

## 비선형 시스템에 적용가능한 피드백 사용형 2차 반복 학습제어 알고리즘

### A Second-Order Iterative Learning Algorithm with Feedback Applicable to Nonlinear Systems

허경무, 우광준

(Kyung-Moo Huh and Kwang-Joon Woo)

**Abstract** : In this paper a second-order iterative learning control algorithm with feedback is proposed for the trajectory-tracking control of nonlinear dynamic systems with unidentified parameters. In contrast to other known methods, the proposed learning control scheme utilize more than one past error history contained in the trajectories generated at prior iterations, and a feedback term is added in the learning control scheme for the enhancement of convergence speed and robustness to disturbances or system parameter variations. The convergence proof of the proposed algorithm is given in detail, and the sufficient condition for the convergence of the algorithm is provided. We also discuss the convergence performance of the algorithm when the initial condition at the beginning of each iteration differs from the previous value of the initial condition. The effectiveness of the proposed algorithm is shown by computer simulation result. It is shown that, by adding a feedback term in learning control algorithm, convergence speed, robustness to disturbances and robustness to unmatched initial conditions can be improved.

**Keywords** : iterative learning control, feedback, convergence, robustness to disturbances, initial condition

#### I. 서론

선형 시불변 시스템에 대하여는 정밀 제어에 관하여 많은 연구 결과가 있으나, 산업용 공정은 대부분의 경우 비선형성과 부하의 가변성 등의 이유 때문에 정확한 모델링이나 정밀 제어가 힘들다. 그러나 로봇의 반복 작업이나 NC, 디스크 드라이브의 모터 운용 등에서 볼 수 있는 바와 같이 공정의 반복성이 있는 경우, 또는 시스템이 주기적인 경우에는 제어를 잘 설계하여 불확실한 모델링에 의하여 생기는 어려움을 극복할 수 있는 방법이 있다. 그것은 인간이 가진 학습 능력을 기계에도 주입하여, 같은 일을 반복 수행하면 할수록 다음 번에는 점점 더 좋은 성능을 낼 수 있도록 하는 제어 방법으로서 학습제어라고 불리운다. 특히 오차를 전시간 구간 내에서 오차 한계 내에 들도록 하는 것은, 기존의 불확실한 또는 미지의 시스템에 대하여 적용해 온 MRAC나 STR같은 적응 제어 방식으로는 성취할 수 없다. 이런 점에서 반복적인 시스템에 대한 학습제어의 우월성을 확인할 수가 있으며, 또한 학습제어는 불확실한 동적 시스템을 매우 단순한 방법에 의해 정밀 제어할 수 있다는 것과 반복적인 온라인 제어기법으로서 계산량이 적고 대상 시스템의 동특성에 대한 사전 정보가 많이 요구되지 않는 커다란 장점을 지니고 있다.

이러한 학습제어 방식은 맨 처음에 Uchiyama[1]가 제안한 학습제어 기법으로 소개되었으며 이 기법을 보다

이론적으로 체계화하고 구체화시킨 것은 Arimoto[2]에 의해 이루어졌다. 그 알고리즘의 형태는

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \frac{d}{dt} e_k(t) \quad (1)$$

로서, 이때  $u_k(t)$ 는  $k$  번째 반복수행시의 제어 입력을 나타내고  $e_k(t)$ 는  $u_k(t)$ 에 대한 응답으로서의 실제 시스템 출력  $y_k(t)$ 와 원하는 목표 출력(desired output)  $y_d(t)$ 와의 차이인 출력 오차를 나타내며,  $\Gamma$ 는 학습제어 계수이다. (본 논문에서  $u_k(t)$ ,  $e_k(t)$ ,  $x_k(t)$ ,  $y_k(t)$  등의 표기는 모두  $k$  번째 반복시의 시간  $t$  일때의 값을 나타냄.) 이와 같은 간단한 알고리즘을 불확실한 대상 시스템에 대해 계속 반복 적용시키면, 시스템 출력의 시간에 대한 미분치가 목표 출력의 시간에 대한 미분치에 수렴한다는 것이 증명되었다. 이 학습제어 방식은 이후 여러가지 방법으로 보다 개선시키고 이론적으로 확장되어 가고 있다. Arimoto등은 [3]에서 다음 식과 같은 PID 형태의 반복 학습제어 알고리즘을 제안하였고, [4]에서는 위치상의 수렴을 간단한 시스템의 경우  $L_2$ -sense  $u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Theta e_k(t) + \Gamma \frac{d}{dt} e_k(t) + \Psi \int e_k(\tau) d\tau$ 로 보여주고 있으며, 또 시간에 대한 미분기와 같은 비인과 연산을 피하기 위한 방법으로 Gu와 Loh는 [5]에서 디지털로 구현시 필요한 차등 연산(difference operation)을 사용하는 방법을 제안하였다. 또한 주파수 영역으로 표현된 알고리즘으로서 Moore 등은 [6, 7]에서 (2)와 같은 형태의 학습제어 알고리즘을 제안하였는데, 여기에서 필터함수  $P(s)$ 는 학습제어의 수렴성능을 개선시키기 위한 설계상의 유연성 부가 목적으로 사용된 함수이다.

그리고 Lee는 [8]에서 반복 학습제어기의 강인성과 수렴

접수일자 : 1998. 3. 13. 수정완료 : 1998. 7. 6.

허경무, 우광준 : 단국대학교 전자공학과

※ 이 연구는 단국대학교 대학연구지원비의 지원으로 연구되었음.

성에 관하여 보다 심도있는 분석을 하였다. 한편 위에서 언급한 모든 알고리즘에 있어서는 제어입력  $u_{k+1}(t)$ 가 단지  $k$  번째 반복시의 정보량 ( $u_k(t), e_k(t)$ )만을 사용하

$$U_{k+1}(s) = P(s)U_k(s) + Q(s)\Delta Y_k(s) \quad (2)$$

여 구해지고 있는 반면에, Huh와 Bien은 [9]에서 더 많은 과거 정보들을 사용하여  $u_{k+1}(t)$ 를 얻도록 함으로써 제어 성능의 향상을 이룰 수 있는 방법을 제안하였다.

한편, 실제 시스템에 학습제어를 적용하는데 있어서 문제가 되는 초기 오차나 외란에 대한 대책으로 학습제어의 궤환항에 대해 언급할 필요가 있다. Lunde와 Balchen은 [10]에서 궤환과 피드포워드 제어의 관점에서 학습제어를 논하였으며, Bondi등은 [11]에서 '고이득 궤환'의 관점에서 반복 학습제어를 연구하였다. 특히 [11]에서는 선형 궤환 이득을 충분히 크게 함으로써 페루프 시스템에서의 원하는 궤적 주위에 흡인 영역을 설정하였으며, 이때 매 반복시마다 제안된 수정 신호가 시스템을 흡인 영역 비감으로 밀어내지 않는다는 점에서 학습의 수렴성을 보였다. 그러나 이들 모두의 알고리즘은 제어입력  $u_{k+1}(t)$ 가 과거의 데이터에 의해서만 결정되므로 기본적으로 개루프형이다. 반복 학습제어 시스템이 외란에 강인하고 개루프 특성을 보완하기 위해서는 궤환항이 반드시 있어야 한다고 생각한다.

Owens는 [12]에서 (3a)와 같은 형태의 알고리즘을 제시하였는 바, 여기에서  $e_{k+1}(t)$ 는 현재의 오차로서, 현재 오차의 궤환항이 학습제어 법칙에 바로 이용되는 첫 형태로서 제안되었다. 하지만 이 알고리즘은 선형 시스템에 대해서만 수렴성이 증명되었으며, 그 수렴 특성이 매우 약한 것으로 판명되었다. 또한 구체적인 실험 결과 및 그에 따른 성능 향상등은 제시되지 않았다. 그리고 Lee등[13]은 선형 연속 시스템 입출력 특성의 퓨리

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + K e_{k+1}(t) \quad (3a)$$

에 급수 근사를 이용한 궤환을 가진 학습제어 알고리즘을 제안하였다. (3b)와 같은 형태의 학습제어 알고리즘에서의  $f$ 에 가장 적당한 함수가 시스템의 역모델이라는 사실에 따라, 시스템의 입출력 퓨리에 근사 모델로 역모델을 만들어 기본적인 주파수 특성을 알아냄과 동시에 이를 주파수 영역에 따라 선택적으로 제어기 설계에 이용할 수가 있게 되는 것이다. 이 알고리즘에 있어서 수렴에 대한 충분 조건과 원하는 제어 입력의 존재 및 유일성은 보여졌으나, 이 알고리즘 역시 선형 시스템에 제한하여 수렴성 및 방법이 제시되었다. 한편 Jiang등은 [14]에서 불확실한 비선형 시스템에 대해 적용할 수 있는 적용 반복제어 알고리즘을 제안하였다.

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + f(e_k(\cdot)) \quad (3b)$$

본 논문에서는 학습제어의 수렴 성능을 향상시킬수 있고, 이미 학습된 정보를 잃어버리게 하는데 원인이 되는 시스템 파라미터 변동이나 외란에 대하여 더욱 강인하며 동시에 시스템을 더욱 안정화시킬수 있는 방법으로서, 비선형 시스템에도 적용이 가능한 피드백 사용형 2차 반

복 학습제어 알고리즘을 제안한다. 그리고 제안한 알고리즘에 의해 시스템 출력이 목표 출력에 수렴한다는 것을 증명해 보이며 수렴하기 위한 조건들을 제시한다. 제안된 알고리즘은 2차 반복 학습제어 방법을 근간으로 하여 여기에 궤환 항을 추가로 갖는 새로운 학습제어 알고리즘으로서, 특히 외란의 제거와 시스템의 안정화를 위하여 궤환 루프가 제어 시스템에 필요하다는 사실을 고려할 때 학습제어에 궤환 항을 추가함으로써 수렴 성능과 외란에 대한 강인성을 향상시키는 좋은 결과를 낼 수 있음을 알 수 있다. 그리고 제안된 알고리즘은 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 기존의 알고리즘들을 적용했을 때의 결과보다 수렴 성능과 외란에 대한 강인성이 훨씬 향상되었음을 확인할 수 있었다. 아울러 초기 조건의 오차가 있을 경우에 있어서도 제안된 알고리즘의 방법이 초기 조건 오차에 대한 강인성 면에서 훨씬 더 좋은 성능을 나타내고 있음이 확인되었다.

본문에서 사용되는 벡터 노름(vector norm)과 매트릭스 노름(matrix norm), 그리고 lambda 노름은 다음과 같이 정의되는 노름이다.

$$\|f\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq r} |f^{(i)}|$$

$$\text{when } f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(r)})$$

$$\|G\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \sum_{j=1}^r |g^{(ij)}| \right\}$$

$$\text{when } G = (g^{(ij)})$$

$$\|h(\cdot)\|_{\lambda} \triangleq \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} \|h(t)\|_{\infty}$$

$$\text{when } h : [0, T] \rightarrow R^n$$

## II. 비선형 시스템에 적용가능한 피드백 사용형 2차 반복 학습제어 알고리즘

다음과 같은 형태의 비선형 동적 시스템(nonlinear dynamic system)을 대상으로 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x) + B(t)u(t), & x(0) &= \xi^0, & 0 \leq t \leq T \\ y(t) &= g(t, x) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $x$ 는 (nx1)의 상태 벡터이고  $u$ 는 (px1)의 제어 벡터이며  $y$ 는 (mx1)의 출력 벡터이다. 우리가 성취하고자 하는 목표 출력 경로를  $y_d(t), 0 \leq t \leq T$  라하고, 허용 오차 범위를  $\epsilon^* > 0$ 이라 하자. 이때 우리의 목적은 시스템 파라미터 함수  $f(t, x), B(t), g(t, x), D(t)$  들을 정확히 알지 못하는 상태에서, 비선형 시스템 (4)의 출력  $y(t)$ 가 다음 (5)과 같은 조건을 만족시키도록 하는 제어 입력  $u(t), 0 \leq t \leq T$  를 구해내는 것이다.

$$E(y(t)) = \|y_d(t) - y(t)\| \leq \epsilon^*, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

여기서 시스템에 대한 동특성을 정확히 알지 못하는 상태이기 때문에, 우리가 생각하는 경로추적 문제는 간단히 해결되기가 어렵다. 그래서 그것을 해결하기 위한 방법으로서 다음과 같은 피드백 사용형 2차 반복 학습제어 알고리즘을 제안한다.

$$u_{k+1}(t) = P_1 u_k(t) + P_2 u_{k-1}(t) + Q_1 e_k(t)$$

$$+ Q_2 e_{k-1}(t) + R e_{k+1}(t) \quad (6)$$

여기에서  $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$  이며, 위 알고리즘을 2차 반복 학습제어 알고리즘이라 부르는 이유는 시간  $t$  를 고정시켜 놓고 생각할 경우 반복횟수  $k$  에 대하여 2차 이산 방정식(discrete equation)의 형태를 갖추고 있기 때문이다. (6)의 알고리즘의 구조는 그림 1과 같다.

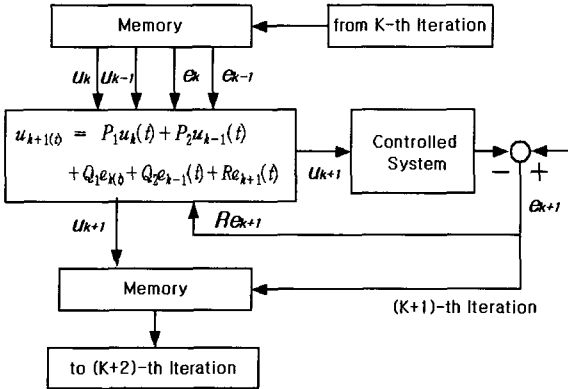


그림 1. 피드백 사용형 2차 반복 학습제어의 구조.

Fig. 1. Structure of second-order iterative learning control algorithm with feedback.

이제 본 논문에서 제안한 알고리즘이 반복횟수  $k$  가 증가함에 따라 시스템 출력이 목표 출력에 수렴하도록 보장한다는 것을 정리 1에서 보인다.

정리 1 : 비선형 시스템 (4)에 있어서 시스템 파라미터 함수  $f(t, x)$ ,  $B(t)$ ,  $g(t, x)$ ,  $D(t)$ 가 시간  $t$  에 대한 주기 함수로서 주기가  $T$  이고, 모든 시간대  $t \in [0, T]$  에 대하여 비선형 함수  $f(t, x)$ 와  $g(t, x)$ 가  $(R^n \times R^n)$ 에 속하는 모든  $(x_1, x_2)$ 에 대해 (7)과 같은 Lipschitz 연속 조건을 만족시키며, 함수  $B(\cdot)$ 와  $D(\cdot)$ 는  $t \in [0, T]$ 에서 제한(bounded)된 값을 갖는다고 하자.

$$\begin{aligned} \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_\infty &\leq f_0 \|x_1 - x_2\|_\infty \\ \|g(t, x_1) - g(t, x_2)\|_\infty &\leq g_0 \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned} \quad (7)$$

또한 비선형 시스템 (4)의 초기 상태를  $x(0) = \xi^0$ 로 알고 있다고 하고, 다음 두 조건을 만족시키는 (pxp)의 행렬  $P_1, P_2$  와 (pxm)의 행렬  $Q_1, Q_2, R$  이 존재한다고 하자.

$$\begin{aligned} (A1) \quad P_1 + P_2 &= I \\ (A2) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1}(P_1 - Q_1 D(t))\|_\infty + \\ &\sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1}(P_2 - Q_2 D(t))\|_\infty < 1 \end{aligned}$$

이 때 주어진 목표 출력  $y_d(t), 0 \leq t \leq T$  에 대해 (6)의 학습제어 알고리즘을 적용하면, 초기 입력  $u_0(t) 0 \leq t \leq T$  를 연속함수로 선택하고 매 반복시마다의 초기 상태를  $\xi^0$ 로 같게 했을 경우 반복횟수  $k$  가 증가함에 따라 모든 시간대  $t \in [0, T]$ 에서 출력  $y_k(t)$ 가 목표 출력  $y_d(t)$ 에 수렴한다.

증명 : 목표 출력  $y_d(t)$ 에 해당하는 제어 입력과 상태 변수를 각각  $u_d(t)$ 와  $x_d(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} u_d(t) - u_{k+1}(t) &= P_1(u_d(t) - u_k(t)) + P_2(u_d(t) \\ &- u_{k-1}(t)) - Q_1[g(t, x_d) + D(t)u_d(t) - g(t, x_k) \\ &- D(t)u_k(t)] - Q_2[g(t, x_d) + D(t)u_d(t) \\ &- g(t, x_{k-1}) - D(t)u_{k-1}(t)] - R[g(t, x_d) \\ &+ D(t)u_d(t) - g(t, x_{k+1}) - D(t)u_{k+1}(t)] \\ &= (P_1 - Q_1 D(t))(u_d(t) - u_k(t)) + (P_2 - Q_2 D(t)) \\ &(u_d(t) - u_{k-1}(t)) - Q_1(g(t, x_d) - g(t, x_k)) \\ &- Q_2(g(t, x_d) - g(t, x_{k-1})) \\ &- R(g(t, x_d) - g(t, x_{k+1})) - RD(t)(u_d(t) - u_{k+1}(t)) \end{aligned}$$

로부터

$$\begin{aligned} (I + RD(t)) (u_d(t) - u_{k+1}(t)) \\ = (P_1 - Q_1 D(t))(u_d(t) - u_k(t)) + (P_2 - Q_2 D(t)) \\ (u_d(t) - u_{k-1}(t)) - Q_1(g(t, x_d) - g(t, x_k)) - Q_2 \\ (g(t, x_d) - g(t, x_{k-1})) - R(g(t, x_d) - g(t, x_{k+1})) \end{aligned}$$

가 얻어지며, 양변에  $(I + RD(t))^{-1}$  을 곱한 뒤 노름을 취하고 Lipschitz 연속 조건 (7)을 이용하면 다음과 같은 부등식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \|u_d(t) - u_{k+1}(t)\|_\infty &\leq \\ \|(I + RD(t))^{-1}(P_1 - Q_1 D(t))\|_\infty \|u_d(t) - u_k(t)\|_\infty \\ + \|(I + RD(t))^{-1}(P_2 - Q_2 D(t))\|_\infty \|u_d(t) \\ - u_{k-1}(t)\|_\infty + g_0 \|(I + RD(t))^{-1} Q_1\|_\infty \|x_d(t) \\ - x_k(t)\|_\infty + g_0 \|(I + RD(t))^{-1} Q_2\|_\infty \\ \|x_d(t) - x_{k-1}(t)\|_\infty + g_0 \|(I + RD(t))^{-1} R\|_\infty \\ \|x_d(t) - x_{k+1}(t)\|_\infty \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (8)$$

가정에서 모든  $k$  에 대해  $x_k(0) = x_d(0)$  이 성립하므로 모든 시간대  $0 \leq t \leq T$  에서 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty &= \left\| \int_0^t [(f(\tau, x_d) + B(\tau) \\ u_d(\tau)) - (f(\tau, x_k) + B(\tau)u_k(\tau))] d\tau \right\|_\infty \\ &\leq \int_0^t [f_0 \|x_d(\tau) - x_k(\tau)\|_\infty + b \|u_d(\tau) - u_k(\tau) \\ \|_\infty] d\tau \quad (\text{이때 } b = \sup_{t \in [0, T]} \|B(t)\|_\infty) \end{aligned} \quad (9)$$

여기에 Bellman-Gronwall lemma를 적용하면

$$\|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty \leq \int_0^t b \|u_d(\tau) - u_k(\tau)\|_\infty e^{f_0(t-\tau)} d\tau, \quad \forall t \in [0, T] \quad (10)$$

의 부등식이 얻어지며, 따라서 (8)과 (10)로부터 다음 관계가 얻어진다. (여기서 식을 간단히 하기 위해  $u_d(t) - u_k(t)$ 를  $\delta u_k(t)$ 로 표기한다.)

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\infty &\leq l_1 \|\delta u_k(t)\|_\infty + l_2 \|\delta u_{k-1}(t)\|_\infty \\ + m_1 \int_0^t \|\delta u_k(\tau)\|_\infty e^{f_0(t-\tau)} d\tau + m_2 \int_0^t \|\delta u_{k-1}(\tau) \\ \|_\infty e^{f_0(t-\tau)} d\tau + m_3 \int_0^t \|\delta u_{k+1}(\tau)\|_\infty e^{f_0(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

(단,  $l_i = \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1}(P_i - Q_i D(t))\|_\infty$

$$m_3 = g_0 b \|(I + RD(t))^{-1} R\|_\infty$$

$$m_i = g_0 b \|(I + RD(t))^{-1} Q_i\|_\infty, \quad (i=1, 2) \text{임.})$$

(11)에 정함수(positive function)  $e^{-\lambda t}$ 를 곱하면 다음 관계가 얻어지며

$$\begin{aligned}
 e^{-\lambda t} \|\delta u_{k+1}(t)\|_{\infty} &\leq l_1 e^{-\lambda t} \|\delta u_k(t)\|_{\infty} + l_2 e^{-\lambda t} \\
 \|\delta u_{k-1}(t)\|_{\infty} &+ m_1 \int_0^t e^{-\lambda t} \|\delta u_k(\tau)\|_{\infty} e^{(f_0-\lambda)(t-\tau)} \\
 dt &+ m_2 \int_0^t e^{-\lambda t} \|\delta u_{k-1}(\tau)\|_{\infty} e^{(f_0-\lambda)(t-\tau)} dt \\
 &+ m_3 \int_0^t e^{-\lambda t} \|\delta u_{k+1}(\tau)\|_{\infty} e^{(f_0-\lambda)(t-\tau)} dt \\
 &\leq l_1 \|\delta u_k(\cdot)\|_{\lambda} + l_2 \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_{\lambda} \\
 &+ m_1 \int_0^t \|\delta u_k(\cdot)\|_{\lambda} e^{(f_0-\lambda)(t-\tau)} d\tau + m_2 \int_0^t \\
 \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_{\lambda} &e^{(f_0-\lambda)(t-\tau)} d\tau + m_3 \int_0^t \|\delta u_{k+1} \\
 (\cdot)\|_{\lambda} &e^{(f_0-\lambda)(t-\tau)} d\tau, \forall t \in [0, T]
 \end{aligned} \tag{12}$$

이로부터

$$\begin{aligned}
 \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_{\lambda} &\leq [l_1 + \frac{m_1}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})] \\
 \|\delta u_k(\cdot)\|_{\lambda} &+ [l_2 + \frac{m_2}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})] \\
 \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_{\lambda} &+ \frac{m_3}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T}) \\
 \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_{\lambda} &\text{ for } \lambda \neq a
 \end{aligned} \tag{13}$$

가 되고, 이를 정리하면 다음과 같이 되며,

$$\begin{aligned}
 [1 - \frac{m_3}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})] \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_{\lambda} &\leq \\
 [l_1 + \frac{m_1}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})] \|\delta u_k(\cdot)\|_{\lambda} & \\
 + [l_2 + \frac{m_2}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})] \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_{\lambda} & \\
 \lambda \text{ 가 충분히 클 경우 다음 식으로 나타난다.} & \\
 \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_{\lambda} \leq & \\
 \frac{l_1 + \frac{m_1}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})} \|\delta u_k(\cdot)\|_{\lambda} & \\
 + \frac{l_2 + \frac{m_2}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})} \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_{\lambda} &
 \end{aligned} \tag{14}$$

여기에서 다음 관계가 성립한다고 가정할 때

$$\begin{aligned}
 \frac{l_1 + \frac{m_1}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})} & \\
 + \frac{l_2 + \frac{m_2}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})} &< 1
 \end{aligned}$$

$k$ 가 증가함에 따라  $\|\delta u_k(\cdot)\|_{\lambda}$ 가 0으로 수렴한다는 것을 보이는 것은 그리 어렵지 않다. 즉

$$w_{k+2} \leq r w_{k+1} + s w_k \quad (r, s > 0)$$

과 같은 성질을 갖는 nonnegative sequence  $\{w_k\}$ ,  $k=1,2,3,\dots$ 는  $r+s < 1$ 이면 항상 0으로 수렴한다

는 사실로부터 쉽게 알 수 있다. 그런데 조건 (A2)로부터  $l_1 + l_2 < 1$  이므로  $\lambda > 0$ 를 충분히 크게 잡음으로써 항상 다음 부등식 (15)가 성립할 수 있도록 할 수 있다.

$$\frac{l_1 + l_2 + \frac{m_1}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T}) + \frac{m_2}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-f_0}(1-e^{(f_0-\lambda)T})} < 1 \tag{15}$$

따라서  $k$ 가 커짐에 따라  $\|\delta u_k(\cdot)\|_{\lambda}$ 는 0으로 수렴하게 된다. 한편  $\|\cdot\|_{\lambda}$ 의 정의로부터

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\delta u_k(t)\| \leq e^{\lambda T} \|\delta u_k(\cdot)\|_{\lambda}$$

의 관계가 성립하므로 결국  $k$ 가 커짐에 따라

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\delta u_k(t)\| \text{가 } 0 \text{으로 수렴하게 된다. 이는 곧 } k \rightarrow \infty \text{ 일때 } u_k(t) \rightarrow u_d(t), \forall t \in [0, T] \tag{16}$$

을 의미하며, 더구나 이는 다시 (12)에 의해  $k \rightarrow \infty$ 일때  $x_k(t) \rightarrow x_d(t) \forall t \in [0, T]$ ,

이 성립함을 의미한다. 따라서 (4), (16), (17)로부터  $k \rightarrow \infty$ 일때  $y_k(t) \rightarrow y_d(t), \forall t \in [0, T]$ 이 성립함을 알 수 있다. ■

주 1 : 위 정리에서 직달항(direct transmission term)인  $D(t)$ 항이 매우 중요한 역할을 하고 있으며, 이로 인해 제안된 학습 규칙을 적용할 수 있는 시스템을 한정시키는 제약이 되는 것이 사실이다. 같은 맥락에서 Sugie와 Ono는 [15, 16]에서 학습제어의 수렴 증명에 있어서 직달항이 결정적인 역할을 하고 있음을 밝혔으며, 더욱이 선형 시불변 시스템에서 이러한 직달항이 존재하지 않는 시스템일 경우에는 시스템 상대 차수(전달함수의 분모 분자 차수 차이)에 해당하는 갯수만큼 오차를 미분하여 학습에 사용하는 것이 필요하다고 밝히고 있다.

주 2 : 위에서 제안한 학습제어 알고리즘을 적용하려면  $D(t)$ 항이 있어야 하며, 따라서 시스템 입출력식에  $D(t)$ 가 없는 경우에는 출력이나 상태변수의 시간미분항을 사용하여야 한다. 이와같은 출력의 시간미분항을 피하고 시스템 출력을 직접 학습에 이용하기 위한 시도는 꾸준히 연구되어 왔다. 즉, [17, 18]에서는 forget-factoring factor를 사용한 P형 학습제어 기법을 제안한 바 있으나, 다만 선형화시킨 시스템에 한해서 수렴성을 보였고, 또한 STR(strictly positive real) 선형 시스템에 한해서 학습 초기의 입출력 신호들이 유한하다는 가정하에 수렴을 증명한 경우도 있다.

### III. 시뮬레이션 결과 및 고찰

본 논문에서 제안한 알고리즘 (6)은 기존의 알고리즘들 보다 복잡하게 여겨질지 모르지만, 학습제어의 관점에서 보면 빠른 수렴성능을 위해 조정할 수 있는 제어 파라미터의 수가 더 많기 때문에 훨씬 더 효과적인 수 있다. 더욱이 본 알고리즘에서의 제어 입력  $u_{k+1}(t)$ 는 이전의 출력인  $y_{k-1}(t)$ 를 추가해 사용하기 때문에, 현재의 출력

부분에서 발생하는 일시적인 외란에 대하여 덜 민감하다는 사실을 쉽게 알 수 있다. 이제 본 논문에서 제안한 피드백 사용형 2차 반복 학습 제어 알고리즘과 기존의 학습 제어 알고리즘들과의 성능을 비교하기 위해, [2,9]에서 사용되었던 다음 시스템에 대하여 각각의 알고리즘을 적용시켜 그 결과를 살펴보기로 한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+5t) & -(3+2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (18a)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (18b)$$

$$y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (18c)$$

이때 목표 출력  $y_d(t)$ 도 [2, 9]에서의와 같이

$$y_d(t) = 12t^2(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (19)$$

로 하기로 한다. 그런데 이 시스템에서는 동특성식 (18c)에  $D(t)$ 와 관련된 항목이 없기 때문에 정리 1에 의한 학습제어 알고리즘 (6)을 곧바로 적용할 수가 없다. 그렇지만 시스템 출력 방정식 (18c)와 목표출력 (19)를 약간 변형함으로써 손쉽게 정리 1이 적용될수 있는 등가의 출력식 및 목표 출력을 얻을수 있음을 알 수 있다.

이를 위해 먼저 다음과 같은 임의의 두개의 미분 가능한 시간함수  $z_1(t)$ 와  $z_2(t)$ 에 대해,

$$z_1(t) = z_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

이 성립하기 위한 필요충분 조건은

$$\begin{aligned} z_1(0) &= z_2(0) \\ \dot{z}_1(t) &= \dot{z}_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

이 됨을 관찰할 필요가 있다. 따라서 같은 논리로 다음과 같은 플랜트

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (20a)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20b)$$

$$\hat{y}(t) = \dot{y}(t) = \hat{C}(t)x(t) + \hat{D}(t)u(t) \quad (20c)$$

(이때  $\hat{C}(t) = CA(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+5t) & -(3+2t) \end{bmatrix}$   
 $= [-(2+5t) \ -(3+2t)]$ ,

$$\hat{D}(t) = CB(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \text{ 임.})$$

$$\hat{y}_d(t) = \dot{y}_d(t) = 12t(2-3t) \quad (21)$$

가  $u(0)=0$ 인 조건하에 (18a), (18b), (18c), (19)와 등가(equivalent)임을 쉽게 알 수 있다. 다시 말해서 (20)의 출력  $\hat{y}(t)$ 를 (21)의 목표 출력  $\hat{y}_d(t)$ 로 가계 하는 그 어떤 제어 방식도, (18)의 출력  $y(t)$ 를 (19)의 목표 출력  $y_d(t)$ 로 가도록 한다는 점에서 등가하다고 하는 것이다. 이제  $\epsilon^* = 0.1$ 로 하고 모든 시간대에서 경로 오차를  $\epsilon^*$ 내에 들도록 추적 성능을 보장하기 위해 1차 반복 학습제어, 2차 반복 학습제어, 그리고 피드백 사용형 2차 반복 학습제어의 세가지 알고리즘을 설계하여 (20),(21)에 대

해 원하는 성능이 나올때까지 계속 적용한다. 참고로 Arimoto에 의한 [2]에서의 방법은 본 논문에서 표기한 “1차 반복 학습제어” 알고리즘과 일치한다는 것을 밝혀 둔다. 여기서 필요한 초기치들은 다음과 같이 하였다.

$$u_{-1}(t) = u_0(t) = e_{-1}(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

제어 대상 시스템의 불확실성과 관련하여, (20c)의  $\hat{D}(t)$ 에 대해 전혀 아무것도 모를 경우 알고리즘 (6)에서의 제어 파라미터를 적절히 선택하기란 어려울지도 모른다. 그러나 만일 우리가  $\hat{D}(t)$ 에 대하여 최소한도의 정보인 정(positive)이나 부(negative)이나 정도만 안다고 가정하여도, 본 알고리즘을 성공적으로 적용할 수가 있다.

본 적용예에 있어서는  $\hat{D}(t)$ 가 정의 값을 갖는 것으로 알고 있다고 가정하고, 그 값이  $\hat{D}(t) = 0.5$  라고 추정하였다고 하자. [2]에서의 1차 반복 학습제어 알고리즘의 수렴조건은  $\|I - CBF\| < 1$  과 같이 되므로 따라서 이 방법에서 추정된  $\hat{D}(t)$ 값에 대해 가장 빠른 수렴속도를 갖도록 학습제어 계수  $\Gamma$ 를 선택하면  $\Gamma = (CB)^{-1} = [\hat{D}(t)]^{-1} = 0.5^{-1} = 2$ 가 되며, 이때의  $k$  번째 수행시의 출력  $y_k(t)$ 는 그림 2와 같다. 여기서 관찰할 수 있듯이  $\epsilon^*$ 이내의 경로오차를 유지하기까지 23번의 수행이 필요함을 알 수 있다. 그리고 2차 반복 학습제어의 경우,  $\hat{D}(t)$ 의 추정치에 따라  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ 를 선택하게 되면  $P_1 = 0.8, P_2 = 0.2, Q_1 = 1.6, Q_2 = 0.4$ 가 선택되게 된다. (가장 빠른 수렴성능을 갖도록 선택) 이때  $k$  번째 수행시의 출력  $y_k(t)$ 를 그려보면 그림 3과 같게 되는데 이로 부터 목표 경로와  $\epsilon^*$ 이내의 경로오차를 유지하도록 하는데 7번의 수행으로써 충분하다는 것을 알 수 있다. 그러나 본 논문에서 제안한 피드백 사용형 2차 반복 학습제어를 적용한 경우에는 그림 4의 결과와 같이 목표 경로와  $\epsilon^*$ 이내의 경로오차를 유지하도록 하는데 단지 4번의 수행으로써 충분하다는 결과를 얻었다. 이 때 각 제어계수들은  $P_1 = 1.12, P_2 = -0.12, Q_1 = 1.4, Q_2 = -0.15, R = 0.013$  으로 선택되었다. 이는 1차 학습제어인 경우의 23번, 2차 학습제어인 경우의 7번에 비교하면 한결 더 좋아진 성능임을 알 수 있다.

그림 5와 그림 6은 학습제어가 충분히 이루어져 목표 경로에서 동작하고 있는 도중에,  $t = 0.3$ 에서 순간적으로 0.02초 동안 속도가 20만큼 감소될 정도의 외란이 가해졌을 때의 그 이후의 출력 결과 들이다. 그림 5는 2차 반복 학습제어( $P_1 = 0.8, P_2 = 0.2, Q_1 = 1.6, Q_2 = 0.4$ )의 경우로서 7번의 수행뒤에 다시  $\epsilon^*$ 이내의 경로오차를 유지할 수 있었음을 알 수 있고, 그림 6은 피드백 사용형 2차 반복 학습제어( $P_1 = 1.12, P_2 = -0.12, Q_1 = 1.4, Q_2 = -0.15, R = 0.13$ )의 경우로서 5번의 수행뒤에 다시  $\epsilon^*$ 이내의 경로오차를 유지할 수 있었음을 알 수 있다. 이 결과로부터 학습제어에 피드백을 사용하도록 함으로써 외란이 가해졌을 때 빠른 복구 능력과 강인성의 향상을 이룰 수 있다는 것을 확인할 수 있다.

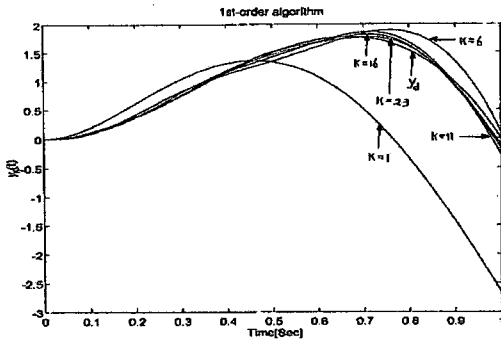


그림 2. 1차 반복 학습제어에 의한 출력 추적 성능.  
Fig. 2. Output tracking performance by 1st-order iterative learning control.

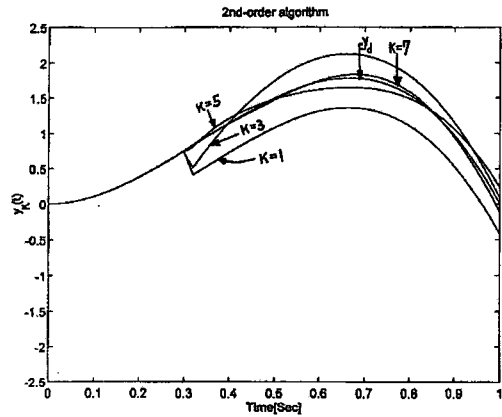


그림 5. 외란으로부터의 복구 특성. (2차 반복 학습 제어의 경우)

Fig. 5. Recovery from disturbance. (Second-order iterative learning control case)

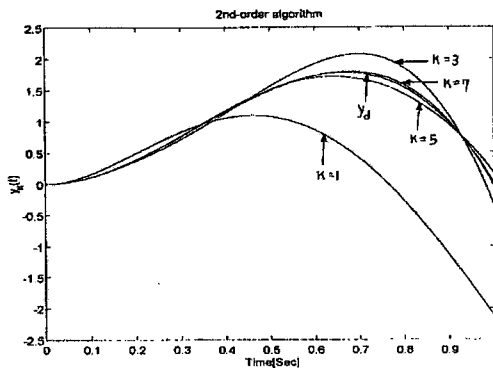


그림 3. 2차 반복 학습제어에 의한 출력 추적 성능.  
Fig. 3. Output tracking performance by second-order iterative learning control.

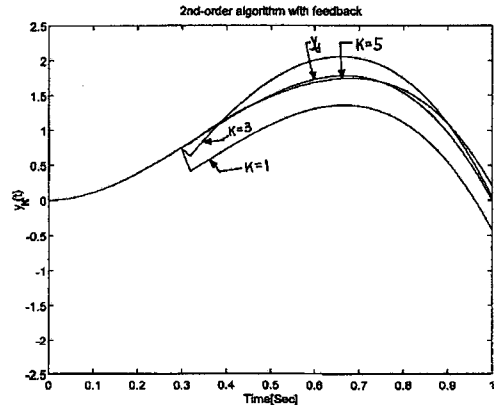


그림 6. 외란으로부터의 복구 특성. (피드백 사용형 2차 반복 학습제어의 경우)

Fig. 6. Recovery from disturbance. (Second-order iterative learning control with feedback case)

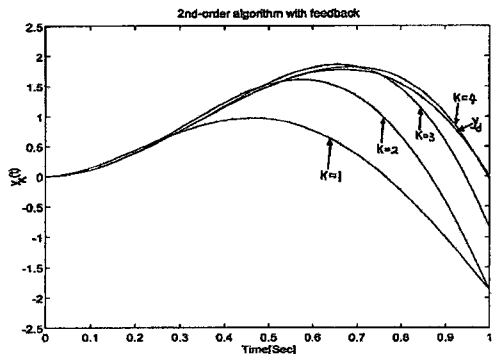


그림 4. 피드백 사용형 2차 반복 학습제어에 의한 출력 추적 성능.

Fig. 4. Output tracking performance by second order iterative learning control with feedback.

한편 학습제어 시스템에서 ‘초기 조건의 오차 없음’이란 가정은 큰 제약 조건이지만, 로봇트 운용에서 볼 수 있는 것처럼 만족시키는 경우도 있다. Lee 등[19]은 초기 조건의 불일치에서 오는 어려움을 조사하였으며 이 조건이 완벽 추종의 필요 조건임을 밝혔다. Heinzinger 등 [20]은 초기 조건의 오차가 있는 경우의 학습제어의 강인성을 논하고 오차의 상한값을 유도한 바 있다.

그림 8과 그림 9는 앞서와 같은 시스템에 대해 초기 조건의 오차가 있을 경우의 결과로서, 각 반복시마다 초기 조건에 약간의 무작위 오차가 있을 경우의 출력 오차

의 ISE(Integrated Square Error) 값을 보인다. 이 때 초기 조건의 오차는  $0.002 * random(0,1)$ 의 크기로 하였고, 반복횟수는 50까지로 하였다. 그림 8은 2차 반복 학습제어를 적용했을 때의 결과이고 그림 9는 피드백 사용형 2차 반복 학습제어를 적용했을 때의 결과로서, 제어 계수들은 앞서의 값들과 같도록 하였다. 그리고 그림 7은 초기 조건의 오차가 없을 경우에 대한 피드백 사용형 2차 반복 학습제어 적용시의 결과이다. 이 결과들에서 보듯이 피드백 사용형 2차 반복 학습제어의 경우가 피드백을 사용하지 않는 경우보다 초기 조건 오차에 대한 강인성 면에서도 훨씬 더 좋은 성능을 나타냄을 알 수 있다.

#### IV. 결론

본 논문에서는 비선형성과 부하의 가변성 등의 이유 때문에 정확한 모델링이나 제어가 힘든 대부분의 산업용 공정의 정밀 제어를 위해 학습제어 기법을 적용하는데 있어서 그 수렴 성능을 향상시키고 시스템 파라미터 변

동이나 외란 및 초기 조건 오차에 대한 강인성을 증대시키기 위해 2차 반복 학습제어 방법을 근간으로 하여 여기에 궤환 항을 추가로 갖는 새로운 학습제어 알고리즘을 제안하였고, 제안한 알고리즘의 수렴성의 증명 및 수렴 조건을 제시하였다. 특히 외란의 제거와 시스템의 안정화를 위하여 궤환 루프가 제어 시스템에 필요하다는 사실을 상기해 보면, 외란에 대한 강인성을 증대시키기 위한 궤환 항을 함께 고려함으로써 더 좋은 결과를 낼수 있었음을 알 수 있으며, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 기존의 알고리즘들을 적용했을 때의 결과보다 수렴 성능과 외란 및 초기 조건 오차에 대한 강인성이 훨씬 향상되었음을 확인할 수 있었다. 그리고 본 알고리즘의 수렴 조건 (A1), (A2)를 살펴 보면 [9]에서의 수렴 조건보다 제어계수의 수가 한 개 더 많음을 알 수 있고 따라서 수렴 속도를 향상시킬 수 있는 여지가 훨씬 더 많다는 것을 알 수 있다. 한편 시뮬레이션을 통하여 본 알고리즘에서 궤환 항의 제어 계수  $R$ 이 수렴 여부 및 수렴 속도에 크게 영향을 미치는 것으로 확인되었으나, 보다 체계적인 분석은 아직 이루어지지 못하였는 바 추후에 보완할 예정이다.

계적인 분석은 아직 이루어지지 못하였는 바 추후에 보완할 예정이다.

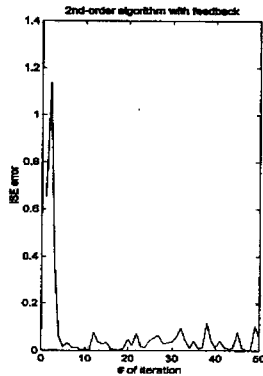


그림 9. 초기 조건 오차가 있을 경우의 출력 오차. (피드백 사용형 2차 반복 학습제어 적용시)  
 Fig. 9. Output error when initial error exist. (Second-order iterative learning control with feedback case)

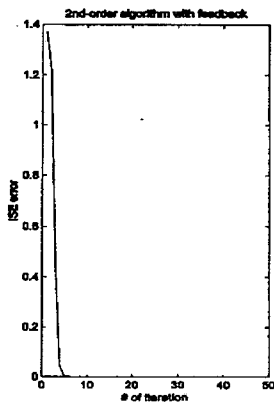


그림 7. 초기 조건 오차가 없을 경우의 출력 오차. (피드백 사용형 2차 반복 학습제어 적용시)  
 Fig. 7. Output error when initial error do not exist. (Second-order iterative learning control with feedback case)

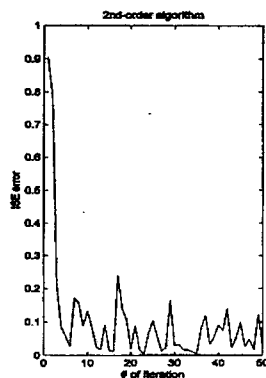


그림 8. 초기 조건 오차가 있을 경우의 출력 오차. (2차 반복 학습제어 적용시)  
 Fig. 8. Output error when initial error exist. (Second-order iterative learning control case)

참고문헌

- [1] M. Uchiyama, "Formulation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial," *Trans Society of Instrument and Control Engineers of Japan*, vol. 14, no. 6, pp. 706-712, 1978.
- [2] S. Arimoto, S. Kawamura and F. Miyazaki, "Bettering operation of robots by learning," *J. of Robotic Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 123-140, 1984.
- [3] S. Arimoto, S. Kawamura and F. Miyazaki, "Bettering operation of dynamic systems by learning : a new control theory for servomechanism or mechatronic systems," *Proc. of 23rd Conf. on Decision and Control, Lasvegas*, pp. 1064-1069, Dec., 1984.
- [4] S. Kawamura, F. Miyazaki, S. Arimoto, "Applications of learning method for dynamic control of robot manipulators," *Proc. of 24th IEEE Conf. on Dec. and Cont.*, pp. 1381-1386, 1985.
- [5] Y. Gu and N. Loh, "Learning control in robotic systems," *Proc. IEEE Int'l Symposium on Intelligent Control, Philadelphia, Pa.* pp. 360-364, 1987.
- [6] K. L. Moore, M. Dahleh, S. P. Bhattacharyya, "Iterative learning control : A survey and new results," *J. of Robotic Sys.*, vol. 9, no. 5, pp. 563-594, 1992.
- [7] K. L. Moore, *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*, Springer-Verlag, 1993.
- [8] Hak-sung Lee, *Study on the Robustness and the Convergence Properties of Iterative Learning Controller*, 한국과학기술원 박사학위 논문, 1996.
- [9] Z. Bien and K. M. Huh, "Higher-order iterative learning control algorithm," *IEEE Proc. Part.*

- D*, vol. 136, no. 3, May, 1989.
- [10] E. Lunde, J. G. Balchen, "Practical trajectory learning algorithms for robot manipulators," *IEEE Conf. on Rob. & Auto.*, pp. 1516-1521, May, 1990
- [11] P. Bondi, G. Casalino and L. Gambardella, "On the iterative learning control theory for robotic manipulators," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, no. 1, pp. 14-22, 1988.
- [12] D. H. Owens, "Iterative learning control-convergence using high gain feedback," *Proc. of 31st Conf. on Dec. and Cont.*, pp. 2545-2546, 1992.
- [13] J. W. Lee, H. S. Lee and Z. Bien "Iterative learning control with feedback using fourier series with application to robot trajectory tracking," *Robotica*, vol. 11, pp. 291-298, 1993.
- [14] Y. A. Jiang, D. J. Clements, T. Hesketh, "Adaptive repetitive control of nonlinear systems," *Proc. of 34th Conf. on Dec. and Cont.*, pp. 1708-1713, 1995
- [15] Sugie & Ono, "On a learning control law," *Sys. and Cont.*, vol. 31, no. 2, pp. 129-135, 1987.
- [16] Sugie & Ono., "An iterative learning control law for dyn. sys.," *Automatica*, vol. 27, pp. 729-732, 1991.
- [17] S. Arimoto, T. Naniwa, H. Suzuki, "Robustness of p-type learning control with a forgetting factor for robotic motions," *Proc. of 29th Conf. on Dec. and Cont.*, pp. 2640-2645, December, 1990.
- [18] S. Arimoto, T. Naniwa, H. Suzuki, "Selective Learning with a forgetting factor for robotic motion control," *Proc. of 1991 IEEE Int'l Conf. on Robot. and Automation*, pp. 728-733, April, 1991.
- [19] K. H. Lee and Z. Bien, "Initial condition problem of learning control," *IEE Proc. Part D*, vol. 138, no. 6, pp. 525-528, 1991.
- [20] G. Heinzinger, D. Fenwick, B. Paden, F. Miyazaki, "Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions," *IEEE Tr. on Aut. Cont.*, vol. 37, no. 1, pp. 110-114, 1992.



허경무

1956년 9월 1일생. 1979년 서울대학교 공대 전자공학과 졸업. 한국과학기술원 석사 (1981), 한국과학기술원 박사(1989). 1993년~현재 단국대학교 전자공학과 조교수. 관심분야는 학습 제어, 로봇트 제어, 시스템 시뮬레이션, 서보 모터 제어.

레이션, 서보 모터 제어.

우광준

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제3권, 제4호, 참조.