Historia Mathematica Vol. 11, No. 2, 1998, 17-28

수학적 엄밀성에 대한 역사적 고찰*

광운대학교 수학과 허 민

Abstract

The problem of mathematical rigor is that of giving an objective definition of a rigorous proof. But standards of rigor have changed in mathematics and the notion of proof is not absolute. There are different versions of proof or rigor, depending on time, place, and other things. In this paper we will briefly trace that evolution.

0. 머리말

수학을 다른 과학과 구분하게 만드는 것은 증명의 존재이다. 추측된 명제를 관찰과 실험 등을 통해 귀납적 방법으로 입증하는 다른 과학과 달리, 수학에서는 기본적인 가정에서 출발해서 연역적 방법으로 추측된 명제를 증명한다. 그리고 수세기 동안 수학에서 이용되는 추론은 엄밀성과 논리적 완벽성의 모델로 간주되었다. 그래서 수학자들은 수학이 반박할 수 없을 정도로 대단히 완벽하게 확립된 과학이기 때문에 수학의 장구한 역사에서 결코 후퇴하지 않았다고 자랑했다.

수학적 엄밀성의 문제는 엄밀한 증명에 대한 객관적인 정의를 내리는 문제이다. 수학에서는 엄밀성의 기본적인 수준을 요구한다. 이런 수준을 정의하고 이와 관련된 실질적인 기준을 설정하는 것은 수학의 기초에 대한 미해결 문제를 형성한다. 이 문제는 수학 명제의 진실성에 대한 정확한 기준을 찾는 것과 같다. 왜냐하면 엄밀한 증명은 결론의 진실성을 명확하게 만드는 과정으로 간주되기 때문이다. 그리고 엄밀성의 문제는 진실성의 문제와 분리할 수 없다[5, p. 221].

그러나 수학에서 엄밀성의 기준은 변했다. 증명의 개념도 절대적이 아니다. 증명의 구성요소에 대한 수학자들의 견해도 바뀌었다. 본 글에서는 그리스의 공리학, 기호 표기법, 해석학의 산술화, 현대적인 공리학, 수학의 기초, 컴퓨터 시대 등을 중심으로 수학적 증명의 엄밀성에 대해 역사적으로 고찰하고자 한다.

* 이 논문은 1998년도 광운대학교 학술연구비에 의해 연구되었음.

1. 그리스의 공리학

그리스 이전의 수학 중 바빌로니아 수학은 가장 발전되고 정교했지만, 증명의 개념은 결여되어 있었다. 바빌로니아 수학에는 일반적인 명제가 없고, 결과의 정당성에 대한 추론 또는 합리적인 설명마저 시도되지 않았다. 바빌로니아 수학은 특수한 문제를 다루고, 풀이는 지시적이었다. 이는 이집트 수학에서도 발견되는 양상이다. 그리고 "구체적인 수치 중심의 문제를 일체 증명 없이 다룬 중국 수학의 전통은 **구장산술** 편찬 때는 벌써 자리를 굳히고 있었으며, 그 후 이 점에 관해서는 한번도 궤도 수정을 하지 않았다[1, p. vi]."

고대 그리스 사람들은 명확하게 서술된 공리들로부터의 추론으로서의 증명을 최초로 고안했다. 증명의 개념과 연역법에 근거한 공리적 방법의 도입은 그리스 수학의 위대한 업적이다. 연역적 추론에 의한 증명은 수학적 추론에 기초를 제공한다는 사실에 대한 명확한 인식은 사실 엄청난 발전이었다. 이런 발전이 이루어진 시기와 방법 및 이유는 추측의 여지가 있다. 고대 그리스에서 연역적 방법의 출현, 이른바 '그리스의 신비'에 대한 여러 가지 이유가 제시되었다. 클라이너는 다음과 같이 다섯 가지 이유를 제시했다[15, p. 293].

(1) 정사각형의 대각선과 변을 같은 단위로 측정할 수 없다는 피타고라스 학파의 증명으로부터 발생한 '위기'의 해결 필요성. 이것은 분명히 수학의 논리적 기초를 비판적으로 재평가하라는 중요한 자극을 주었다.
(2) 고대 문명 사회에서 그리스로 전해진 상반된 결과들을 판정하려는 욕구. 이것은 수학적 논증의 개념을 조장했고, 결국 연역적 방법으로 발전했다.
(3) 그리스 사회의 속성. 논쟁과 설득의 기술을 요구한 그리스의 민주주의는 논리적・연역적 추론을 조장했고, 거대한 노예 계급에 의해 지지되는 유한 계급은 수학적 명상과 추상적 사고를 위한 필요 조건이었다.
(4) 근본적인 문제에 대한 답이 주요한 관심사인 철학적 탐구에 대한 그리스 사람들의 기질. 특히, 공리적 방법이 엘레아파 철학에서 유래했다는 주장이 있었다. 이 학파의 제논은 실제로 그의 유명한 역설에서 간접 증명법을 이용했다.
(5) 교육의 필요. 이것은 그리스 수학자들에게 수학의 기저를 이루는 기초적인 원리를 고려하게 만들었다. 실제로, 유클리드 이전에 10여 명의 '원론' 편집자가 있었다. ([11, p. 49-50]을 보라.)

이브스는 그리스의 신비에 대한 설명으로 (1), (3), (4)와 함께, 전면적인 경제적・정치적 상황의 변화 속에서 합리적인 정신의 고양과 아름다움에 대한 그리스적인 애착을 들었다 [10, p. 21, pp. 76-77]. 그리스의 공리학은 '실질적 공리학'이라 불린다. 이는 19세기에 '형식적 공리학'으로 발전했는데, 이들 사이의 차이점은 4장에서 알아본다.

그리스의 공리학을 훌륭하게 보여주는 유클리드의 **원론**은 르네상스 시대와 그 뒤 오랫동안 최상의 연구였으며, 보편적이고 절대적인 정당성을 보여주는 표상이었다. 그러나 오늘날 **원론**은 완벽한 연구와는 매우 거리가 멀다는 사실이 인식되었다. 아무 것도 정의하지 않은 정의가 주어져 있으며, 서술되지 않은 공리가 은연중에 삽입되어 있고, 어떤 증명은 필요 없이 복잡하다[18, p. 41]. 그리고 그리스의 공리적 방법은 희생 없이 등장하지는 않았다. 그리스 수학자에 의한 고전 수학의 완벽화, 즉 엄밀하고 논리적인 연역에 대한 강조는 궁극적으로 쇠약의 길로 나아가게 되었다는 사실은 역설적이다. 왜냐하면 이런 강조는 그리스 사람들이 무리수, 무한 등과 같은 대상의 이용을 배제하게 만들었는데 이런 대상은 수학의 그 다음 발전에 필수적이라는 사실이 밝혀졌기 때문이다. 어쨌든 수학의 매우 엄밀한 시기에 뒤이어 엄밀성에 거의 관심을 두지 않은 수학 활동의 긴 시기가 이어졌다.

2. 기호 표기법

수학을 '기호의 학문'이라 부르듯이, 수학에는 많은 기호가 있으며 이를 당연하게 여긴다. 그러나 현대적인 기호 표기법은 주로 16세기와 17세기에 이르러 도입되기 시작했으며, 대부분의 기호는 400년 이상 되지 않았다. ([10, 강의 12]를 보라.) 기호 표기법은 논증을 위한 매우 강력한 수단이 되었다. 삼차 방정식의 근의 공식에 대한 카르다노의 3쪽에 걸친 유도와 이에 대응하는 현대적인 증명을 비교하면 충분하다. ([19, p. 63]과 이를테면 [2, pp. 443-444]를 보라.) 게다가, 카르다노는 기호의 결핍 때문에 일반적인 증명에 요구되는 문자 계수가 아니라 수치 계수를 가진 방정식을 다루었을 뿐이다.

그리고 기호 표기법은 교육적인 장점도 지닌다. 에드워즈(C. H. Edwards)는 미적분학에서 라이프니츠의 적절한 표기법을 다음과 같이 논평했다[15, p. 294]. "라이프니츠의 미적분학은 아르키메데스나 뉴턴의 천재성을 요구했던 문제들을 평범한 학생들의 능력 범위 내로 끌어내렸다는 말은 결코 과장이 아니다."

기호 표기법은 강력한 논증 수단과 매우 귀중한 교육 보조 도구일 뿐만 아니라, 수학적 발견을 위한 훌륭한 방법을 제공했다. 예를 들면, 다항 방정식에 대한 기호 표기법이 잘 정착된 뒤에야 비로소 이의 근과 계수 사이의 관계를 확실하게 인식할 수 있었다. 새로운 결과의 발견은 종종 내용과 형식 사이의 밀접한 관계의 결과인데, 훌륭한 표기법은 이런 관계를 자주 함의한다. 예로서, 두 함수의 곱의 미분법에 대한 라이프니츠의 발견과 $\cos x$를 거듭제곱 급수로 전개한 오일러의 방법을 들 수 있다[15, p. 295]. 이렇게 엄밀하지 않고 형식적인 '대수적 해석학'은 오일러와 18세기 대부분의 수학자에 의해 관례적으로 시행되었는데, 미심쩍고 본질적으로 잘못된 경우도 많았지만 당대의 지도적인 수학자들의 강력한 직관력은 오류를 최소화할 수 있었다. 그리고 이런 방법으로 중요하고 정확한 결과를 많이 얻을 수 있었고, 물리 문제에 응용시켜 합리적인 결과를 얻을 수 있었기 때문에, 당시의 수학자들은 기호의 힘을 확신했다. 어쩌면, 당대의 수학자들이 기호의 힘을 맹신하고 엄밀성보다는 결과

를 더 중시한 점은 수학의 발전에 도움이 될 수도 있었다. 그래비너는 다음과 같이 말했다 [12, p. 203]. "오일러와 당대의 수학자들이 부담을 갖고 우리의 엄밀성의 기준을 충족시키려고 했다면 과연 그들의 결과들을 유도해낼 수 있었는지 의심스럽다."

기호 표기법은 19세기 대수학의 발전에서도 중요한 역할을 했다. 피콕(G. Peacock)은 19세기 전반기에 대수학에 관한 현대적인 관점을 인식하고 대수학의 기본적인 원리들에 대한 진지한 연구를 수행한 최초의 사람에 속한다. 그는 자연수를 나타내는 기호와 이런 기호에 가해지는 제한 속에서 이루어지는 연산에 관한 연구를 '산술적 대수학'이라 불렀고, 산술적 대수학의 연산이 적용되지만 이에 대한 제약을 무시하며 이루어지는 연구를 '상징적 대수학'이라 불렀다. 피콕은 산술적 대수학에서 상징적 대수학으로 규칙들의 확장에 대한 정당성을 '동치형의 영속화 원리'(principle of the permanence of equivalent forms)라고 불렀다. 피콕의 상징적 대수학은 그것의 연산이 산술적 대수학의 연산과, 두 대수학이 공동의 보조를 맞추면서 진행되는 한, 다른 모든 경우에서 동치형의 영속화 원리에 의해 결정되는 보편적인 산술적 대수학이다. 동치형의 영속화 원리는 당시 수학에서 강력한 개념으로 간주되었으며, 복소수에 관한 산술의 초기 발달과 자연수 지수에서 더욱 일반적인 종류의 지수로의 지수 법칙의 확장과 같은 문제에서 역사적으로 중요한 역할을 수행했다. (자세한 내용은 [10, pp. 378-379]를 보라.)

3. 해석학의 산술화

18세기의 수학자들은 미적분학의 응용력에 매료되어, 이 분야의 부실한 기초에 대한 진지한 고찰 없이 직관에 따라 거의 마구잡이 방식으로 해석적인 과정을 조작했다. 이런 과정에서 어리석은 결과가 많이 생산되었고, 19세기에 이르러서는 미적분학의 엄밀한 기초를 정착시키기 위한 어려운 작업이 불가피하게 되었다. 가우스는 1812년 초기하 급수를 다루면서 무한 급수의 수렴성에 대해 고찰했는데, 이는 직관적인 논증을 타파하고 수학적 엄밀성의 새로운 기준을 설정하는 계기가 되었다[10, 강의 32]. 이번 장에서는 코시와 바이어슈트라스의 연구를 중심으로 해석학의 엄밀화 과정을 알아보겠다.

코시는 **해석학 강의**(Cours d'Analyse, 1821)와 그 뒤 두 편의 연구서[1] 등을 통해 현재의 기준과 근접한 미적분학의 기초를 최초로 엄밀하게 전개했다[18, p. 34]. 그는 극한, 연속, 수렴, 미분, 적분 등 몇 가지 기초적인 개념을 선택했고, 극한 개념을 나머지 모든 개념의 기초로 확립했으며, 꽤 현대적인 방법으로 미적분학의 주요한 결과들을 유도했다. 사실, 이런 미적분학의 기초적인 개념 대부분은 코시의 시대 이전에는 인식되지도 않았고 명확하게 서술되지도 않았다. 코시가 당시의 관행으로부터 근본적인 일탈하게 된 이유를 클라이너는 다음과 같이 요약했다[15, p. 296-298].

1. Résumé(개론) des Leçons sur le Calcul Infintésimal(1823), Leçons sur le Calcul Différentiel(1829)

(1) 1784년 라그랑주는 베를린 학술원에 미적분학의 기초를 상금 문제로 제안했으며, 스스로 미적분학의 엄밀화를 구체적으로 시도했다. 미적분학에 대한 라그랑주의 기초는 대수학으로의 환원에 근거를 두었다. 그러나 테일러 급수 전개에 의한 함수 표현 방법에 근거한 그의 시도는 수렴과 발산에 필수적인 내용을 무시했기 때문에 성공과는 거리가 멀었다. ([10, p. 433]과 [18, p. 30-32]를 보라.)

(2) 푸리에는 삼각 급수에 대한 연구로 19세기 초 수학계를 경악시켰다. 푸리에는 구간 $(-l, l)$ 위에 정의된 임의의 함수 f를 이 구간 위에서 사인과 코사인 급수로 표현할 수 있다고 주장했다. 푸리에의 주장을 반박하기 위해서는 당시에 결여되었던 연속, 수렴, 적분에 대한 명확한 개념이 필요했다.

(3) 코시는 에콜 폴리테크니크에서 가르쳤는데, 이곳의 강사들은 전통적으로 표준적인 교과서에 없는 내용을 다루었고 학생을 위해 자신의 강의 주제에 대해 강의록을 작성했다. 그 결과가 코시의 경우는 위에서 언급한 세 가지 연구서였다. 수학자들은 동료보다 학생들을 위해 글을 쓸 때 훨씬 더 조심하게 된다. 이것도 미적분학의 기저를 이루는 기초적인 개념에 대해 코시가 세심한 분석을 하게 된 요인이었을 것이다.

(4) 이런 이유 이외에, 탐구적인 시기 뒤에 반성과 통합의 시기가 나타나는 현상은 ‘자연스러운’ 과정으로 보인다. 이런 점에서 고대 그리스의 기하학이 중요한 예이다. 미적분학의 경우도 유사했다. 기초에 대해 거의 생각하지 않고 200년 가까이 정력적으로 성장한 뒤에, 기초에 대한 재평가와 재형식화를 위한 단계에 도달했다.

그런데 미적분학의 엄밀화를 위한 코시의 새로운 제안은 그 자체로 또 다른 문제를 탄생시켰다. 코시가 말로 표현한 극한과 연속의 개념에 대한 정의와 그가 자주 이용한 무한소 및 여러 가지 극한의 존재를 증명하는 데 사용한 기하학적이고 직관적인 접근 방법의 수정과 보완 및 대체는 다음 세대가 해결해야 할 과제였다. 그리고 코시의 형식화는 전칭 기호와 존재 기호 사이의 차이점과 배열을 모호하게 표현하고 있다. 이에 따라 그는 함수의 점별 연속과 평등 연속 사이를 구별할 수 없었고, 함수항 급수의 점별 수렴과 평등 수렴 사이를 구별할 수 없었다. 그래서 수렴하는 연속 함수항 급수의 극한이 연속 함수라고 ‘증명했다.’ ([4, pp. 244-245]와 [15, p. 299]를 보라.)

다른 사람 중에서도, 바이어슈트라스와 데데킨트는 ‘코시가 선호했고 함수론의 주요한 결과들을 완전히 파악할 수 없는 대수적 형식화와 기하학적 정당화의 혼합’을 교정하기로 결심했다[15, p. 300]. 특히, 모든 점에 미분 불가능한 연속함수, 적분 가능한 불연속 함수, 무리수에서 연속이고 유리수에서는 불연속인 함수, 적분 가능한 함수열의 극한으로서 적분 불가능한 함수 등의 출현은 기하학적이고 직관적인 개념에 근거해서 당연한 것으로 받아들였던 실수 체계에 대한 엄밀한 연구를 요구했다. 이에 따라 바이어슈트라스는 먼저 실수 체계를 논리적으로 전개하고, 다음에 극한 개념, 연속성, 미분 가능성, 수렴, 발산, 적분 가능성 등을 실수 체계를 이용해서 정의하자는 계획을 주장했다. 두 부분으로 이루어진 이 계획을 ‘해석학의 산술화’로 부르게 되었다. 실수 체계에 대한 엄밀한 전개는 두 가지 방법으로 이

루어졌다. 한 방법은 실수를 규정하는 공준 집합을 설정하는 것인데, 실수 체계가 완비 순서체로서 유일하게 결정된다는 사실이 밝혀졌다. 그리고 다른 하나는 발생적 또는 정의적 방법으로 실수 체계를 훨씬 간단하고 기본적인 자연수에 대한 공준 집합으로부터 더 이상의 가정을 이용하게 않고 순수하게 유도하는 것이다. 이런 전개는 19세기 말 바이어슈트라스, 데데킨트, 칸토어, 페아노 등에 의해 성공적으로 실현되었다. 그리고 둘째 부분의 연구로서 극한 개념에 대한 코시의 직관적이고 '동적인' 개념은 바이어슈트라스의 ε과 δ가 관련된 부등식을 통해 '정적인' 정의로 대체되었다. 그래서 바이어슈트라스는 또한 무한소를 제거했다[10, p. 434-437]. 이런 해석학의 산술화는 미적분학의 기초를 새롭게 제공하는 문제만이 아니라, 오히려 수학 전반을 새롭게 만들고 다시 형식화하는 일이었다[14, p. 28].

19세기말에 이르러 바이어슈트라스의 엄밀성의 기준이 전 세계적으로 승리를 거두었다. 푸앵카레는 1900년 파리 국제 수학자 대회의 강연에서 수학의 산술화를 회고하면서 '절대적 엄밀성'에 도달했다고 선언할 정도였다[18, p. 36-37]. 사실, 수학계는 엄청나게 성장한 수학이 바이어슈트라스의 기초에 근거해서 대단히 안전하게 되었다고 생각했다.

엄밀성과 증명의 진화 과정을 되돌아보면, 엄밀성의 기준이 변화했을 뿐만 아니라 엄밀성을 입증하는 수학적 도구도 바뀌었음을 알 수 있다. 예를 들면, 고대 그리스에서 정리는 기하학적으로 제시되어야만 적절하게 확립되었다. 중세와 르네상스 시대에도 기하학은 여전히 (대수학에서도) 수학적 엄밀성의 최종적인 조정자였다. 17세기 특히 18세기의 미적분학은 더 이상 기하학적으로 정당화될 수 없었고, 대수학이 주요한 정당화 도구였다. 코시의 연구에는 대수적인 면과 기하학적인 면이 혼재되어 있었다. 19세기 후반기 바이어슈트라스와 데데킨트의 연구를 통해, 기하학 또는 대수학보다는 오히려 산술이 엄밀한 수학의 언어가 되었다. 그렇지만 산술의 논리적 패권도 오래 지속되지 못했다. 1880년대, 데데킨트와 프레게는 집합론과 논리학으로부터 얻은 개념에 근거해서 산술을 재건하기 시작했다[15, p. 301].

4. 현대적인 공리학

19세기 엄밀성에 대한 가장 중요한 연구는 해석학에서 이루어졌다. 그렇지만 대수학과 기하학에서도 이 시기에 세심한 연구가 있었다. 이 모든 것은 19세기 말 공리적 방법의 재등장을 유도했다. 공리적 방법은 20세기초에 이르러 수학의 많은 중요한 분야에서 잘 정립되었으며, 20세기 초반기 수학의 가장 두드러진 양상의 하나가 되었다. 이의 발달 과정을 [15, p. 302-304]에 따라 정리 · 요약하겠다.

대수학에서 추상적 개념인 군은 여러 방향에서 등장했다. 다항식 이론에서 치환군, 수론에서 수들의 군, 기하학과 해석학에서 변환군이 탄생했다. 이런 구체적인 군들의 공통된 양상이 인식되기 시작했고, 이에 따라 19세기말에 이르러 추상적인 군 개념이 출현했다. 마찬가지의 관찰 결과를 환, 체, 벡터 공간의 개념의 출현에 적용할 수 있다. 1920년대 뇌터의 개척적인 논문에 이르러 대수학의 공리화는 절정에 도달했다.

앞 장에서 지적한 대로, 해석학의 산술화는 실수의 산술화로, 그리고 자연수(즉, 산술)의 기초에 대한 문제로 환원되었다. 이에 대한 데데킨트, 페아노, 프레게의 19세기 말 연구는 모두 공리 체계를 이용해서 자연수를 정의했다. 그리고 거리 공간의 정의가 등장한 함수 공간에 관한 프레셰의 1906년 논문, 바나흐 공간에 관한 바나흐의 1922년 연구, 1929년 폰 노이만에 의한 힐베르트 공간의 공리화 등이 있었다.

기하학에서 비유클리드 기하학이 발견된 뒤 유클리드 기하학과 좀더 광범위하게 일반적인 공리 체계의 기초에 대한 재조사가 이루어졌다. 파쉬, 페아노, 힐베르트는 19세기 말 기하학의 기초에 대한 세심한 분석을 통해 현대적인 공리 방법의 발달을 선도했다. 사실, 기하학의 기초에 대한 공리적 취급은 힐베르트의 **기하학의 기초**(Grundlagen der Geometrie, 1899)에서 최고점에 도달했다. 그리고 베블런과 영의 두 권으로 이루어진 사영 기하학에 관한 추상적인 연구서도 중대한 영향을 끼쳤다(1910-1919).

수리 논리학은 1847년 불의 **논리학의 수학적 분석**(Mathematical Analysis of Logic)과 함께 탄생했다. 불은 수리 논리학과 불 대수학에 관한 연구에서 서로 다른 해석을 허용하는 공리들의 임의성의 관점을 부각시킨 최초의 사람에 속한다. 이 분야에서 러셀과 화이트헤드의 세 권으로 이루어진 **수학적 원리**가 있었다(1910-1913).

위상 수학에서 하우스도르프는 근방을 이용해서 위상 공간을 정의했고(1914년), 알렉산드로프는 호몰로지 이론을 전개하기 시작했다(1928년). 집합론에서 1908년 체르멜로의 집합론에 관한 공리화가 있었고, 1921년 프랭켈의 개선이 뒤따랐으며, 1925년 폰 노이만의 변형이 등장했다.

유클리드의 공리학과 19세기 후반기와 20세기 초반기의 현대적인 공리학 사이에는 주목할 만한 차이점이 있다. 유클리드의 공리들은 구체적인 물리적 실체의 이상화였고 이에 따라 자명한 진리로 간주되었으며, 플라톤적 관점에서 이미 존재하는 실체에 대한 묘사였다. 현대적인 관점에서 공리들은 자명하지도 않고 참도 아니다. 이것들은 공리 체계의 무정의 용어 사이의 관계에 대한 단순한 가정에 불과하다. 예를 들면, 힐베르트의 **기하학의 기초**에서는 점, 선, 면을 정의하려고 시도하지 않으며, 추론은 기하학적 직관에 의존하지 않고 순수하게 형식적이다[18, p. 41]. 그래서 현대적인 공리 체계에서 공리는 이에 따라 정리는 전혀 의미가 없다. 이런 점에서 현대적인 공리학을 '형식적 공리학'이라 부른다. 게다가, 이런 공리 체계는 절대적일 필요가 없다. 즉, 근본적으로 다른(즉 동형이 아닌) 해석(모형)을 갖더라도 똑같은 공리들을 만족시키는 모든 것을 받아들일 수 있다. 근본적으로 새로운 발상이다. 그래서 현대적인 공리적 방법은 통합시키고 추상화시키는 도구이다. 게다가, 고대 그리스에서 공리적 방법의 주요한 역할은 일관된 기초를 제공하는 것이었던 반면에, 20세기 초반기에는 연구의 도구도 되었다. 또, 공리적 방법은 수학자의 직관이 안내자의 역할을 거의 하지 못할 때 다양한 수학적 방법과 결과(이를테면 선택 공리와 연속체 가설)의 위치를 명확히 하는 데 종종 필수적이었다. (실질적 공리학과 형식적 공리학에 대한 자세한 설명은 [11, pp. 22-26, pp. 255-261]을 보라.)

그렇지만 현대적인 공리적 방법이 완전한 축복은 아니었다. 힐베르트와 같은 사람은 이를

수학적 사고의 핵심적 방법이라고 주장했지만, 클라인과 같은 사람은 발견의 방법으로서 이것이 창조적인 정신을 억제한다고 주장했다.

5. 수학의 기초

19세기에 수학자들의 관심사는 감각적이고 경험적 개념으로부터 지적이고 추상적인 개념으로 더욱 바뀌게 되었다. 이런 변화는 16세기와 17세기에 음수와 복소수, 순간 변화율, 무한소 등과 같은 비직관적인 개념의 도입을 통해 이미 시작되었지만; 이런 개념은 물리적인 문제를 푸는 데 성공적으로 이용되었고 이에 따라 정당화를 위한 작업이 거의 필요치 않았다. 그렇지만 19세기 비유클리드 기하학, 비가환 대수학, 공간을 채우는 곡선, n차원 기하학, 서로 다른 크기의 완성된 무한 등의 도입은 더 이상 물리적인 유용성으로 정당화될 수 없었다. 특히, 19세기 후반기 해석학의 엄밀화 과정에서 등장한 '병적인' 함수의 다양한 예는 수학자들을 혼란에 빠뜨렸고 격렬한 반대에 부딪히기도 했다. ([16, pp. 972-977, p. 1003, pp. 1032-1035]를 보라.) 이 모든 것은 임박한 위기를 암시했으며, 더 이상 무시할 수 없었다. 그래서 해석학에서는 산술에 기초를 두고 엄밀성을 추구하려고 했다. 그런데 "이 과정에서 무한 집합이 도입되었고 집합론은 모든 수학을 통일적 관점에서 분석하리라고 기대되었었다. 그것은 집합론이 가진 일반성과 포괄성 때문이었는데, 프랜켈은 집합론의 발견을 천문학의 코페르니쿠스의 지동설과 물리학에서의 상대성 이론에 비해서 뒤떨어지지 않는다고 했다. 그러나 일련의 역설들-부랄리-포르티의 역설(1897), 칸토어의 역설(1899), 러셀의 역설(1903) 등-이 발생하면서 집합론은 물론 수학 전체의 기초가 흔들리게 되었다[3, p. 23]." 그래서 매우 견실하게 보였던 수학적 추론은 비참한 자가 당착에 빠졌다. 이런 역설이 궁극적이고 확정적인 방식으로 설명되지 않는 한, 당시 확고한 상태에 있는 다른 추론 형식이 아직은 의심받지 않고 있지만 다른 어떤 모순에 이르지 않을 수 있다는 보장은 전혀 없었다. "이러한 상황에서 흔들리는 기초를 확실한 토대 위에 세움으로써 수학을 위기에서 구하고자 나타난 학파가 프레게와 러셀로 대표되는 논리주의와 브로우베르의 직관주의 그리고 힐베르트의 형식주의이다[3, p. 23]."

이렇게 20세기초에 등장한 세 가지 수리 철학, 즉 형식주의, 논리주의, 직관주의는 수학의 본질, 의미, 방법 등을 다루고 이에 따라 특히 수학에서 엄밀성과 증명의 문제를 다루었다. 의심의 여지가 없고 확실하며 가능성 있는 모든 의혹이 제거된 수학적 지식을 확립하고자 연구한 이 모든 철학은 성공하지 못했다. "논리주의와 형식주의 경우, 지난 반세기 이상 동안 새롭고 중요한 개념이 전혀 나타나지 않았다. 직관주의와 이의 후예 구성주의는 브로우베르의 계획을 수행하려고 몸부림쳤다. 그러나 수학을 구성적으로 개조하려는 이들의 목적은 60 또는 70년 전보다 오늘날 더욱 먼 거리에 있다[13, p. 589]."

세 가지 수리 철학에 대한 설명과 비판은 이미 여러 곳에서 논의되었기 때문에 여기에서는 이를 생략하겠다. (자세한 내용은 [3, p. 24], [7, 7장], [11, pp. 453-462], [15, pp.

304-309]를 보라.)

6. 컴퓨터 시대

컴퓨터는 20세기 중반에 출현한 이래 수학과 밀접한 관계를 유지해오고 있으며, 20세기 후반기에는 더욱 의미 있는 역할을 하고 있다. 컴퓨터는 새로운 수학 분야(예를 들면, 대수적 부호화 이론, 자동 장치 이론, 알고리즘 분석, 최적화 이론)의 성장을 자극했고, 오래된 분야(예를 들면, 조합론, 그래프 이론)의 부활을 도왔다. 컴퓨터는 또한 추측을 만들고 판정하며 반증하는데, 좀더 최근에는 정리의 증명에도 도움을 주었다. 이런 변화는 수학의 의미와 증명의 역할에 대해 다시 생각하게 만들었다. 특히, 1976년 아펠과 하켄의 컴퓨터를 이용한 4색 문제의 증명이 촉매제였다. 이 증명은 1482가지의 서로 다른 배치에 대해 컴퓨터에 의한 입증을 요구했다. 일부 비평가들은 이런 형태의 증명이 전통적인 수학적 증명으로부터 매우 벗어났다고 주장했지만, 시간이 지나면서 이런 증명을 받아들이는 경향이 커지고 있다. 티모츠코(T. Tymoczko)는 다음과 같이 말했다[7, p. 259]. “만약 사색 정리를 정리로 받아들인다면, 우리는 ‘정리’의 의미를 바꾸게 된다. 좀더 적절하게 표현하면 ‘증명’의 근본적인 개념의 의미를 바꾸게 된다.” 그리고 데이비스는 다음과 같이 단정했다[6, p. 175]. “정리의 유도 또는 증명의 입증은 확률적인 정당성에 불과하다. 유도 또는 입증의 도구가 인간이 되든 기계가 되는 어떠한 차이점도 없다.”

그리고 20세기 후반기에 등장한 전통적인 방법에 의한 ‘긴’ 증명도 새로운 문제점을 노출시켰다. 예를 들면, 1960년대 홀수 위수의 모든 유한 군의 가해성에 대한 페이트(Feit)와 톰슨(Thomson)의 증명은 300쪽이 넘으며, 이전의 많은 연구 결과에 근거했다. 그리고 1980년대 많은 수학자의 공동 연구를 통해 수행된 유한 단순 군의 분류는 오랫동안 많은 잡지에 분산되어 있는 11,000쪽이 넘는 어려운 수학적 추론으로 구성되어 있다. 이 분야의 주요한 공헌자의 한 사람인 고렌스타인(D. Gorenstein)은 이 증명에 대해 다음과 같이 말했다[15, p. 310]. “... 엄밀하게 추론된 수백 쪽에 달하는 논증을 절대적으로 정확하게 제시하는 것은 인간의 능력을 벗어나는 것으로 보인다. ... 또 다른 단순 군에 유도되는 형태를 단 하나도 빠뜨리지 않았다고 어떻게 보장할 수 있을까? 불행하게도, 어떠한 보장도 없다. 이런 현실 속에 살아야만 한다.” 그렇지만 애쉬바커(M. Aschbacher)는 이에 대해 다음과 같은 희망적인 말을 했다[8, p. 185]. “긴 증명은 많은 수학자를 불안하게 만든다. 한 가지 이유는, 증명의 길이가 증가하는 만큼 오류가 발생할 가능성도 증가한다. 분류 정리의 증명에서 오류가 발행할 확률은 사실상 1이다. 반면에, 임의의 하나의 오류를 쉽게 고칠 수 없는 확률은 사실상 0이다. 그리고 증명이 유한하기 때문에, 그 정리가 부정확한 확률은 0에 가깝다. 시간이 지나면서 우리는 그 증명을 이해할 수 있는 기회를 갖기 때문에, 신뢰 수준은 증가할 뿐이다.”

컴퓨터를 이용한 증명과 긴 증명의 등장과 함께, 수학적 증명에 관한 새로운 철학이 등장하는 것으로 보인다. 이것은 공공의(public) 증명, 준경험론적(quasi-empirical) 증명, 사회적

과정으로서의 증명 등과 같은 여러 가지 이름을 가진다. 이에 대한 옹호자에 따르면, 이의 본질은 '증명은 잘못이 전혀 없지 않다'는 것이다. 그래서 수학적 정리를 절대적 확실성으로 보장할 수 없다. 그리고 이것은 매우 긴 증명이나 컴퓨터의 도움을 요구하는 정리만이 아니라 통상적인 정리에도 적용된다. 이것은 정리의 증명이 통상 다른 정리의 정확성에 의존하기 때문에 그렇다. 그리고 발표된 증명은 통상 저자와 몇 명의 심사 위원만이 세심하게 읽기 때문에, 잘못은 피할 수 없다고 주장한다. 이런 견해를 책 **증명과 논박**(Proofs and Refutations)을 통해 피력한 라카토스(I. Lakatos)의 수리 철학에 대한 설명은 [7, pp. 209-228]을 보라.

그러므로 어떤 정리의 진실성은 통상 1보다 작은 확률을 가진다. 이 확률은 더욱 많은 수학자가 읽고 논의하며 사용함에 따라 증가한다. 결국, 어떤 정리의 승인은(즉, 그 증명의 정당성의 승인은) 사회적 과정이고, 수학계의 신임에 근거한다. "만약 어떤 정리가 권위 있는 잡지에 발표되고 그 저자의 이름이 친숙하며 그 정리가 다른 수학자들에 의해 인용되고 사용된다면, 그 정리는 확립되었다고 간주된다[7, p. 268]."

최근에는 확률론적 증명이 등장해서 증명의 개념은 더욱 다양해지고 있다. 이에 대한 설명은 [15, pp. 311-312]를 보고 이런 방법의 예인 '몬테카를로 방법'에 대한 설명과 예는 [9, 37장, 45장]을 보라.

수학적 증명에 대한 이런 조류는 다음과 같이 허쉬가 최근 수리 철학자들의 생각을 요약한 내용에서도 확인할 수 있다[13, pp. 590-591].

(1) 수학은 인간적이다. 수학은 인류 문화의 일부이며 인류 문화와 어울린다. (프레게의 추상적이고 영구적이며 객관적인 실체가 아니다.)
(2) 수학적 지식은 오류에 빠질 수 있다. 과학과 같이, 수학도 잘못을 저지르고 다음에 이를 수정하며 재수정함으로써 발전할 수 있다. ('의심할 여지가 없는 명제는 없다'는 이런 'fallibilism'은 라카토스의 **증명과 논박**에서 훌륭하게 논의되었다.)
(3) 시간과 장소 및 다른 요소에 의존하는 증명 또는 엄밀성의 서로 다른 변형이 존재한다. 증명에서 컴퓨터의 이용은 비전통적인 엄밀성의 변형이다.
(4) 경험적 증거, 수치적 실험, 확률론적 증명은 모두 우리가 수학에서 믿어야 할 것을 결정하는 데 도움을 준다. 아리스토텔레스의 논리가 언제나 최선의 결정 방법이 될 필요는 없다.
(5) 수학적 대상은 특별한 형태의 사회적-문화적-역사적 대상이다. 수학을 문학 또는 종교와 구별할 수 있다. 그럼에도 불구하고 수학적 대상은 같은 발상을 공유한다.

7. 맺음말

역사적으로 수학자가 추구한 엄밀성에 대해 개략적으로 알아보았다. 수학에서 엄밀성의

기준은 변했는데, 언제나 덜 엄밀한 상태에서 더욱 엄밀한 상태로 변하지는 않았다. 증명의 개념도 절대적이지 않았다. 증명의 정당성은 주어진 임의의 순간의 전반적인 수학적 풍조를 반영하며, 엄밀성의 기준의 강화(또는 약화)는 엄밀성과 관련된 새로운 문제를 야기했음을 알 수 있었다. 그런데 받아들일 만한 수학적 엄밀성의 개념에 관한 철학적 질문을 먼저 고려하지 않고는 이 문제를 논의할 수 없다. 톰은 이와 관련해서 다음과 같은 세 가지 관점을 제시했다[20, p. 696].

(1) 형식적 관점. 형식 체계 S에서 명제 P는 S의 공리들로부터 S의 체계 내에서 허용된 유한 번의 단계 내에 유도할 수 있을 때 참이다.
(2) 실재론 또는 플라톤주의. 수학적 실재는 플라톤주의 생각과 같이 사고와 독립적으로 존재한다. 명제 P는 개념 사이에 실제로 존재하는 관계를 표현할 때, 즉 이에 종속되는 개념들의 무리를 조직화하는 더 높은 차원의 개념일 때 참이다.
(3) 경험적 또는 사회학적 관점. 증명 P는 당대의 지도적인 전문가들의 인정을 받을 때, 엄밀한 것으로 받아들여진다.

톰의 관점에 비추어 볼 때, 엄밀성에 대한 관점은 수학 전체적으로는 언제나 일정한 방향으로 흐른 것은 아니지만, 수학의 각 분야에서는 어느 정도 일관된 조류가 있는 것으로 보인다. 수학 각 분야가 등장할 시기에는 구체적인 사실들의 수집과 응용 및 체계화 과정에서 실재론적 관점을 유지한 것으로 보이며, 이후 반성과 재고의 시기를 거쳐 형식화를 이루고 엄밀한 전개를 위한 연구가 뒤따랐다. 엄밀한 형식화에 뒤이어 이의 한계와 모순이 발견되고 또 다른 재고찰의 시기가 이어지는 것으로 보인다. 그리고 경험적 또는 사회학적 관점은 최근의 수리 철학의 동향과 결부되어 많은 지지자를 확보하고 있는 것으로 보인다.

그러나 '전형적인 수학자는 평일에는 플라톤주의자이고 일요일에는 형식주의자'라는 말과 같이[7, p. 174], 엄밀성에 대한 절대적 기준은 없으며, "엄밀성에 대한 엄밀한 정의는 존재하지 않는다[20, p. 697]." 특히, 수학자는 간결하게 표현해야 할 논문과 교과서 편집에서 편의에 따라 여러 관점을 이용할 수밖에 없다. (증명의 개념에 대해 수학과 수학 교육 및 과학 기술에서 최근에 일고 있는 변화를 고려한 글 10편을 게재한 NCTM의 특집호 [17]을 보라.)

참고 문헌

1. 김용운 · 김용국, **중국수학사**, 대우학술총서 자연과학 109, 민음사, 서울, 1996.
2. 김응태 · 박승안, **현대대수학**, 제3판, 경문사, 서울, 1991.
3. 박창균, "20세기 수학의 패러다임 - 20세기 전 · 후반의 수리철학을 중심으로," **한국수학사학회지**, 제9권 제2호(1996년 12월), 22-29.

4. Bressoud, David M./허민 · 오혜영 역, **실해석학**, 경문사, 서울, 1997.
5. Curry, Haskell B., "Some Aspects of the Problem of Mathematical Rigor," *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, 47(1941), 221-241.
6. Davis, P. J., "Fidelity in mathematical discourse: Is one and one really two?" in *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, ed. by Thomas Tymoczko, Birkhäuser, Boston, 1986, 163-175.
7. Davis, P. J. · Hersh, R./양영오 · 허민 역, **수학적 경험 · 하**, 경문사, 서울, 1995.
8. Devlin, K./허민 역, **수학: 새로운 황금 시대**, 경문사, 서울, 1995.
9. Devlin, K./허민 · 오혜영 역, **수학 세계 탐험기**, 경문사, 서울, 1998.
10. Eves, H./허민·오혜영 역, **수학의 위대한 순간들**, 경문사, 서울, 1994.
11. Eves, H./허민 · 오혜영 역, **수학의 기초와 기본 개념**, 경문사, 서울, 1995.
12. Grabiner, J. V., "Is Mathematical Truth Time-Dependent?" in *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, ed. by Thomas Tymoczko, Birkhäuser, Boston, 1986, 201-213.
13. Hersh, R., "Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics," *The American Mathematical Monthly*, 102(1995), 589-594.
14. Jahnke, H. N. · Otte, M., "Origins of the program of 'arithmetization of mathematics'", in *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, ed. by Herbert Mehrtens, Henk Bos, Ivo Schneider, Birkhäuser, Boston, 1981, 21-49.
15. Kleiner, I., "Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective," *Mathematics Magazine*, 64(1991), 291-314.
16. Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Inc., New York, 1972.
17. NCTM, *Mathematics Teacher*, vol. 91 No. 8(Nov. 1998).
18. Pierpont, J., "Mathematical rigor, past and present," *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, 34(1928), 23-53.
19. Struik, D. J., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.
20. Thom, R., "'Modern' Mathematics: An Educational and Philosophic Error?" *American Scientist*, 59(1971), 695-699.