Historia Mathematica Vol. 11, No. 2, 1998, 55-62

18세기 수학의 '형이상학'

서경대학교 응용수학과 **박창균**

Abstract

This paper aims to analyze the phenomena of eighteenth-century mathematics and to find the "metaphysics" of the period which made them possible. It shows that mathematics in eighteenth-century was "mixed" and result-oriented and that eighteenth-century metaphysics emphasized the real and natural.

0. 머리말

수학사가인 이브스[8]에 따르면 17세기는 수학 발전의 '극적인 시기'였다고 한다. 왜냐하면 17세기초에 네이피어가 로그의 발견을 발표했고, 해리엇과 오트레드는 대수학의 기호와 체계화에 주목할 만한 공헌을 했으며, 갈릴레오는 역학을 정초했고, 또 케플러는 잘 알려진 세 개의 행성의 운동 법칙을 발표했다. 뿐만 아니라, 17세기 후반에는 데자르그와 파스칼이 사영 기하학이라는 새로운 영역을 열었고, 데카르트는 현대 해석 기하학을 발진시켰다. 그리고 페르마는 현대 정수론의 기초를 놓았으며 페르마, 파스칼, 호이겐스는 수학적 확률론이라는 새로운 분야를 만들었다. 그러나 17세기에 이루어진 무엇보다도 획기적인 일은 17세기말에 뉴턴과 라이프니츠에 의해 성취된 미적분학의 발견이라고 할 수 있다[8, p. 330].

한편, 18세기는 수학에서 '영웅의 시대'로 불리고 있다[14, p. 168]. 왜냐하면 당시의 수학자들은 별로 신통치 않는 논리적인 무기를 가지고 대단한 '과학적 정복'을 성취했기 때문이다. 18세기의 수학자들은 논리적으로 엄밀하지는 않았지만, 이 새롭고 매력적인 방법인 미적분학을 개발하고 적용하는 데에 그 시기의 대부분을 보냈다. 18세기의 수학자들에게 미적분학은, 비록 그것의 기초가 매우 불충분하고 견고하지 못했지만, 일찍이 해결할 수 없었던 여러 문제들을 공략하는 데 있어서 매우 효과적으로 사용되어졌다. 당시에 활약했던 수학자로는 베르누이 형제들, 오일러, 클레로, 달랑베르, 람베르트, 라그랑주, 라플라스, 르장드르 등이 있고, 이들이 미적분학을 사용하여 얻어낸 성과들을 이브스는 다음과 같이 정리했다[8, pp. 331-332].

(1) 야곱 베르누이는 다양한 밀도를 갖는 현들과 중심에 힘이 작용하는 현들의 현수선 모양의 곡선에 대한 연구, 소위 '등시선'(isochrone), 즉 같은 속도로 떨어지는 물체가 따르는 곡선의 발견, 한 쪽 끝이 고정되어 있고 다른 끝은 무게가 있는 물체가 달린 탄성있는 막대가 이루는 형태와 마주보는 두 꼭지점들이 같은 높이로 수평하게 고정되어 있는 무거운 액체를 담고 있는 유동적인 직사각형의 얇은 판에 의해서 이루어지는 형태 및 바람이 가득 찬 직사각형 돛의 모양의 결정 등의 업적을 남겼다.
(2) 요한 베르누이는 반사 및 굴절과 연관된 광학적인 현상에 대한 연구, 곡선족에 대한 직교 곡선의 결정, (중력장 내의 두 점 사이를 운동하는 질점이 가장 빠르게 강하하는 곡선인) 최속강하선의 문제에 대한 공헌 등을 남겼다.
(3) 오일러는 1748년에 두 권으로 이루어진 유명한 **무한소 해석 입문**(Introductio in analysin infinitorum), 1768-1774년에 그것과 연관된 세 권으로 이루어진 **적분법**(Institutiones calculi integralis), 역학에 관한 많은 책 등을 저술했는데, 이것들은 수년 동안 교과서로 그리고 교과서의 본보기로 사용되었다. 그는 또한 응용 수학에 대한 셀 수 없이 많은 논문들을 남겼다.
(4) 클레로는 뛰어난 책 **지구형상론**(Théorie de la figure de la Terre)(1743)과 상을 수상한 논문 **달의 이론**(Théorie de la Lune)(1752)을 남겼다.
(5) 달랑베르는 현재도 그의 이름이 붙어 있는 운동학의 훌륭한 원리에 근거한 **역학론**(Traité de dynamique)(1743)을 저술했으며, 그 이후에 유체의 평형과 운동(1744), 바람의 원인(1746), 진동하는 현(1757) 등에 대한 연구 논문들을 남겼다.
(6) 람베르트는 쌍곡선 함수들의 전개와 혜성 궤도의 결정에 대한 연구를 했다.
(7) 라그랑주는 기념비적인 **해석 역학**(Méchanique analytique)(1788)과 훌륭한 책 **해석 함수론**(Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du daldul différentiel)(1797)을 저술했다.
(8) 라플라스가 '프랑스의 뉴턴'이라는 칭호를 얻게 만든 다섯 권으로 이루어진 방대한 **천체역학**(Tratié de mécanique céleste)(1799-1825)과 **확률의 해석적 이론**(Théorie analytique des probabilités)(1812)을 남겼다.
(9) 르장드르는 타원함수, 최소 제곱 방법, 미분 방정식 등에 대한 연구를 했다.

그러나 이러한 성과에 비해서 수학이라는 건물의 구조는 그 기초가 그렇게 튼튼하지 못했음이 점차 드러나 18세기말에서 19세기초에 수학을 소위 '엄밀화'하려는 노력이 경주되고 코시에 의해 일단락 된다. 해석학의 엄밀성이 확보되기까지 100년 이상이 소요되었다고 할 수 있다. 그러나 어쩌면 이런 표현은 18세기 학자들에게 있어서는 매우 억울하고 자존심 상하는 일인지도 모른다. 왜냐하면 엄밀성이라는 가치는 그들에게 있어서 오늘날과 같이 그렇게 중요하지 않았기 때문이다. 오늘날 수학이 엄밀해야 된다는 것은 초보적 상식에 속하는 일이다. 엄밀성은 수학의 정체성 중 가장 대표적인 것이며 수학자가 이 가치를 추구하는 것은 당연한 일로 받아들여지고 있다. 그러나 18세기 수학자들에게 당신들의 수학은 엄밀성이 결

여되어 있으니 문제가 있다고 다그치는 일은 신중하지 못한 처사이다. 그리고 18세기 수학을 엄밀성이 결여된 수학으로 규정하고, 그 기초적 결함 때문에 그 위에 놓여진 모든 성과를 부정하고 평가 절하한다면 그것은 매우 성급한 일일 것이다. 과학사가인 쿤도 패러다임 간에는 세계관과 가치관, 평가 기준, 언어의 의미에 있어서의 어떠한 공통점도 없기 때문에, '불가공약성'(incommensurability)을 주장하였거니와 오늘날의 수학적 패러다임을 가지고 18세기 수학을 재단하는 일은 공평하지 못한 일이다. 18세기 수학자들의 자질과 능력이 코시나 바이어슈트라스보다 열등해서 엄밀성을 확립하지 못한 것은 아니었다고 생각한다. 여기에는 역사적으로 시간이 어느 정도 필요했다는 정황론과 더불어 18세기 수학자들의 형이상학적 전제가 19세기 수학자들과는 달랐기 때문이다.

본고는 18세기 수학의 형이상학을 제시하기 위해 먼저 18세기 수학의 현상을 기술하고 이러한 결과를 가능케 한 형이상학적 근거를 따져 볼 예정이다. 이 때 18세기라 함은 18세기 중반 달랑베르가 활약했던 시기(지역적으로는 프랑스)를 주로 지칭하고, 형이상학은 18세기적 의미-우리가 관찰하는 외양 뒤에 있는 궁극적인 법칙들을 드러내고 진정한 이해를 위한 열쇠를 제공하는 것-를 포함하는 세계관, 또는 패러다임과 교환 가능한 의미로 사용하였다. 즉 본고는 18세기에 프랑스를 중심으로 활약했던 수학자들이 수학을 추구할 때 밑바탕에 깔려있는 수학 이전의 전제들을 살펴봄으로써 18세기 수학에 대한 올바른 이해를 제공하려는 것이다.

1. 18세기의 수학

18세기의 수학을 다루면서 특별히 지역적으로 프랑스를 주목하는 것은 맨 뒤에 있는 표 1에서 볼 수 있듯이 18세기 수학을 대표하는 수학자들이 주로 프랑스인이었다는 점과 파리의 왕립 과학 아카데미의 활동 때문이다. 파리의 과학 아카데미의 과학 활동은 18세기 들어 더욱더 조직적이고 체계적이었으며 수학적 방법을 중시하였다. 이와 같은 경향은 1730년대부터 프랑스가 뉴턴 역학을 본격적으로 도입하여 해석학적 방법으로 체계화하는 과정에서 확인할 수 있다. 이 아카데미는 논란이 되거나 해결이 요구되는 중요한 문제들이 있을 때 거의 매년 실시된 공개 경쟁 문제로 제시해서 해결을 꾀했는데 오일러나 달랑베르와 같은 수학자들도 이러한 공개 경쟁에 참여해서 입선함으로써 두각을 나타낸 경우다. 이 파리의 과학 아카데미는 베를린 아카데미나 유럽의 다른 아카데미의 모델이 되었고, 유럽 대륙의 과학 활동의 구심점이 되었다[1, p. 258].

역사를 연구한다는 것은 단순히 오늘날의 입장에서 과거를 정리하고 평가하는 작업만이 아닐 것이다. 완전히 그 당시를 복원하기는 힘들겠지만 그 때의 사고 방식과 이해에 도달하려고 궁구하는 것이야말로 역사학의 요체라고 생각된다. 18세기의 수학을 논의함에 있어서도 이 원리는 유효하다. 우선 수학이라는 용어 자체를 오늘날의 개념을 가지고 접근하는 것은 잘못된 일이다. 왜냐하면 당시에는 현재의 분류 방식으로 한다면 순수 수학과 응용 수학

이 구분되어 있지 않은 혼합된 상태에 있었기 때문이다. 18세기 수학은 오늘날 물리학에서 다루는 역학 등 대부분의 학문을 포함하고 있었다. 그래서 18세기 수학을 '혼합 수학'(mixed mathematics)이라고 부를 수 있다. '혼합 수학'은 흔히 말하는 응용 수학과 다르다. 응용 수학은 수학의 한 주제를 다른 주제에 응용한다는 뜻이 포함되어 있는 반면에, 혼합 수학에서는 한 주제와 그것을 수학화 하는 것이 너무 긴밀하게 연관되어 있어서 두 분야는 나누어질 수 없는 것이다. 수학이 추상화와 일반화로 나아가게 된 것이 19세기 이후임을 생각하면 18세기 수학이 혼합적이었다는 것은 수긍하기 어려운 일은 아니다. 실제로 18세기의 많은 수학자들은 역학과 천문학 등에서 그들 연구의 근원과 영감을 찾았다. 전술한 18세기 수학자들의 업적을 보아도 이것을 확인할 수 있다.

18세기 수학의 또 하나의 특징은 '결과 중심의 수학'이었다는 것이다. 18세기 수학자들에게는 결과는 수단을 정당화했다고 할 수 있다. 이 결과 중심의 수학이 강조되었던 배경에는 과학 혁명의 와중에서 과학에 수학이 더욱더 요구되어졌고 르네상스 이래로 새로운 지식을 찾는 것이 모든 과학의 주요한 목적이 된 데에 있다. 새로운 지식을 찾는 작업에서는 아무래도 과정보다는 결과가 중시될 수밖에 없었다. 그리고 18세기에 수학적 기호에 대한 믿음도 결과 중심 수학을 추구하게 하는 동인이 되었다. 심지어 당시 사람들은 종종 기호적으로 일관적인 어떤 것을 쓰기만 하면 그 진술의 참은 보장받는 것으로 가정한 듯하다. 이렇게 '기호주의'에 대한 신뢰는 대수학과 미적분학의 성공에서 비롯되었다고 할 수 있다[9, p. 356]. 한편으로, 이런 결과를 중시하는 경향은 수학적 결과를 산출하는 많은 방법들을 사용하게 되고, 이에 따라 새로운 수학 분야들이 나타나게 되었는데 이에는 변분법, 편미분 방정식, 화법 기하학 등이 있다.

지금까지 18세기 수학이 '혼합 수학'이고 '결과 중심 수학'임을 기술했다. 그런데 이러한 수학은 필연적으로 엄밀성의 문제를 야기했다. 혼합 수학에서는 엄밀성은 실질적 역할이 없다. 왜냐 하면 그 구성의 타당성이 연구되는 주제-그것이 물리학이든 혹은 확률론의 경우에서처럼 심리학이든지 간에-에 달려 있기 때문이다. 또한 결과 중심 수학에서도 엄밀성은 심각한 고려 대상이 아니다. 18세기 수학자들은 미적분학을 적용하여 난문제를 해결하고 새로운 지식을 획득하는 데에 정열을 쏟았지, 엄밀한 기초는 그들의 관심사가 아니었다. 실제로 당시의 과학 잡지에 게재된 연구논문에는 엄밀한 기초에 대한 논의는 일반적으로 나타나지 않았다.

코시는 1821년 *Cours d'Analyse*의 서문에서 "방법에 있어서 나는 기하학에서 요구되는 모든 엄밀함을 그것들에 부여하려고 노력했다[5, p. ii]."고 썼다. 이 말로써 코시는 새로운 패러다임이 도래했음을 선포한 셈이다. 그라비너에 따르면 이것은 진정한 과학혁명이었다. 이 혁명은 프랑스 혁명과 같은 정치적 혁명과 같이 근본을 바꾸고 오래 지속된 혁명이었다[10, p. 2]. 현재적 관점에서 보면 코시가 선언한 "기하학에서 요구되는 모든 엄밀함"이란 당연하고 평범해 보일 지 모른다. 그러나 18세기말까지만 해도 엄밀함을 높이 평가하는 것은 표준적인 태도는 아니었다. 르장드르는 1794년 출판된 그의 저서 *Élements de géometrie*의 서문에서 오늘날의 관점에서는 명백한 기하학에서 엄밀성을 요구하는 내용을 싣고 있다. 이

러한 서문이 등장하게 된 배경이 무엇인가를 고려해 보면, 가능한 추측은 르장드르는 엄밀성에 대한 인식이 주위 모든 사람에게 분명하지 않다고 생각했다는 것이다. 이러한 정황으로 미루어 보건대 18세기에 있어서 엄밀성에 대한 수학 내의 비중은 그렇게 크지 않았고 보편적인 가치가 아니었음이 분명하다. 그러면 과연 18세기의 수학자들을 지배했던 생각은 무엇이었는가? 그들은 수학에 대해 어떤 형이상학적 전제를 가지고 있었기에 수학은 '혼합적'이며 '결과 중심적'이고 엄밀성으로부터 '자유'로웠는가? 이에 대한 논의를 위해 18세기의 대표적 수학자의 한 사람인 달랑베르에 주목하게 되는데 이는 그가 **백과전서**의 편찬자라는 상징성 때문에 그를 통해서 18세기를 보는 것은 더욱 의미있는 일이라고 생각한다.

2. 형이상학

달랑베르는 전체 **백과전서** 작업을 위한 서문을 썼는데 거기에서 근본적으로 로크와 같은 세계관을 피력했다. 그의 주장은 우리가 아는 모든 것은 감각으로부터 온다는 것이었다. 지식을 만드는 과정은 우리에게 주어지는 정리되지 않은 혼돈된 정보로부터 그것이 가지고 있는 질서를 파악하기 위해서 그 정보를 정돈하고 거르는 것을 포함한다고 한다. 이것은 우리에게 가장 자연스러운 질서로부터 우리가 살고 있는 세상에서 가장 자연스러운 질서로 옮겨가는 것을 수반한다. 이 후자의 질서가 어떤 주제의 '형이상학'이며 그 바탕에 깔린 기본 원리이다. 이런 맥락에서 달랑베르가 즐겨 사용한 문구가 관점(point de vue)이었다. 어떤 주제에 관한 진정한 형이상학(vraie metaphysique)을 찾는 것은 그것으로부터 통일된 전체를 보일 수 있는 하나의 관점을 찾는 것이다. 그런데 본고에서 사용하는 용어로서 '형이상학'은 18세기 달랑베르의 의미를 포괄하는 개념으로 오히려 세계관내지 패러다임과 유사한 뜻이다. 이제 달랑베르의 좁은 의미를 넘어서서 넓은 의미에서 18세기의 형이상학은 무엇이었던가를 살펴보자.

우선 18세기 수학자들은 실체론적 전제를 가지고 있었다고 지적할 수 있다. 그 이전에 갈릴레이, 뉴턴 등도 그러했지만 이 시기의 사람들은 신이 세계를 수학적으로 설계했으며 수학자들은 그 설계를 발견하고 밝히는 작업을 하는 것이라고 확신하였다. 그들의 수학적 노력의 목표는 자연의 법칙을 더 많이 얻어내는 것이고 자연의 설계를 깊이 이해하려는 것이었다. 이런 맥락은 18세기의 위대한 수학자 오일러가 "우주의 구조가 가장 완벽하고, 가장 현명한 창조주의 작품이기 때문에, 최대 또는 최소의 법칙이 나타나 보이지 않는 우주에서는 전혀 아무 것도 일어나지 않는다[14, p. 66]."라고 단언한 데에서도 발견할 수 있다. 달랑베르가 "세계의 참된 체계는 인식되어졌고, 개발되어 졌으며 온전해졌다[14, p. 67]."라고 한 것도 자연계에 대한 수학의 역할을 잘 드러낸 표현이라 할 수 있다. 자연계에 대한 수학의 지위가 이러할진대 수학이 '혼합적'이고 '결과 중심적'으로 가는 것은 당연한 일이었다.

그러나 이러한 수학관에 모두가 동의한 것은 아니었다. 18세기 중엽에 뷔퐁은 수학에 대해 가장 인상적인 비판을 가했는데 그는 주장하기를 "수학적 진리란 정의나 가설의 정확한

반복을 수반할 뿐이다. ... 그리고 정의는 임의적이고 상대적이기 때문에, 그것으로부터 연역될 수 있는 결과들은 마찬가지로 임의적이고 상대적이다. 따라서 우리가 수학적 진리라고 부르는 것은 동등한 생각들로 환원되며, 그것에 대한 실재적인 어떤 것도 가지고 있지 않다[15, p. 123]."고 했다. 뷔퐁식의 수학관은 18세기말로 가면서 더욱 세를 얻었는데, 흄에 이르면 외부 세계가 수학적 법칙에 따른다는 것은 인정할 수 없는 형이상학이었고 수학의 공리나 정리에는 어떠한 진리도 존재하지 않았다. 이것은 수학적 활동의 근거를 흔드는 일이었다. 그래서 18세기의 혼합 수학은 수학적 아이디어들을 계속 탐구하면서 뷔퐁식의 비난을 피하는 길이기도 했다. 뷔퐁이나 흄과 같은 견해가 학자들 사이에 그 세를 얻어 갔지만 대부분의 수학자들은 우주가 수학적으로 설계되었다는 형이상학적 전제아래 그들의 작업이 이루어졌다. 18세기는 물론 19세기초까지 수학계의 분위기는 1743년에 달랑베르가 다음과 같이 말한 데서 잘 파악할 수 있다.

> "현재까지 ... 건물의 입구를 밝게 비추기보다는 건물을 확장시키는 것에, 기초를 적절히 튼튼하게 하는 것 보다 건물을 높이 올리는 일에 보다 많은 관심이 주어지고 있다[14 , p. 166]."

18세기는 이렇게 실체론적 인식 위에 외부 세계로부터 선택된 한 주제와 그것을 수학화하는 것이 분리될 수 없는 '혼합 수학'이 가능했고, 또 마치 건물을 확장하고 높이 올리는 작업에 비유할 수 있는 '결과 중심 수학'이 수행되었던 것이다.

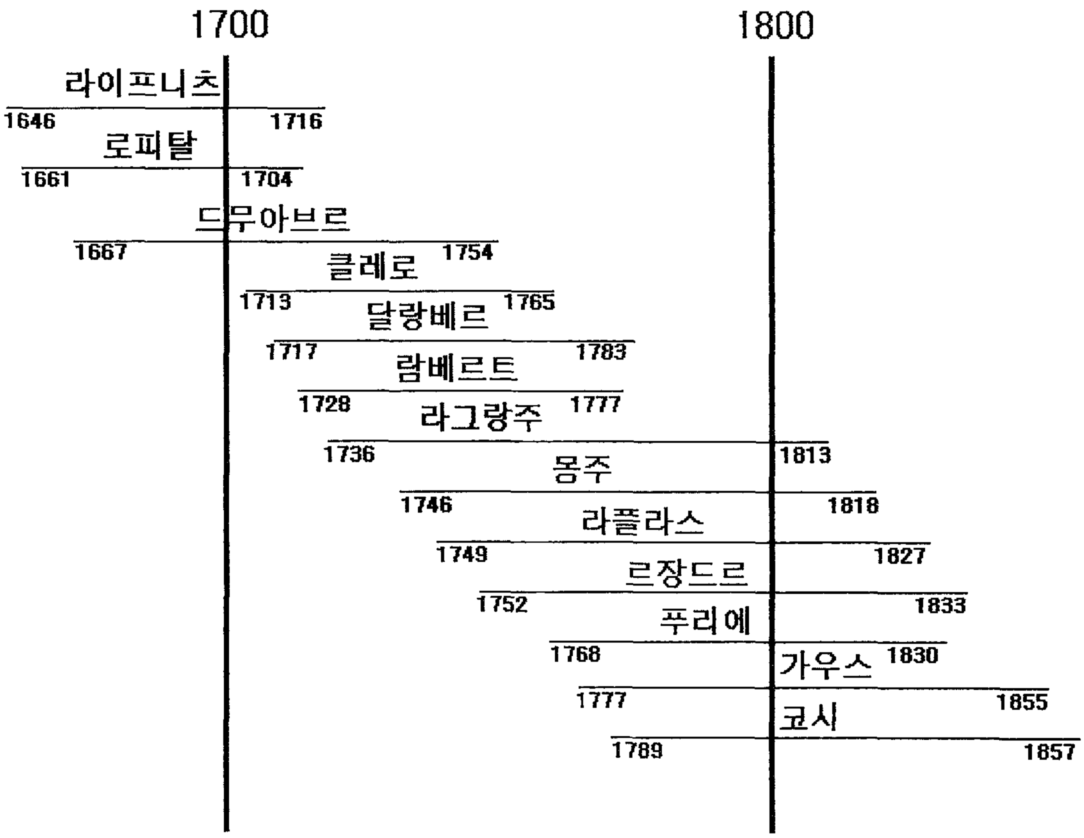
그런데 1743에 달랑베르가 스스로 언급했듯이 18세기 수학은 '출입구를 밝게 비추고' '기초를 튼튼히 하는 일'은 소홀할 수밖에 없었다. 즉 수학의 엄밀성에는 문제가 있었다. 엄밀성은 오늘날에는 수학의 정체성과 직결되는 문제이지만 당시 수학자에게 있어서는 정도의 차이는 있지만 그렇게 높은 가치는 아니었다. 물론 미적분학이 엄밀해지기 위해서는 시간이 필요하기도 했겠지만 당시 수학자들은 엄밀성보다는 '자연스러움'에 더 높은 가치를 부여했다. 뷔퐁과 같이 수학이 세계에 어떤 실체적인 근거를 갖고 있지 않은 공허한 것이라면 엄밀성은 어떤 닫힌 체계 밖에서는 의미를 잃게되고 실재와 교류를 갖는 '자연스러움'보다 그 가치가 열등해진다. 뷔퐁에게 있어서 엄밀성의 지위는 의심스러운 것이었다. 달랑베르의 경우는 뷔퐁보다는 좀 약화되기는 했어도 엄밀성은 여전히 명백한 선은 아니었다. 그는 엄밀성의 가치를 명백하게 주장하지 않았고 자연적 단순성을 더 선호한 것 같다. 달랑베르는 만약 수학이 복잡하고 어렵다면 엄밀성은 불안정하고 강요된 것이라고 주장하면서 강요된 비생산적인 엄밀성의 예로 유클리드의 **원론**을 들기도 했다. 어쩌면 당시 수학자들은 엄밀성을 통해서 수학의 확실성을 이룩하기보다는 수학이 실재와 멀어지고 공허해지는 것을 두려워했을 지도 모른다. 왜냐 하면 그것은 당시로서는 수학을 가치 없게 만드는 일이었기 때문이다. 어쨌든 달랑베르를 비롯한 당시 수학자들은 수학이 엄밀한 것보다는 '자연적이고 단순한' 것이 보다 본질적이라고 생각했다.

3. 맺는 말

이제 형이상학이라는 단어를 패러다임으로 바꾸어도 좋다고 생각한다. 18세기 수학의 패러다임과 오늘날의 패러다임은 동일한 지평에서 다루어질 수는 없다. 18세기의 수학자들은 그들의 패러다임을 가지고 수학적 작업을 수행했다. 그것은 이 우주를 창조주가 수학적으로 설계했고 수학은 엄밀한 것보다는 자연스럽고 단순해야 한다는 것이다. 이러한 형이상학적 전제로부터 18세기 수학은 꽃피웠던 것이다. 수학과 실재와 긴밀한 연관성이 강조된 것도 결과를 중시한 것도 다 이러한 패러다임의 결과이다.

과학철학자인 폴라니가 매우 치밀한 연구를 통해 과학적 지식을 추구하는 활동이란 삶의 현실, 우리가 살고 있는 사회, 그리고 우리의 신체적 조건과 지적 열망 등과 동떨어진 것이 아니라 이 모든 것을 포함한 '인격적 참여(personal commitment)'의 행위임을 보인 것은 시사적이다. 형이상학적 믿음은 과학과 구별되는 것이 아니라 과학 자체의 구조를 이루고 있다는 폴라니의 지적처럼, 18세기 수학자들의 '형이상학'은 그들의 수학과 구별되지 않고 그들의 수학 자체를 이루었다고 할 수 있다.

(표 1)



참고 문헌

1. 김영식 (편저), **과학사 개론**, 다산출판사, 서울, 1994.
2. Boyer, Carl B., *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover, New York, 1959.
3. Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968.
4. Brown, Gary I., "The Evolution of the Term 'Mixed Mathematics'," *Journal of the History of Ideas* 1990, 81-102.
5. Cauchy, A.L., *Cours d'Analyse de L'Ecole Royale Polytechnique*, Paris, 1821.
6. Dijksterhuis, E. J., *The Mechanization of the World Picture: Pythagoras to Newton*, Translated by C. Dikshoorn, Oxford University Press, Oxford, 1961.
7. Edwards, C.H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.
8. Eves, H./허민 · 오혜영 역, **수학의 위대한 순간들**, 경문사, 서울, 1994.
9. Grabiner, J.V., "Is Mathematical Truth Time-Dependent?" in *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, ed. by Thomas Tymoczko, Birkhäuser, Boston, 1986, 201-213.
10. Grabinerm, J.V., *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, MIT Press, Cambridge, 1981.
11. Hatfield, Gary, "Metaphysics and the New Science," in *Reappraisals of the Scientific Revolution*, by David C. Lindberg and Robert S. Westman, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
12. Kleiner, I., "Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective," *Mathematics Magazine*, 64 (1991), 291-314.
13. Kline, Morris, *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, Oxford, 1953.
14. Kline, Morris, *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, New York, 1980.
15. Lyon, John and Sloan, Phillip R. ed., *From Natural History to the History of Nature: Readings from Buffon and his Critics*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1981.
16. Polanyi, Michael, *Personal Knowledge: Towards a Post-Critical Philosophy*, Routledge & Kegan Paul, London, 1958.
17. Struik, D. J., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986.