

평면 점성 정체 유동 응고 문제에 대한 이론적 해석

A theoretical analysis on the viscous plane stagnation-flow solidification problem

유 주 식*
J. S. Yoo

Key words : Plane stagnation flow(평면 정체 유동), Phase change(상변화), Solidification(응고), Growth of solid(고체의 성장), Heat transfer(열전달)

Abstract

The viscous plane stagnation-flow solidification problem is theoretically investigated. An analytic solution at the beginning of solidification is obtained by expanding the temperature and thickness of solidified layer in powers of time. An exact expression for the steady-state thickness of solidified layer is also obtained. The fluid flow toward the cold substrate inhibits the solidification process. As Stefan number becomes larger, or Prandtl number becomes smaller, the solidification is more strongly inhibited by the fluid flow. The transient heat flux at the liquid side of solid-liquid interface is increased, as Stefan number or Prandtl number is increased.

기 호 설 명

<p>a : 퍼텐셜 흐름 변형 속도, potential flow strain rate</p> <p>C_S : 고체의 비열</p> <p>erf : 에러 함수</p> <p>$erfc$: 보충 에러 함수</p> <p>h_S : 무차원화된 고체의 길이</p> <p>h_{eq} : 평형상태에서의 무차원화된 고체의 길이</p> <p>K : 열전도도</p>	<p>K_R : 고체와 액체의 열전도도 비, K_S/K_L</p> <p>L : 잠열</p> <p>$\text{Log}(x)$: $\text{Log}_{10}(x)$</p> <p>$\text{Nu}(\tau)$: Nusselt 수, $q(\tau)/q_{steady}$</p> <p>Pr : Prandtl 수, ν/α_L</p> <p>$q(\tau)$: 고체와 액체의 경계면의 액체 쪽에서의 열유속, $-\left(\frac{\partial\theta_L(\xi, \tau)}{\partial\xi}\right)_{\eta=1+}$</p> <p>$q_{steady}$: 정상 상태의 $q(\tau)$</p> <p>Ste : Stefan 수, $C_S(T_F - T_0)/L$</p> <p>T : 온도</p>
---	---

* 안동대학교 기계공학 교육과

- T_0, T_I, T_F : 기판의 온도, 유체의 초기 온도, 응고 온도
- t : 시간
- v : 유체의 수직 방향의 속도 성분
- $X(t)$: 고체의 성장 길이
- X_{eq} : 정상 상태의 고체의 성장 길이
- y : 수직 좌표

그리스 문자

- α : 열 확산 계수
- α_R : 고체와 액체의 열 확산 계수의 비, α_S/α_L
- ζ : 무차원 좌표, $\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} y$
- η : 치환된 변수, $y/X(t)$
- θ_L : 액체 영역에서의 무차원 온도, $(T_L - T_I) / (T_F - T_I)$
- θ_S : 고체 영역에서의 무차원 온도, $(T_S - T_0) / (T_F - T_0)$
- θ_R : 온도 비, $(T_I - T_0) / (T_F - T_0)$
- ν : 동점성 계수
- ρ : 밀도
- σ : Neumann 문제에서의 고체의 성장 계수
- τ : 무차원화된 시간, at

하첨자

- L : 액체
- S : 고체
- ∞ : 무한대

1. 서 론

액체에서 고체로의 상변화(phase change) 현상은, 금속의 주조(casting), 음식의 냉동, 얼음의 생성, 열에너지 저장 시스템 등과 같은 넓은 산업적

인 응용 분야로 인해 많은 관심을 받아왔다. 이 분야에 대한 첫 연구는 Stefan에 의해 수행된 극지의 얼음(polar ice) 두께에 대한 연구인 것으로 알려져 있는데, 이러한 이유로 인하여 액체의 응고 문제는 종종 'Stefan 문제'로 불리어지기도 한다.⁽¹⁾ 이와 같은 상변화 문제는 크게 다음과 같은 두 가지의 형태로 분류된다: (1) 고체와 액체에서의 순수한 전도(conduction)에 의한 열전달만을 고려하는 경우, (2) 액체 내에서 유체의 흐름이 있는 경우. 초기의 연구는 액체에서의 유동을 전혀 고려하지 않고 주로 정지해 있는 액체와 고체에서의 순수한 전도(conduction)에 의한 열전달만을 고려하여 온도 분포와 응고(solidification) 혹은 용해(melting) 과정을 조사하였다.⁽²⁾ 그 이후 액체 내에서 유체의 흐름, 즉, 강제대류(forced flow)^(3,4) 혹은 자연대류(natural convection)^(5,6)를 고려한 상변화 문제에 대한 연구도 역시 많이 수행되어 왔다.

강제대류(forced convection)가 있을 때의 상변화에 대한 거의 대부분의 연구들은, 고체와 액체의 경계면에서의 액체 쪽의 대류 열전달률(convective heat transfer rate)을 주어진 일정한 값으로 놓고서 고체에서의 온도 분포와 경계면의 위치를 결정하였다.^(3,4) 즉, 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화는 전혀 고려하지 않았다. 그러나 응고 과정과 액체에서의 온도 분포는 서로 영향을 받을 수가 있다. 액체 영역에서의 비정상(unsteady) 온도 분포를 고려한 연구는 아주 적은데 비교적 근래에 Yoo⁽⁷⁾는 고체와 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화를 모두 고려하여 무한히 큰 평면 원반(disk)의 회전에 의해 일어나는 유동장 하에서의 유체의 상변화 문제를 연구하였다. Yoo⁽⁷⁾의 연구는, 강제대류 하에서의 상변화 문제에 있어서 고체와 액체의 비정상 거동(unsteady behavior)을 모두 고려한 최초의 연구라는 데에 큰 의미를 갖고 있다. Yoo⁽⁷⁾는 특히 고체의 회전(Ω)이 유체의 응고에 미치는 영향에 대해 큰 관심을 두었는데, 원반(disk)의 회전은 고체(X(t))의 성장을 강하게 억제한다는 것을 보였다. 그리고 특히 Stefan 수가 작은 경우에는 경계면의 액체 쪽에서의 열전달률을 일정하다고 가정해도 되지만 Stefan 수가 큰 경우

에는 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화를 고려해야 한다는 것을 보였다.

운동하고 있는 액체의 응고와 관련된 또 하나의 중요한 문제는 금속입자의 분무(metal spray) 과정에서 일어나는 응고 현상이다. 높은 온도의 액체 금속방울(liquid metal droplet)을 응고온도보다 낮은 온도로 유지되고 있는 차가운 기판(cold substrate)에 분사시키면 액체 방울이 변형되면서 기판의 표면에서 액체 금속의 응고가 일어난다. 이와 같은 액체 방울의 변형(deformation) 과정 동안의 상변화 메커니즘(phase-change mechanism)을 연구하는 하나의 방법은, Stefan모델의 Neumann 해를 이용하여 액체와 고체의 경계면의 위치를 결정하는 방법이 있다.^(8,9) 그런데 이 접근 방법의 가장 큰 결점은, 액체의 운동이 응고 과정에 미치는 영향이 전혀 고려되지 않는다는 것이다. 최근에 Rangel and Bian^(10,11)은 비점성 정체 유동(inviscid stagnation flow)에 대한 응고 모델을 만들어서 액체의 운동이 응고 거동에 미치는 영향에 대해 조사하였다. 또한 Bian and Langel⁽¹²⁾은 점성 정체 유동(viscous stagnation flow)에 대한 응고 과정을 조사하여 유체 유동이 있는 경우의 응고에서는 Neumann 해와 달리 응고면의 위치(solidification-front position)의 점근적인 한계(asymptotic limit)가 있다는 것을 보였다. 이들 모델들은, 분무 석출(spray deposition)에서 유체의 흐름이 액적의 응고에 미치는 영향을 보여준다는 데에 의미가 있다. 그리고 가장 최근 Yoo⁽¹³⁾는 회전 원반 시스템에서의 열전달 문제^(14~19)에 관심을 두고서, 응고가 일어나고 있는 경우에 있어서의 고체표면과 고체-액체 경계면의 열전달 특성을 조사하였다. 평면 정체 유동 시스템이나 회전 원반 시스템의 두 경우 모두에 있어서 응고가 진행되고 있는 고체-액체 경계면을 향하여 흐르는 유체의 흐름이 있다. 따라서 두 경우는 서로 비슷한 특성을 많이 보여준다. 액체가 기판을 향해 흐르는 응고 모델은 결정 성장(crystal growth), 결빙(icing), 주조(casting) 등의 여러 가지의 중요한 공학적인 문제에 응용되고 있다.

본 연구에서는 평면 정체 유동 하에서의 점성 유체의 응고 현상을 해석한다. 일정 온도 T_0 로 유

지되고 있는 차가운 기판(cold substrate)을 향하여 유체가 흘러간다. 초기상태에 있어서 유체의 온도는 T_I 로 일정하게 유지되고 있으며 T_I 는 유체의 응고온도 T_F 보다 높다. 그리고 기판의 온도 T_0 는 응고온도 T_F 보다 낮다. 따뜻한 유체가 차가운 기판을 향해 흐르게 되면 자연적으로 고체와 액체의 경계면에서 유체의 응고가 일어나게 된다. Bian and Langel⁽¹²⁾은 수치적인 방법을 통하여 정체 유동 하에서의 응고문제를 조사하였다. 그들은 긴 시간 동안 지배 방정식을 수치적으로 적분하여 응고면의 위치가 점근적인 한계값(asymptotic limit)으로 접근함을 보였다. 본 연구에서는 응고 과정의 초기 단계와 최종 단계에 대한 해석적인 해를 구하여 특히 유체의 유동이 응고 현상에 미치는 영향에 대해 조사한다. 응고의 초기 단계인 $\tau \ll 1$ 에서의 고체의 두께는 $h_S^2(\tau) = b_0 \tau + b_1 \tau^{5/2}$ 으로 표현된다. 여기에서 $b_0 \tau$ 는 유체유동이 없는 Neumann의 해에 해당되며 $b_1 \tau^{5/2}$ 는 유체 유동에 의한 영향을 나타낸다. 모든 경우에 있어서 b_1 은 음의 값을 가짐으로서 유체의 흐름은 그만큼 액체의 응고를 방해한다는 것을 보였다. 그리고 또한 응고가 일어나고 있을 때의 열전달 특성에도 관심을 두고 조사한다.

2. 해 석

고려하고 있는 문제의 물리적인 구조는 Fig.1과 같다. 일정한 온도 T_0 로 유지되고 있는 차가운 기

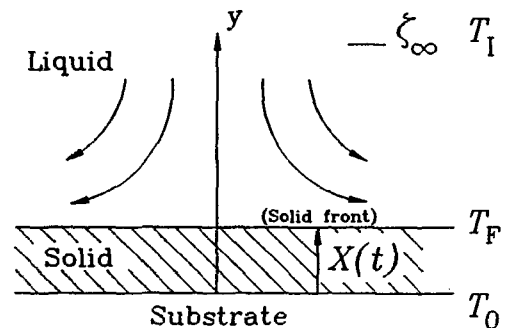


Fig. 1 Plane stagnation flow ahead of a solidifying interface

판(cold substrate)을 향하여 따뜻한 유체가 흘러 간다. 초기상태에 있어서 유체의 온도는 T_I 로 일정하게 유지되고 있으며 T_I 는 유체의 응고온도 T_F 보다 높다. 그리고 기판의 온도 T_0 는 응고온도 T_F 보다 낮다. 따뜻한 유체가 차가운 기판을 향해 흐르게 되면 고체와 액체의 경계면에서 응고가 일어나게 되고 고체층의 두께는 점점 커지게 된다.

T_0 가 응고온도 T_F 보다 낮으면 기판의 표면에서 유체의 응고가 일어나며, 응고 현상은 액체 영역으로 확대되어 나갈 것이다. 이 현상은 유체의 속도장과 온도장 모두에 있어서 비정상(unsteady) 문제를 구성한다. 그러나 Neumann의 해⁽¹⁾로부터 액체의 응고는 매우 천천히 일어난다는 것을 알 수 있으므로 유체의 속도장은 액체 영역 내에서 준정상 상태(quasi-steady state)를 유지한다고 가정한다. 즉, Bian and Langel⁽¹²⁾과 Yoo⁽¹³⁾가 사용한 준정상상태 가정(quasi-steady assumption)을 적용한다. 에너지 방정식에서 점성소산(viscous dissipation)을 무시하고 고체와 액체의 물성치(thermophysical property)들은 모두 일정하다고 가정한다.

이러한 가정 하에서 액체와 고체 영역에서의 온도 분포는 다음과 같은 에너지 방정식으로써 기술된다.⁽¹⁰⁻¹³⁾

고체 영역에서의 온도 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha_S \frac{\partial^2 T_S}{\partial y^2} \quad (1)$$

액체 영역에서는 유체의 흐름이 있으며 온도 분포는 다음 방정식으로써 기술된다.

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} + v(y-X(t)) \frac{\partial T_L}{\partial y} = \alpha_L \frac{\partial^2 T_L}{\partial y^2} \quad (2)$$

여기에서 $v(y)$ 는 수직 방향의 유체 속도이며 이것은 다음과 같이 정해진다.(Hiemenz flow⁽²⁰⁾)

$$v(y) = -\sqrt{av}\phi(\xi); \xi = \sqrt{a/\nu}y \quad (3)$$

$$\phi''' + \phi\phi'' - \phi'^2 + 1 = 0$$

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0; \phi'(\infty) = 1$$

여기에서 프라임 부호는 ξ 에 대한 미분을 나타낸다.

상변화가 일어나고 있는 고체와 액체의 경계면 $y=X(t)$ 에서는, 전도에 의해 제거되는 열은 상변화에 의해 없어지는 잠열(latent heat)과 같다는 에너지 균형으로부터

$$K_S \frac{\partial T_S}{\partial y} - K_L \frac{\partial T_L}{\partial y} = \rho L \frac{dX}{dt} \quad (4)$$

의 관계식이 주어진다. 그리고 다른 경계조건들은 다음과 같다.

$$T_S = T_0 \quad \text{at } y=0,$$

$$T_S = T_L = T_F \quad \text{at } y=X(t), \quad (5)$$

$$T_L = T_I \quad \text{at } y \rightarrow \infty$$

응고가 일어나기 바로 직전의 액체의 온도는 균일하며 T_I 와 같다. 식(2)에서 대류항(convective term)이 없다면 이 문제는 잘 알려진 Neumann의 해를 갖는 Stefan 문제가 된다(Carlsaw and Jaeger⁽¹⁾).

다음과 같은 무차원 변수를 도입하면

$$\tau = at, \quad \eta = y/X(t)$$

$$\theta_S = \frac{T_S - T_0}{T_F - T_0}, \quad \theta_L = \frac{T_L - T_I}{T_F - T_I}$$

$$K_R = K_S/K_L, \quad \alpha_R = \alpha_S/\alpha_L, \quad Pr = \nu/\alpha_L, \quad (6)$$

$$\theta_R = \frac{T_I - T_F}{T_F - T_0}, \quad Ste = \frac{C_S(T_F - T_0)}{L}$$

식(1)~(2)는 다음과 같이 변환된다.

$$h_S^2 \frac{\partial \theta_S}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2} \frac{dh_S^2}{d\tau} \frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \eta^2} \quad (7)$$

$$h_S^2 \frac{\partial \theta_L}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2} \frac{dh_S^2}{d\tau} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta}$$

$$+ Pr^{\frac{1}{2}} \cdot h_S \cdot H \left[Pr^{-\frac{1}{2}} (\eta-1) h_S \right] \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta}$$

$$= \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \eta^2} \quad (8)$$

$$\text{여기에서 } h_S(\tau) = \sqrt{a/\alpha_L} X(t) \quad (9)$$

는 무차원화된 응고층의 두께를 나타낸다. 그리고 경계조건들은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} = \frac{1}{2\alpha_R \text{Ste}} \frac{dh_S^2}{d\tau}$$

at $\eta = 1$ (10)

$$\theta_S = 0 \text{ at } \eta = 0, \theta_S = \theta_L = 1 \text{ at } \eta = 1,$$

$$\theta_L \rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty \quad (11)$$

무차원된 지배 방정식 (6)~(11)에서 θ_R/K_R 이 하나의 변수로 표현된다는 것에 주의할 필요가 있다. 이것은 열전달이 Fourier의 열전도법칙에 의해 일어나기 때문이다. Rangel and Bian^(10,11)과 Bian and Langel⁽¹²⁾은 온도비 θ_R 과 열전도 계수의 비 K_R 을 독립된 변수로 취급하였는데 그렇게 할 필요가 없음을 말해준다. 반면 Yoo⁽⁷⁾는 이 두 변수들을 단일 변수 θ_R/K_R 로 표현하여 조사하였다.

응고가 진행되는 초기 단계($\tau \ll 1$)에서는 $\theta_S(\tau, \eta)$, $\theta_L(\tau, \eta)$, $h_S(\tau)$ 를 다음과 같이 전개할 수 있다.⁽⁷⁾

$$\theta_S(\tau, \eta) = \theta_S^0(\eta) + \theta_S^1(\eta)\tau^{3/2} + \dots \quad (12)$$

$$\theta_L(\tau, \eta) = \theta_L^0(\eta) + \theta_L^1(\eta)\tau^{3/2} + \dots \quad (13)$$

$$h_S^2(\tau) = b_0\tau + b_1\tau^{5/2} + \dots \quad (14)$$

시간이 아주 작을 때 $\theta_L = 0 (= \theta_\infty)$ 가 되는 온도면(temperature front)은 경계면 가까이에 있다. 즉, $\tau \rightarrow 0$ 에서의 온도 경계면은 벽면에서 아주 가까운 곳에 있으며, 따라서 이때의 얇은 온도 경계층 내에서의 유체의 속도장은 Taylor 전개를 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\phi(\xi) = \phi'(0) \frac{\xi^2}{2} \quad (15)$$

$\phi'(0)$ 는 식(3)을 풀어서 구하는데 여기에서는 Dorrepall⁽²¹⁾이 구한 값 $\phi'(0) = 1.232588$ 을 사용한다.

식(12)~(15)를 식(7)~(11)에 대입하면 다음과 같은 $O(\tau^0)$ 에 대한 방정식과 경계조건이 구해진다.

$$\frac{d^2 \theta_S^0}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2\alpha_R} \eta \frac{d\theta_S^0}{d\eta} = 0 \text{ at } 0 < \eta < 1 \quad (16)$$

$$\frac{d^2 \theta_L^0}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2} \eta \frac{d\theta_L^0}{d\eta} = 0 \text{ at } \eta > 1 \quad (17)$$

$$\frac{d\theta_S^0}{d\eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{d\theta_L^0}{d\eta} = \frac{b_0}{2\alpha_R \text{Ste}} \text{ at } \eta = 1 \quad (18)$$

$$\theta_S^0(0) = 0, \theta_S^0(1) = \theta_L^0(1) = 1, \theta_L^0(\infty) = 0 \quad (19)$$

그리고 $O(\tau^{3/2})$ 에 대한 방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{d^2 \theta_S^1}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2\alpha_R} \eta \frac{d\theta_S^1}{d\eta} - \frac{3b_0}{2\alpha_R} \theta_S^1$$

$$= -\frac{5b_1}{4\alpha_R} \eta \frac{d\theta_S^0}{d\eta} \text{ at } 0 < \eta < 1 \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \theta_S^1}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2} \eta \frac{d\theta_L^1}{d\eta} - \frac{3b_0}{2} \theta_L^1$$

$$= \left[\frac{\phi''(0)}{2} \text{Pr}^{-1/2} b_0^{3/2} (\eta-1)^2 - \frac{5b_1}{4} \eta \right] \frac{d\theta_L^0}{d\eta} \text{ at } \eta > 1 \quad (21)$$

$$\frac{d\theta_S^1}{d\eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{d\theta_L^1}{d\eta} = \frac{5b_1}{4\alpha_R \text{Ste}} \text{ at } \eta = 1 \quad (22)$$

$$\theta_S^1(0) = \theta_S^1(1) = \theta_L^1(1) = \theta_L^1(\infty) = 0 \quad (23)$$

식(16)~(19)의 $O(\tau^0)$ 의 식에 대한 해는 잘 알려진 Neumann 해이다.⁽¹⁾

$$\theta_S^0(\eta) = \frac{\text{erfc}(\sigma\eta)}{\text{erfc}(\sigma)} \quad (24)$$

$$\theta_L^0(\eta) = \frac{\text{erfc}(\sqrt{\alpha_R}\eta)}{\text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})} \quad (25)$$

$$\frac{\exp(-\sigma^2)}{\text{erfc}(\sigma)} - \frac{\theta_R \sqrt{\alpha_R} \exp(-\sigma^2 \alpha_R)}{K_R \text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{\text{Ste}} \quad (26)$$

$$b_0 = 4\sigma^2 \alpha_R \quad (27)$$

식(20)~(23)의 $O(\tau^{3/2})$ 의 식에 대한 해는 다음과 같은 Homogeneous solution을 이용하여 구한다.

$$u_S(\eta) = \eta^3 + \frac{3}{2\sigma^2} \eta \quad (28)$$

$$u_L(\eta) = \eta^3 + \frac{3}{2\sigma^2\alpha_R} \eta \quad (29)$$

윗 식들로부터 다음과 같은 해를 구할 수 있다.

$$\theta_S^1(\eta) = -u_S(\eta) \int_{\eta}^1 \frac{b_1 C_1 \left(\frac{\eta^5}{5} + \frac{\eta^3}{2\sigma^2\alpha_R} \right)}{\exp(\sigma^2\alpha_R\eta^2) u_S^2(\eta)} d\eta \quad (30)$$

$$\theta_L^1(\eta) = u_L(\eta) \int_1^{\eta} \frac{C_3 f(\eta) + b_1 C_2 \left(\frac{\eta^5}{5} + \frac{\eta^3}{2\sigma^2\alpha_R} \right) + C_4}{\exp(\sigma^2\alpha_R\eta^2) u_L^2(\eta)} d\eta \quad (31)$$

여기에서

$$C_1 = -\frac{5\sigma}{2\sqrt{\pi}\alpha_R \operatorname{erfc}(\sigma)}; C_2 = \frac{5\sigma\sqrt{\alpha_R}}{2\sqrt{\pi}\operatorname{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})}$$

$$C_3 = \frac{8\phi'(0)\sigma^4\alpha_R^2}{\sqrt{\pi}\operatorname{Pr}\operatorname{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})}; C_4 = -\frac{K_3}{K_1} C_3 - \frac{K_2}{K_1} C_2 b_1$$

$$b_1 = \frac{1}{S} \frac{\theta_R}{K_R} C_3 \left(\frac{K_3}{K_1} R_1 - R_3 \right)$$

$$f(\eta) = \frac{\eta^6}{6} - \frac{2}{5} \eta^5 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2\sigma^2\alpha_R} \right) \eta^4$$

$$- \frac{1}{\sigma^2\alpha_R} \eta^3 + \frac{3}{4\sigma^2\alpha_R} \eta^2$$

이며 각각의 상수들은 다음과 같이 주어진다.

$$K_1 = \int_1^{\infty} g(\eta) d\eta; K_2 = \int_1^{\infty} g(\eta) \left(\frac{\eta^5}{5} + \frac{\eta^3}{2\sigma^2\alpha_R} \right) d\eta$$

$$K_3 = \int_1^{\infty} g(\eta) f(\eta) d\eta; R_1 = g(1)$$

$$R_2 = g(1) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2\sigma^2\alpha_R} \right); R_3 = g(1) f(1)$$

$$S = \frac{C_1 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\exp(\sigma^2) u_S(1)} + \frac{\theta_R}{K_R} C_2 \left(R_2 - \frac{K_2}{K_1} R_1 \right)$$

$$- \frac{5}{4\alpha_R \operatorname{Ste}}$$

이상에서 $g(\eta)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$g(\eta) = \frac{1}{\exp(\sigma^2\alpha_R\eta^2) u_L^2(\eta)}$$

위의 해는, 응고가 시작되는 초기 ($\tau \ll 1$)에서의 과정은 순전히 전도에 의해 진행됨을 보여준다. 그

리고 $\tau \rightarrow 0$ 의 극한은 $a \rightarrow 0$ 의 극한에 의해서도 일어날 수 있다. 따라서 $a \rightarrow 0$ 의 극한적인 경우에 있어서의 해도 역시 Neumann의 해와 같게 된다.

그리고 특히 b_1 과 Prandtl 수는 다음과 같은 관계를 갖는다는 것을 알 수 있다.

$$b_1 = F(\alpha_R, \theta_R/K_R, \operatorname{Ste}) \times (\operatorname{Pr})^{-\frac{1}{2}} \quad (32)$$

3. 결과 및 논의

유체유동이 없는 순수한 전도만에 의한 응고 (Neumann 문제⁽¹⁾)에 있어서는 고체는 $X(t) = 2\sigma\sqrt{a}st$ 의 관계식에 따라 계속 자라나며 온도 경계면 ($T_L = T_I$ 인 면)도 계속 전파된다. 그러나 본 문제에 있어서는 기판을 향한 수직 방향의 유체의 흐름이 유체 내에서의 온도 경계면의 전파를 제한한다.

유체 유동이 있는 경우, 응고 과정의 초기 단계에서 응고된 고체층의 두께 $h_S(t)$ 는 $h_S^2(t) = b_0 t + b_1 t^{5/2}$ 로 표현된다. 여기에서 첫 번째 항은 Neumann의 순수한 전도 상태의 해를 나타내고, 두 번째 항은 유체 유동의 영향을 나타낸다. 계산 결과는, 모든 경우에 있어서 b_1 이 음(negative)의 값을 가짐으로써 기판을 향한 유체의 흐름은 그만큼 고체의 성장을 방해한다는 것을 보여 주었다.

먼저 Fig.2에 Prandtl 수에 의한 영향을 나타내었다. 실제의 성장된 고체의 길이 $X(t)$ 는 식(14)로부터

$$X(t) = 2\sigma\sqrt{a}t \{ 1 - |b_1/2b_0|(at)^{3/2} \} \quad (33)$$

로 주어진다. Fig.2는 Prandtl 수가 작을수록 $|b_1/b_0|$ 이 커진다는 것을 보여주고 있다. 주조(casting)나 용접(welding)에 사용되는 금속은 일반적으로 Prandtl 수가 아주 작은데⁽²²⁾, 이 결과로부터 그와 같은 경우의 금속의 응고에 있어서는 유체의 흐름이 응고과정에 큰 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.

Fig.3에는 온도비 θ_R 과 열전도도비 K_R 에 의한 영향을 나타내었다. Fig.3을 보면, θ_R/K_R 이

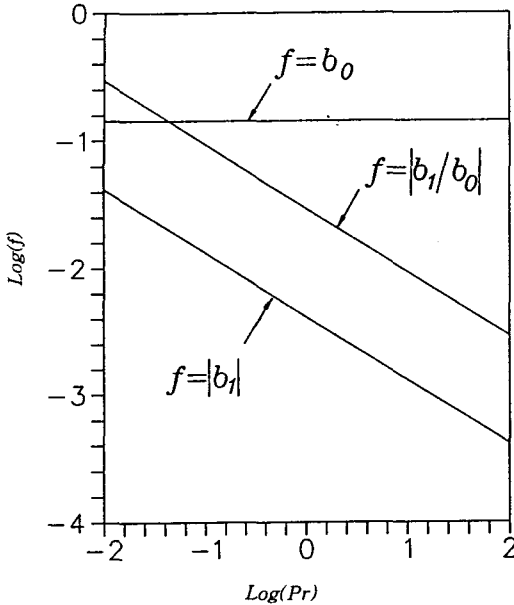


Fig. 2 Effect of Prandtl number on the growth of solid
 $h_S^2(\tau) = b_0 \tau \{1 - |b_1/b_0|(\tau)^{3/2}\}$ with $\alpha_R = K_R = \theta_R = 1$ and $Ste = 0.1$

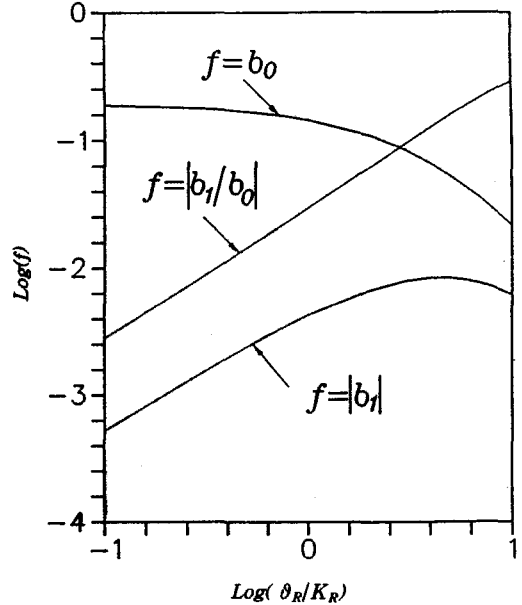


Fig. 3 Effect of temperature ratio and conductivity ratio on the growth of solid. $h_S^2(\tau) = b_0 \tau \{1 - |b_1/b_0|(\tau)^{3/2}\}$ with $\alpha_R = Pr = 1$ and $Ste = 0.1$

증가하면 b_0 는 감소한다는 것을 알 수 있다. 즉, 순수한 전도상태에서 고체의 성장속도는 느려진다. 그러나 $|b_1/b_0|$ 는 θ_R/K_R 이 증가하면 같이 증가한다. 즉 유체 유동의 영향은 그만큼 커지게 된다.

$$\frac{\theta_R}{K_R} = \frac{T_I - T_F}{T_F - T_0} \frac{K_L}{K_S} \quad (34)$$

이므로, 이것은 뜨거운 유체의 온도가 커지거나 유체의 열전도도가 증가하면 응고과정은 유체의 유동에 의해 그만큼 더 방해받는다라는 것을 말하고 있다.

그리고 Stefan 수가 유체의 응고 속도에 미치는 영향은 Fig. 4에 도시하였다. Stefan 수가 커질수록 순수한 전도에 의한 응고 속도는 빨라지며, 아울러 유체유동이 미치는 영향도 함께 증대된다.

이상에서 응고 과정의 초기 단계에서 유체의 흐름이 응고 과정에 미치는 영향을 살펴보았다. Neumann 문제⁽¹⁾에 있어서는 경계조건을 만족하는 정상상태(steady state)의 해가 없으며 고체는 $X(t) = 2\sigma\sqrt{\alpha_S t}$ 의 관계식에 따라 계속 자라지만

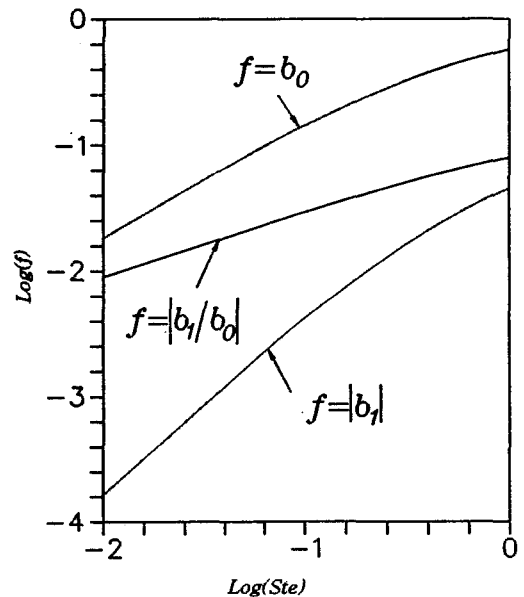


Fig. 4 Effect of Stefan number on the growth of solid
 $h_S^2(\tau) = b_0 \tau \{1 - |b_1/b_0|(\tau)^{3/2}\}$ with $\alpha_R = K_R = \theta_R = Pr = 1$

본 문제에 있어서는 기판을 향한 유체의 흐름이 유체 내에서의 온도 경계층의 전파를 제한하므로 시간이 무한히 지나감에 따라 시스템은 최종 정상 상태(steady state)에 도달하게 된다. 식(1)~(5)에서 $\partial/\partial t=0$ 로 하면 정상상태에 대한 식이 된다. 정상상태의 해는 다음과 같이 구해진다.

고체 영역에서는 선형적인 온도 분포가 확립된다.

$$T_S(y) = \frac{T_F - T_0}{X_{eq}} y + T_0 \quad (35)$$

액체 영역에서는 온도를 다음과 같이 놓으면,

$$\theta_L(\zeta) = \frac{T(\zeta) - T_I}{T_F - T_I} \quad (36)$$

식(2)는

$$\frac{d^2 \theta_L}{d\zeta^2} - \text{Pr} \phi(\zeta) \frac{d\theta_L}{d\zeta} = 0 \quad (37)$$

로 되며 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\theta_L = 1 \text{ at } \zeta = 0, \theta_L = 0 \text{ as } \zeta \rightarrow \infty \quad (38)$$

성장할 수 있는 고체의 최대 길이(X_{eq})는 경계면에서의 에너지 균형을 나타내는 식(4)로부터 구할 수 있다.

$$X_{eq} = \frac{K_S}{K_L} \frac{T_F - T_0}{T_F - T_I} \sqrt{\frac{\nu}{a}} \left(\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta} \right)^{-1} \quad (39)$$

$$\text{혹은 } h_{eq} = -\frac{K_R}{\theta_R} \left(\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta} \right)^{-1} \quad (40)$$

식(39)에서 $d\theta_L(0)/d\zeta$ 은 Prandtl 수의 함수이므로, 이 식은 성장할 수 있는 고체의 최대 길이 (X_{eq})와 물질의 물성치 ($K_S, K_L, \nu, \text{Pr}, T_F$), 주어진 온도 (T_0, T_I), potential flow strain rate (a)들 사이의 관계를 나타내어 준다. 그리고 식(39)로부터, 성장할 수 있는 고체의 최대 길이 (X_{eq})는 \sqrt{a} 에 반비례한다는 것을 알 수 있다. 즉, 기판을 향해 분사되는 유체의 흐름은 그만큼 고체의 성장을 방해한다. 식(40)을 보면 Ste는 고체 성장과정에 있어서 단지 시간지배 변수일 뿐이

고 평형상태(성장할 수 있는 고체의 최대 길이)에는 영향을 미치지 않는다는 것을 알 수 있다. 즉, 물질의 잠열(latent heat)과 비열(specific heat)은 응고에 있어서의 과도기적인 거동(transient behavior)만 지배하는 변수들이고 최종 평형상태에 아무 영향을 미치지 않는다. 그리고 $a \rightarrow 0$ 혹은 $\theta_R \rightarrow 0$ 의 극한적인 경우에 있어서는 Neumann 해와 같은 해를 가지며 $X_{eq} \rightarrow \infty$ 가 된다.

이상에서 보여준 각각의 변수들이 고체의 성장에 미치는 영향에 대한 정성적인 경향은 Bian and Langel⁽¹²⁾의 수치 계산 결과와 잘 일치한다. 이것은 시간의 함수로서의 고체의 성장온, 초기 상태와 최종 상태가 시간에 따라 부드럽게 연결되기 때문이다. 그리고 본 연구에서는 해석적인 표현을 통하여 특히 유체의 흐름이 고체의 성장에 미치는 영향을 분명하게 보여 주었다는 것에 주목할 필요가 있다.

다음에는 유체 유동과 응고 과정에 관련된 여러 변수들이 고체와 액체의 경계면에서의 열전달 특성에 미치는 영향을 조사해 보기로 하겠다.

고체와 액체의 경계면의 액체 쪽에서의 열유속 q 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$q(\tau) = -\left(\frac{\partial \theta_L(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right)_{\eta=1+} \quad (41)$$

정상 상태, 즉 $\tau \rightarrow \infty$ 에서는 $q(\tau) = q_{steady}$ 이다.

Nusselt 수(Nu)는 다음과 같이 q 를 정상 상태의 값 q_{steady} 로 나눈 값으로 정의한다.

$$\text{Nu}(\tau) = \frac{q(\tau)}{q_{steady}} \quad (42)$$

먼저 Fig.5에 Prandtl 수에 다른 $\text{Nu}(\tau)$ 의 거동을 도시하였다. Fig.5는 Prandtl 수가 증가할수록 과도기(transient period)에 있어서의 열유속이 증가함을 보여주고 있다. 즉, 고체면의 순간적인 냉각에 있어서 반응시간(response time)은, Prandtl 수가 증가하면 함께 증가한다. 이러한 경향은 상변화가 없는 경우와 일치한다.^(23,24) 그리고 이것은 회전 원판(rotating disk)의 경우와 비교될 수 있는데 회전 원판에서의 열전달에서는 $\text{Pr}=1$ 부근에서 최소반응시간을 갖는다.⁽¹³⁾ 두 경우에 있어서 모두

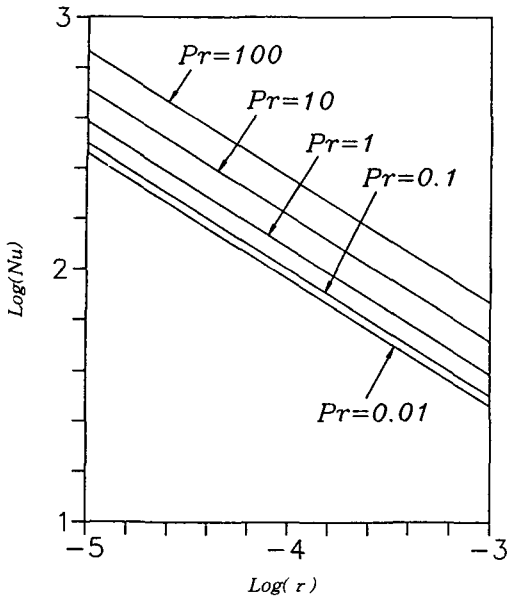


Fig. 5 Transient Nusselt numbers at the liquid side of solid-liquid interface for several Prandtl numbers ($Pr=0.01, 0.1, 1, 10, 100$) with $\alpha_R = K_R = \theta_R = 1$ and $Ste=0.1$

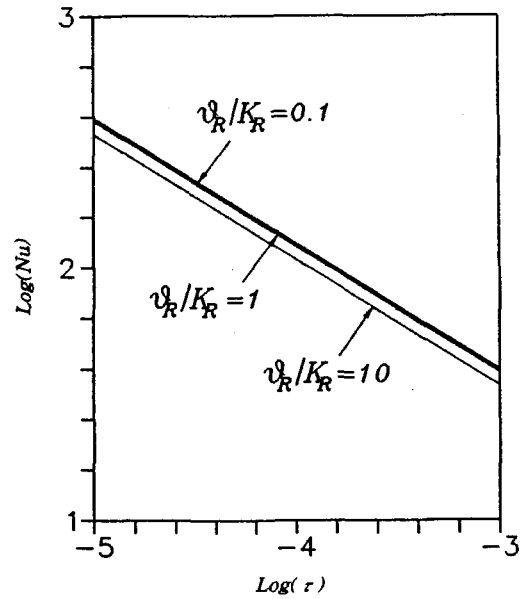


Fig. 6 Transient Nusselt numbers at the liquid side of solid-liquid interface for several temperature ratios and conductivity ratios ($\theta_R/K_R=0.1, 1, 10$) with $\alpha_R = Pr = 1$ and $Ste=0.1$

고체 쪽으로의 유체의 흐름이 있지만 Prandtl 수에 따른 열전달 특성은 다르다는 것을 알 수 있다.

Fig. 6에는 온도비 θ_R 에 따른 $Nu(\tau)$ 의 거동을 도시하였다. θ_R 이 증가할수록 반응시간(response time)은 감소하는데 이러한 경향은 회전 원판에서의 특성과 일치한다.

Chao and Jeng⁽²³⁾와 Sano⁽²⁴⁾ 등은 상변화가 없는 경우에 있어서의 정체유동(stagnation flow) 하에서의 비정상 열전달을 조사하였다. 그러나 고체 표면의 온도가 응고 온도보다 낮으면 자연적으로 액체는 응고되기 시작할 것이다. 여기에서는 상변화가 있는 경우와 없는 경우 모두에 대해 비정상 열전달을 계산하여 Fig. 7에 도시하였다. Fig. 7에서 (a)곡선은 상변화가 비정상 열전달에 미치는 영향을 잘 보여주고 있다. 즉, 과도기(transient period)에 있어서 상변화가 있는 경우의 열유속은 상변화가 없는 경우보다 항상 크다. 그리고 Fig. 7은 Ste가 증가할수록 $Nu(\tau)$ 도 함께 증가함을 보여주고 있다. 유체 내에서는 경계면으로부터 액체

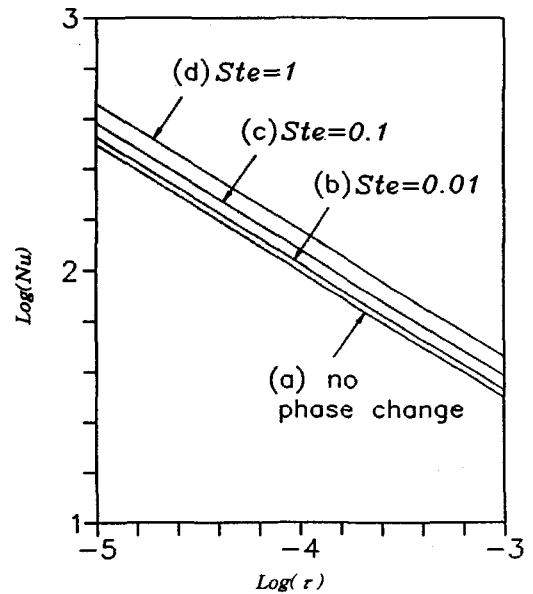


Fig. 7 Transient Nusselt numbers at the liquid side of solid-liquid interface for several Stefan numbers with $\alpha_R = K_R = \theta_R = Pr = 1$

영역으로의 일종의 온도 경계면 ($T = T_f$)의 전파가 있다. Stefan 수가 커지면, 고체는 더 빨리 사라지게 되고 따라서 이 온도 경계면의 전파가 더 크게 방해받을 받게 되므로 $Nu(\tau)$ 는 증가하게 된다.

4. 결 론

평면 정체 유동 하에서의 점성유체의 응고 현상을 이론적으로 해석하였다. 응고 과정의 초기 단계와 최종 단계에 대한 해석적인 해를 구하여 특히 유체의 유동이 응고 현상에 미치는 영향에 대해 조사하였다. 그리고 또한 응고가 일어나고 있을 때의 열전달 특성에도 관심을 두고 조사하였다. 기판을 향한 유체의 흐름은 따뜻한 유체를 응고가 진행되고 있는 고체-액체 경계면으로 흐르게 함으로써 그만큼 고체의 성장을 방해한다. 특히 주조(casting)나 용접(welding)에 사용되는 낮은 Prandtl 수의 금속의 응고에 있어서는, 유체 유동은 응고과정에 큰 영향을 미친다. 뜨거운 유체의 온도가 높아지거나 유체의 열전도도가 증가하면 응고과정은 유체의 유동에 의해 그만큼 더 방해받을 받는다. 그리고 Stefan 수가 커질수록 순수한 전도에 의한 응고 속도는 빨라지며, 아울러 유체유동이 미치는 영향도 함께 증대된다. 성장할 수 있는 고체의 최대 길이 (X_{eq})는 \sqrt{a} 에 반비례한다. Prandtl 수가 증가할수록 고체-액체 경계면에서의 $Nu(\tau)$ 도 증가한다. 그러나 θ_R 이 증가할수록 $Nu(\tau)$ 는 감소한다. 과도기(transient period)에 있어서 상변화가 있는 경우의 열유속은 상변화가 없는 경우보다 항상 크다. 그리고 Ste가 증가할수록 $Nu(\tau)$ 도 함께 증가한다.

참 고 문 헌

1. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, "Conduction of heat in solids", 2nd edn., Clarendon Press, Oxford, pp. 282~296.
2. Muehlbauer, J. C. and Sunderland, J. E., 1965, "Heat conduction with freezing or melting", App. Mech. Rev., Vol. 18, pp. 951~959.
3. Beaubouef, R. T. and Chapman, A. J., 1967, "Freezing of fluids in forced flow", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 10, pp. 1581~1587.
4. Epstein, M., 1976, "The growth and decay of a frozen layer in forced flow", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 19, pp. 1281~1288.
5. Sparrow, E. M., Patankar, S. V. and Ramadhyani, S., 1977, "Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region", J. Heat Transfer, Vol. 99, pp. 520~526.
6. Benard, C., Gobin, D. and Zanoli, A., 1986, "Moving boundary problem : heat conduction in the solid phase of a phase-change material during melting driven by natural convection in the liquid", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 29, pp. 1669~1681.
7. Yoo, J.-S., 1991, "Effect of fluid flow induced by a rotating disk on the freezing of fluid", Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 12, pp. 257~262.
8. Watanabe, T., Kuribayashi, I., Honda, T. and Kanzawa, A., 1992, "Deformation and solidification of a droplet on a cold substrate", Chem. Eng. Sci., Vol. 47, pp. 3059~3065.
9. Liu, H., Lavernia, E. J. and Rangel, R. H., 1993, "Numerical simulation of substrate impact and freezing of droplets in plasma spray processes", J. Phys. D : Appl. Phys., Vol. 26, pp. 1900~1908.
10. Rangel, R. H. and Bian, X., 1995, "Numerical solution of the inviscid stagnation-flow solidification problem", Numerical Heat transfer Part A, Vol. 28, pp. 589~603.
11. Rangel, R. H. and Bian, X., 1996, "The inviscid stagnation-flow solidification pro-

- blem", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 3581~3594.
12. Bian, X. and Rangel, R. H., 1996, "The viscous stagnation-flow solidification problem", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 3581~3594.
 13. Yoo, J.-S., 1997, "Unsteady heat transfer from a rotating disk with solidification", *Numerical Heat Transfer Part A*, Vol. 31, pp. 765~781.
 14. Sparrow, E. M. and Gregg, J. L., 1959, "Heat transfer from a rotating disk to fluids of any Prandtl number", *J. Heat Transfer*, Vol. 81, pp. 249~251.
 15. Kreith, F., Taylor, J. H. and Chong, J. P., 1959, "Heat and mass transfer from a rotating disk", *J. Heat Transfer*, Vol. 81, pp. 95~105.
 16. Sparrow, E. M. and Gregg, J. L., 1960, "Mass transfer, flow, and heat transfer about a rotating disk", *J. Heat Transfer*, Vol. 82, pp. 294~302.
 17. Hartnett, J. P. and Deland, E. C., 1961, "The influence of Prandtl number on the heat transfer from rotating nonisothermal disks and cones", *J. Heat Transfer*, Vol. 83, pp. 95~96.
 18. Olander, D. R., 1961, "Unsteady-state heat and mass transfer in the rotating-disk-revolving-fluid system", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 5, pp. 825~836.
 19. Homsy, G. M. and Hudson, J. L., 1969, "Unsteady heat transfer from a rotating disk", *J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp. 162~163.
 20. Schlichting, S., 1979, "Boundary layer theory", 7th ed., pp. 95~99, McGraw-Hill.
 21. Dorrepaal, J. M., 1986, "An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation-point flow in two-dimensions", *J. Fluid Mech.*, Vol. 163, pp. 141~147.
 22. Smithells, C. J. and Brandes, E. A., 1976, "Metals Reference book, 5th-ed. pp. 940~951, Butterworths & Co(publishers) Ltd."
 23. Chao, B. T., and Jeng, D. R., 1965, "Unsteady stagnation point heat transfer", *J. Heat Transfer*, Vol. 87, pp. 221~230.
 24. Sano, T., 1981, "Unsteady stagnation point heat transfer with blowing or suction", *J. Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 448~452.