Comm. Korean Math. Soc. **13** (1998), No. 3, pp. 589–594

$\mathbb{H}^3$ 의 등근공의 구별짓기

이 승 원, 고 성 은

요약문. 쌍곡공간 $\mathbb{H}^3$ 에 들어있는 닫힌 곡면의 주곡률함수가 특별한 함수 관계를 만족시킨다면 그 곡면은 둥근공임을 보였다. 이 결과를 이용하여 Gauss-Kronecker 곡률이 상수인 닫힌 곡면은 둥근공 뿐이 없음도 보였다.

1. 소개

3차원 Riemann 다양체의 곡면 M 에 대하여, 주곡률함수를 각각 r_1, r_2 라 고 할 때 이들이 적당한 함수관계를 만족시키면, 즉, 영이 아닌 함수 f_1, f_2 가 존재하여

$$f_1 dr_1 + f_2 dr_2 = 0$$

을 만족시키면 M 을 `Weingarten` **곡면**이라고 부른다. 특히, 주곡률함수의 하나가 다른 하나의 감소함수로 표현되면, 즉, 두 함수 f_1, f_2 를 양의 값을 갖도록 택할 수 있으면 M 을 **특별한** Weingarten 곡면이라고 부른다.

3차원 Euclid 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 곡면에 대하여, 닫힌(경계가 없고 옹골찬) 볼록 곡면으로서 특별한 Weingarten 곡면은 둥근공임이 알려져 있다 [2]. 따라서, 곡률이 일정하며 단순히 연결된 또 다른 3차원 Riemann 다양체인 $\mathbb{H}^3$ 의 곡면에 대하여서도 유사한 결과가 성립하는가 하는 질문이 자연스러울 것이다.

이 논문에서는 이 질문에 답하며 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

Received March 23, 1998. Revised May 19, 1998.
1991 Mathematics Subject Classification: 53A40, 53C42.
Key words and phrases: Weingarten 곡면, Gauss-Kronecker 곡률, 배꼽점.
이 연구는 KOSEF 96-0701-02-01-3 과 BSRI-97-1438 의 지원을 받았음.

정리 1. $\mathbb{H}^3$의 닫힌 곡면으로서 *Gauss-Kronecker* 곡률이 *1*보다 큰 특별한 *Weingarten* 곡면은 둥근공이다.

정리 2. $\mathbb{H}^3$의 닫힌 곡면으로서 *Gauss-Kronecker* 곡률이 상수인 곡면은 둥근공이다.

Gauss-Kronecker 곡률이란 주곡률의 곱 $r_1 r_2$ 를 말한다.

위의 정리에서는 $\mathbb{H}^3$ 에 들어 있는(immersed) 곡면을 생각하지만, 겹침이 없이 들어 있는(embedded) 곡면만을 생각한다면, Gauss-Kronecker 곡률이나 평균곡률이 영이 아닌 상수인 닫힌 곡면은 둥근공임이 이미 알려져 있다 [4]. 한편, 단순히 들어 있는 닫힌 곡면에 대하여서는 Gauss-Kronecker 곡률과 평균곡률의 비가 영이 아닌 상수이면 둥근공임이 알려져 있는데 [3], 이 결과와 위의 정리는 서로를 알려주지 못한다.

2. 곡면의 방정식

M 을 $\mathbb{H}^3$ 의 곡면이라고 하고, e_1, e_2, e_3 를 $\mathbb{H}^3$ 의 정규직교틀로서 e_1, e_2 는 곡면 M 에 접하며 e_3 는 M 에 수직하다고 하자. w_1, w_2, w_3 를 e_1, e_2, e_3 에 대한 쌍대정규직교틀이라고 하면, $\mathbb{H}^3$ 의 곡률은 일정하게 -1 이므로 이들은 다음과 같은 구조방정식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} dw_i &= -\sum_j w_{ij} \wedge w_j, \\ & \quad w_{ij} + w_{ji} = 0, \\ dw_{ij} &= -\sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} - w_i \wedge w_j, \quad (i,j,k = 1,2,3). \end{aligned}$$

이 방정식을 M 에서만 생각하면, M 에서는 $w_3 \equiv 0$ 이므로

$$\begin{cases} dw_1 = -w_{12} \wedge w_2, \\ dw_2 = -w_{21} \wedge w_1, \end{cases} \tag{1}$$

$$
(2) \qquad \begin{cases} dw_{12} = -w_{13} \wedge w_{32} - w_1 \wedge w_2, \\ dw_{23} = -w_{21} \wedge w_{13}, \\ dw_{31} = -w_{32} \wedge w_{21} \end{cases}
$$

를 얻는다. 이제 e_1, e_2 를 M 의 주방향, r_1, r_2 를 이에 따른 주곡률이라고 하면

$$
(3) \qquad \begin{cases} w_{31} = r_1 w_1, \\ w_{32} = r_2 w_2 \end{cases}
$$

를 만족시킨다. 이 식의 외미분을 계산하고 (1), (2)를 이용하면 다음 방정식을 얻는다.

$$
(4) \qquad \begin{cases} dr_1 \wedge w_1 = (r_1 - r_2) w_{12} \wedge w_2, \\ dr_2 \wedge w_2 = (r_1 - r_2) w_{12} \wedge w_1. \end{cases}
$$

이제,

$$
\begin{aligned} w_{12} &= \lambda w_1 + \mu w_2, \\ d\lambda &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, \\ d\mu &= \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \end{aligned}
$$

라고 하면 (1) $\sim$ (4)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
(5) \qquad \begin{cases} dw_1 = -\lambda w_1 \wedge w_2, \\ dw_2 = -\mu w_1 \wedge w_2. \end{cases}
$$

$$
(6) \qquad \begin{cases} dr_1 \wedge w_1 = \lambda (r_1 - r_2) w_1 \wedge w_2, \\ dr_2 \wedge w_2 = \mu (r_2 - r_1) w_1 \wedge w_2. \end{cases}
$$

$$
(7) \qquad r_1 r_2 = -\lambda_2 + \mu_1 - \lambda^2 - \mu^2 + 1.
$$

3. 정리의 증명

[정리 1의 증명] 먼저 M 의 임의의 점 q 에서

$$r_1(q) \geq r_2(q)$$

가 성립하도록 주곡률함수 r_1, r_2 를 택하자. 이렇게 선택하면 r_1, r_2 는 배꼽점(umbilical point)이 아닌 점에서 미분가능하다. 이제 M 은 닫힌 곡면이므로 r_1 값이 최대가 되는 점이 존재한다. 이 점을 p 라고 하면 p 는 배꼽점이거나 배꼽점이 아니다.

(i) 만일 p 가 배꼽점이면

$$r_1(p) = r_2(p)$$

이다. p 가 아닌 점 q 에서의 주곡률 $r_1(q), r_2(q)$ 와 비교하면 부등식

$$r_1(p) \geq r_1(q) \geq r_2(q)$$

이 성립한다. 한편 M 은 특별한 Weingarten 곡면이므로 r_2 는 r_1 에 대한 감소함수이고 따라서

$$r_2(p) \leq r_2(q)$$

이다. 앞의 등식과 부등식들을 종합하면

$$r_1(q) = r_2(q)$$

가 성립한다. 즉, q 도 배꼽점이다.

(ii) 만일 p 가 배꼽점이 아니라면, 배꼽점을 갖고 있지 않은 p 의 근방 U 가 존재한다. M 은 특별한 Weingarten 곡면이고 U 에서 r_1, r_2 는 미분가능하므로 음의 값을 갖는 적당한 함수 f 가 존재하여

$$dr_1 = f\, dr_2$$

이 성립한다. 그러면 (6)의 두번째 식으로부터

$$dr_1 \wedge w_2 = f dr_2 \wedge w_2 = f\mu(r_2 - r_1) w_1 \wedge w_2$$

이고 이 식과 (6)의 첫번째 식으로부터

$$dr_1 = -(r_1 - r_2)(f\mu w_1 + \lambda w_2)$$

을 얻는다. r_1 은 p 에서 최대값을 가지므로

$$\lambda(p) = \mu(p) = 0$$

이고, 따라서 r_1 의 Hessian 의 p 에서의 값은

$$D^2 r_1(p) = -(r_1(p) - r_2(p))(f(p)d\mu(p)w_1(p) + d\lambda(p)w_2(p))$$

와 같이 쓰여진다. 이제

$$d\lambda = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, \quad d\mu = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$$

라고 놓으면,

$$\begin{aligned} D^2 r_1(p)(e_1, e_1) &= -(r_1(p) - r_2(p))f(p)\mu_1(p), \\ D^2 r_1(p)(e_2, e_2) &= -(r_1(p) - r_2(p))\lambda_2(p) \end{aligned}$$

이다. 가정으로부터

$$r_1(p) - r_2(p) > 0$$

이고 r_1 이 p 에서 최대값을 가지므로

$$f(p)\mu_1(p) \geq 0, \quad \lambda_2(p) \geq 0$$

이다. 그런데 $f(p) < 0$ 이므로

$$\mu_1(p) \leq 0, \quad \lambda_2(p) \geq 0$$

이다. 이 사실과 (7)식으로부터 $r_1(p)r_2(p) \leq 1$ 인데, 이것은 M 의 Gauss-Kronecker 곡률에 대한 가정과 모순된다. 따라서, p 는 배꼽점이어야 한다.

(i), (ii)로 부터 M 은 배꼽곡면이다. 한편, $\mathbb{H}^3$ 의 닫힌 배꼽곡면은 둥근공뿐이므로 ([1]의 184쪽) M 은 둥근공이다. □

[정리 2의 증명] 쌍곡공간 $\mathbb{H}^3$ 의 모델

$$\{\,(x, y, z) \mid z > 0\,\}$$

에서 생각하자. 이 모델에서 곡면

$$H_a = \{ (x, y, z) \mid z = a > 0 \}$$

의 주곡률은 각각 상수 1 이다. 정리에서 주어진 곡면을 M 이라고 하면 M 은 옹골차므로 적당한 점 $p \in M$ 에서 적당한 H_a 와 접하게 되는데, 이 점에서의 M 의 주곡률은 H_a 의 주곡률보다 크다. 따라서 상수라고 가정했던 M 의 Gauss-Kronecker 곡률은 1 보다 큰 상수이며 M 은 특별한 Weingarten 곡면이다. 이제 (정리 1)에 의하여, M 은 둥근공이다. □

참고문헌

[1] M. DoCarmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[2] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large*, Lecture Notes in Math. 1000, Springer, Berlin, 1983.

[3] S-E. Koh, *A characterization of round spheres*, Proc. Amer. Math. Soc.에 나올 것임.

[4] S. Montiel, A. Ros, *Compact hypersurfaces: The Alexandrov theorem for higher order mean curvature*, Differential Geometry (B. Lawson, ed.) Pitman Mono. **52** (1991) Longman, New York, 279–296.

건국대학교 이과대학 수학과