히 많은 계산량의 증가 없이도 공간기구에 적용할 수 있지만 본 기법의 특징과 장단점을 그림으로 확인하기 쉽도록 평면 기구를 선택하였다. 모든 링크는 균질의 직사각형 형태(Table 2)이므로 관성모멘트는 자체로 계산된다. 중력은 Fig. 3의 음의 Y_0 방향으로 작용한다. 모든 마찰은 무시되었다.

장애물은 모두 정적(static)이고 역시 직사각형으로 단 순화되었다(Fig. 3 및 Table 3). 모든 링크와 장애물에서 성장 모델의 종자점은 기하학적 중심으로 두었고 침투 성장 거리에서 d_r, d_s 는 대각선의 절반으로 두었다.

다음의 3가지 예제를 시험하였다.

<예제 1> $\tau_1^c = 3000, \tau_2^c = 1500, \tau_3^c = 300, \omega_1^c = \omega_2^c = \omega_3^c = 6$, 관절 저어크의 제한이 없고 장애물이 없다.

<예제 2> $\tau_1^c = 3000, \tau_2^c = 1500, \tau_3^c = 300, \omega_1^c = \omega_2^c = \omega_3^c = 6, \zeta_1^c = \zeta_2^c = \zeta_3^c = 1000$, 장애물이 없다.

<예제 3> $\tau_1^c = 3000, \tau_2^c = 1500, \tau_3^c = 300, \omega_1^c = \omega_2^c = \omega_3^c = 6, \zeta_1^c = \zeta_2^c = \zeta_3^c = 1000$, Table 3의 2개의 장애물이 있다.

모든 예제에 공통으로 로봇팔은 관절 공간에서 $(\pi/4 - \pi/4 - \pi/4)$ 에서 $(3\pi/4 \pi/4 \pi/4)$ 까지 움직이고 운동의 시작점과 끝점에서 관절 속도와 관절 가속도는 모두 영이다.

초기 운동은 위에서 언급한 5차 다항식으로 표시되는

Table 4 Initial and minimum moving times.

| initial | minimum | | |
|---------|----------|----------|----------|
| | Ex. 1 | Ex. 2 | Ex. 3 |
| 0.5 | 0.578173 | 0.605458 | 0.828008 |
| 1.0 | 0.578177 | 0.605468 | 0.845635 |
| 2.0 | 0.578232 | 0.605439 | 0.824641 |

운동이다. 본 연구에서 전역 최적 운동(globally optimal motion)에 관한 이론적 증명이 불가능하기 때문에 각각의 예제는 초기 운동시간을 0.5, 1.0 및 2.0(sec)로 하여 3회 계산되었다. 모든 단위는 SI계이다.

5.2 수렴 특성

〈예제 1〉 및 〈예제 2〉에서 수렴은 극히 안정적이다 (Table 4). 즉 서로 다른 3가지 초기 운동 시간에서 최소 운동 시간은 거의 정확히 일치하였다. 〈예제 3〉에서 최소 운동 시간은 초기 운동 시간에 따라 약간의 차이가 있다. 그 이유는 Fig. 4에서 논의하겠다.

〈예제 3〉의 세 번째 계산(초기 운동시간이 2초)에서 모든 변수 값을 로그 스케일로 Fig. 4에 그렸다. 여기서 알 수 있는 바와 같이 수렴은 대체로 정상적이다. 그러나 최적점 근처에서 구배의 놈(norm)이 영(zero)에 충분히 접근(최적점이 되기 위한 필요조건)하지 않았고(Fig. 4(b)), 매 직선 탐색당 J 의 감소량이 최적점 근처에서 약간 불안정하다(Fig. 4(c)). 이것 때문에 최소 운동 시간이 약간 다르게 나타났다. 최적 운동에 가까우면 로봇 링크는 장애물의 표면에 접촉하게 되고 따라서 장애물의 모서리가 J_0 의 비선형 성을 증가시켰기 때문으로 생각된다. 이 결점이 장애물이 없는 〈예제 1〉 및 〈예제 2〉에서는 나타나지 않았다. 또한, 최적화가 수행된 $n(k-1)+1$ 차원 벡터 공간에서 $n(k-1)$ 차원은 관절공간에서 기하학적 경로를 결정하는 자유도인 반면 운동 시간을 결정하는 자유도는 1이다. 이와 같은 자유도간의 불균형도 안정된 수렴을 어렵게 한 것으로 추정된다.

이러한 사소한 결점에도 불구하고 수렴은 전체적으로 안정되어 있다고 말할 수 있다. 왜냐하면 매 직선 탐색당 성능지수의 감소량이 10^{-5} 이하가 될 때까지 서서히 감소하였기 때문이다(Fig. 4(c)).

Fig. 4에서 나타난 바와 같이 전체적으로 2번의 BFGS 과정이 필요하였다. 첫째 과정에서 근사적인 해가 구해졌고 둘째 과정에서 식 (33)을 만족시키기 위하여 운동시간이 다소 증가하였다. 이 특징은 모든 예제에서 동일하였다.

또 다른 공통적인 특징은 초기 운동 시간이 0.5 초일 때 더 많은 직선탐색이 소요되었다는 것이다.

5.3 시간 최소화 운동

〈예제 1〉과 〈예제 2〉에서 결과로 계산된 관절 저어크와 등가 구동 회전력을 Fig. 5와 Fig. 6에 각각 나타내었다. 여기서 알 수 있는 바와 같이 등가 구동 회전력이 거

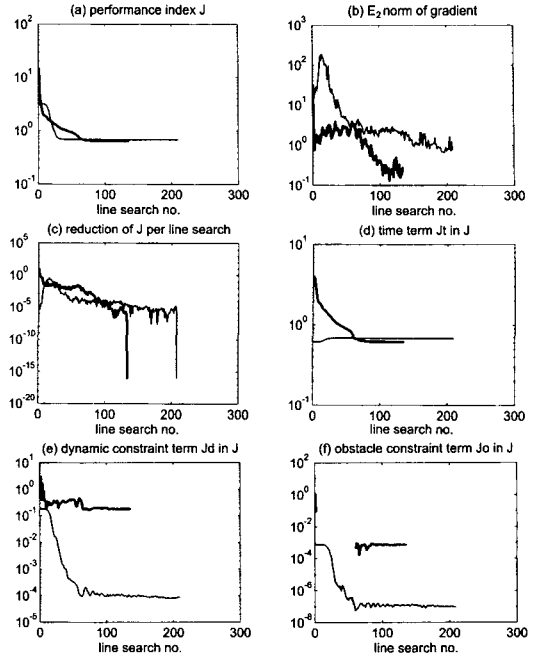


Fig. 4 Detailed convergence property in Ex. 3. Thick/thin lines represent 1st/2nd BFGS procedures.

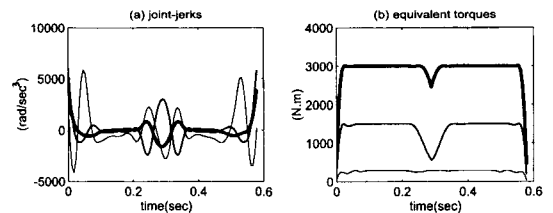


Fig. 5 Resultant joint jerks and equivalent torques in Ex. 1. Thick/medium/thin lines represent 1st/2nd/3rd joints.

의 모든 운동구간에서 포화되어 있다. 또한 관절 저어크의 제한이 부과되지 않았을 때(Fig. 5)와 부과되었을 때(Fig. 6)의 특징도 잘 나타나고 있다.

〈예제 3〉의 최적 운동에서의 모든 동적인 값을 Fig. 7에 나타내었다. 이 예제에서는 동역학적인 제약 조건과 장애물 제약 조건이 모두 부과되었고 더구나 2개의 장애물이 로봇팔에 아주 가깝게 위치하고 있다. 이 그림에서 본 기법의 장점이 아주 잘 나타난다. 특히, 그림 (c)의 관절 가속도의 변화에서 첫째 관절과 다른 두 관절이 대칭에 가깝다. 즉, 관절끼리의 연성에 의하여 관절 회전력이 크게 감소된다.

시간 최소화 운동을 일정시간 간격으로 Fig. 8에 나타

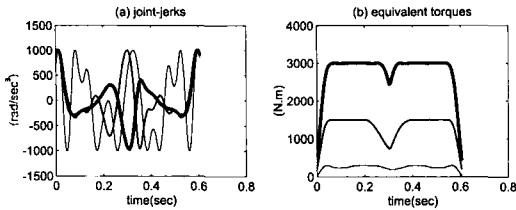


Fig. 6 Resultant joint jerks and equivalent torques in Ex. 2. Thick/medium/thin lines represent 1st/2nd/3rd joints.

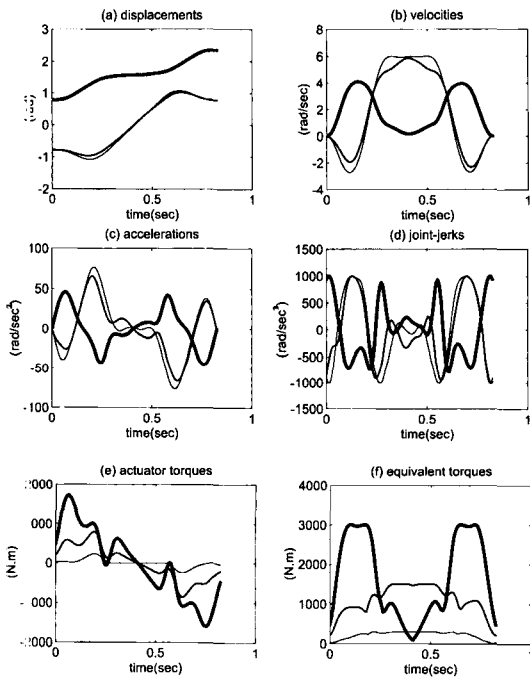


Fig. 7 Resultant dynamic property in Ex. 3. Thick/medium/thin lines represent 1st/2nd/3rd joints.

내었다. <예제 1>의 운동은 <예제 2>와 유사하였다.

본 예제에서 계산시간은 <예제 1> 및 <예제 2>에서 대략 150초 그리고 <예제 3>에서 대략 300초가 소요되었다. 계산은 166 Mhz pentium pc에서 실행되었다.

6. 결 론

5차 B-스플라인과 시간 척도를 이용하여 운동 시간이 고정되지 않은 점 대 점 로봇팔의 운동을 유한 차원 벡터 공간상의 한 점으로 표현하고 비선형 계획법을 이용하여 장애물 회피 시간 최소화 운동을 구하였다.

여기서 구해진 최적 운동이 유일한(unique) 것인가에

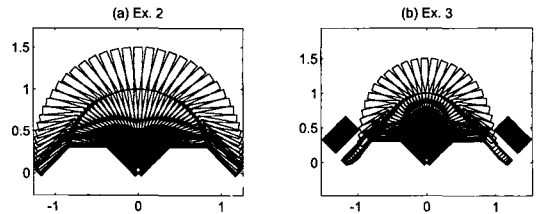


Fig. 8 Minimum-time motions in equal time intervals.

대한 이론적 증명은 불가능하지만 3자유도 평면 로봇팔에서 서로 다른 초기 운동 시간에 대하여 수치 실험으로 구해진 결과는 일치하였다.

역동역학의 해를 이용하는 비선형 계획법이 동역학의 해를 이용하는 최적 제어 이론보다 최적 궤도 계획 문제에서 더 좋은 해를 구할 수 있다. 왜냐하면 역동역학의 해는 자유도가 높은 계에서도 정확하게 구해질 수 있기 때문이다.

참 고 문 헌

1. Sundar, S. and Shiller, Z., "Time-Optimal Obstacle Avoidance", Proc. IEEE Int'l Conference on Robotics and Automation, Vol. 3, pp. 3075-3080, 1995.
2. Bessonnet, G. and Lallemand, J. B., "On the Optimization of Robotic Manipulator Trajectories With Bounded Joint Actuators or Joint Kinetic Loads Considered as Control Variables", Trans. ASME, J. Dyn. Sys. Meas. Cont., Vol. 116 No. 4, pp. 819-826, 1994.
3. Toogood, R., Hao, H. and Wong, C., "Robot Path Planning Using Genetic Algorithms", Proc. IEEE Int'l Conference on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 1, pp. 489-494, 1995.
4. Yamamoto, M., Isshiki, Y. and Mohri, A., "Collision Free Minimum Time Trajectory Planning for Manipulators Using Global Search and Gradient Method", Proc. IROS Int'l Conference on Intelligent Robots and Systems, Vol. 3, pp. 2184-2191, 1994.
5. Jamhour, E. and Andre, P. J., "An Opti-

mization-Based Algorithm for Designing Free-Form Trajectories Under Various Constraints", Proc. IFAC Conference on Integrated Systems Engineering, Post-print Vol., pp. 299-304, 1994.

6. Zhang, Y., "Point-to-Point Robot Motion Optimization Based on the State Parameterization", Proc. American Control Conference, Vol. 2, pp. 1732-1736, 1994.
7. 박종근, "로봇팔의 장애물 중에서의 최적 운동에 관한 연구", 대한 기계학회 논문집 제 21권 4호 pp. 596-610, 1997.
8. Gilbert, E. G. and Ong, C. G., "New Distances for the Separation and Penetration of Objects", Proc. IEEE Int'l Conference on Robotics and Automation, pp. 579-586, 1994.
9. Prenter, P. M., "Splines and Variational Methods", John Wiley & Sons, 1975.
10. Fletcher, R., "Practical Method of Optimization", 2nd ed., John Wiley & Sons, 1987.
11. Craig, J. J., "Introduction to Robotics", Mechanics and Control, Addison-Wesley, 1986.
12. Best, M. J. and Ritter, K., "Linear Programming, Active Set Analysis and Computer Programs", Prentice-Hall, 1985.

부 록

A. 제약 스플라인 및 수정된 스플라인

$$F_i^s(s) = \left(\frac{50\theta_i^s}{3} + \frac{16\omega_i^s}{\beta} + \frac{55\alpha_i^s}{6\beta^2}\right)B_{-2}(s) \\ - \left(\frac{5\theta_i^s}{3} + \frac{4\omega_i^s}{\beta} + \frac{11\alpha_i^s}{12\beta^2}\right)B_{-1}(s) \\ + \left(\frac{20\theta_i^s}{9} + \frac{4\omega_i^s}{3\beta} + \frac{2\alpha_i^s}{9\beta^2}\right)B_0(s)$$

$$F_i^f(s) = \left(\frac{20\theta_i^f}{9} - \frac{4\omega_i^f}{3\beta} + \frac{2\alpha_i^f}{9\beta^2}\right)B_k(s) \\ - \left(\frac{5\theta_i^f}{3} - \frac{4\omega_i^f}{\beta} + \frac{11\alpha_i^f}{12\beta^2}\right)B_{k+1}(s) \\ + \left(\frac{50\theta_i^f}{3} - \frac{16\omega_i^f}{\beta} + \frac{55\alpha_i^f}{6\beta^2}\right)B_{k+2}(s) \\ B_1^d(s) = -\frac{40}{3}B_{-2}(s) + \frac{7}{3}B_{-1}(s) \\ - \frac{10}{9}B_0(s) + B_1(s) \\ B_2^d(s) = -\frac{7}{3}B_{-2}(s) + \frac{1}{3}B_{-1}(s) - \frac{1}{9}B_0(s) + B_2(s) \\ B_j^d(s) = B_j(s); \quad j \in \{3, \dots, k-3\} \\ B_{k-2}^d(s) = B_{k-2}(s) - \frac{1}{9}B_k(s) \\ + \frac{1}{3}B_{k+1}(s) - \frac{7}{3}B_{k+2}(s) \\ B_{k-1}^d(s) = B_{k-1}(s) - \frac{10}{9}B_k(s) \\ + \frac{7}{3}B_{k+1}(s) - \frac{40}{3}B_{k+2}(s)$$

B. 경계조건을 만족시키는 5차 다항식

$$\theta_i^p(s) = a_i s^5 + b_i s^4 + c_i s^3 + d_i s^2 + e_i s + f_i \\ a_i = \frac{\alpha_i^f - \alpha_i^s}{2\beta^2 k^3} - \frac{3\omega_i^f + 3\omega_i^s}{\beta k^4} + \frac{6\theta_i^f - 6\theta_i^s}{k^5} \\ b_i = -\frac{2\alpha_i^f - 3\alpha_i^s}{2\beta^2 k^2} + \frac{7\omega_i^f + 8\omega_i^s}{\beta k^3} - \frac{15\theta_i^f - 15\theta_i^s}{k^4} \\ c_i = \frac{\alpha_i^f - 3\alpha_i^s}{2\beta^2 k} - \frac{4\omega_i^f + 6\omega_i^s}{\beta k^2} + \frac{10\theta_i^f - 10\theta_i^s}{k^3} \\ d_i = \frac{\alpha_i^s}{2\beta^2}; \quad e_i = \frac{\omega_i^s}{\beta}; \quad f_i = \theta_i^s \\ s = \beta t, \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, k]$$