반복된 스칼라 블록 파라미터를 포함한 불확실성을 갖는 선형 시스템의 강인 양실 제어

Robust Positive Real Control of Linear Systems with Repeated Scalar Block Parameter Uncertainty

이 보 형, 심 덕 선, 이 장 규
(Bo Hyung Lee, Duk Sun Shim and Jang Gyu Lee)

Abstract : This paper considers the robust positive real problem for linear systems with linear fractional-type norm-bounded repeated scalar block parameter uncertainty. It is shown that the robust positive real problem can be converted into the standard positive real problem without uncertainty that can be used for the analysis of the given uncertain linear system and the synthesis of a controller that robustly stabilizes and achieves the extended strict positive realness property of the closed-loop transfer function. These results can be also applied to the linear system with general structured uncertainty containing repeated scalar block parameters and are extensions of the previous works that consider only norm-boundedness of the affine unstructured uncertainty.

Keywords : robust control, positive real, parameter uncertainty

I. 서론

양실성(positive realness)은 시스템, 회로, 그리고 제어 이론에서 중요한 개념이다[1][2]. 제어분야에서 양실성은 안정성 이론의 전개에 중요한 역할을 한다[3][4]. 양실 제어문제(positive real control problem)는 주어진 플랜트에 대해 폐루프 시스템이 양실성을 갖는 내부 안정화(internally stabilizing) 제어기를 설계하는 것이다. 고전적인 안정성 이론에 의해 불확실성이나 비선형성이 양실 시스템으로 특징지어지면 루프 전달함수의 양실성은 궤환 시스템(feedback system)의 전체 안정성을 보장하므로 양실 제어는 강인 제어와 비선형 제어 연구에 많이 이용된다.

본 논문에서는 불확실성을 갖는 시불변 시스템의 양실 제어문제를 다룬다. 파라미터 불확실성을 갖는 시스템의 양실성 해석과 확장된 강양실성과 강한 강인 안정성(strongly robustly stable with extended strictly positive realness)을 갖는 제어기의 설계를 위하여 불확실성을 갖지 않는 변형된 선형 시불변 시스템을 제시한다. 이러한 과정은 불확실성을 갖는 시스템의 강인 H_∞-제어 연구에 이용된 방법[5][6][7]과 비슷하며 기존의 연구와 차이점은 모든 시스템 행렬에포함된 선형분수형(linear fractional type)의 노옴 유계된(norm-bounded) 스칼라 블록 불확실성을 고려한 점이다. 이 결과는 반복된 스칼라 블록 불확실성을 포함하는 일반적인 구조적 불확실성(structured uncertainty)을 갖는 경우에도 적용되며 시스템 행렬의 일부에 포함된 선형의 구조화되지 않은 불확실성만을 고려한 기존의 결과[8]를 확장한 것이다. 불확실성을 갖는 양실 제어 문제를 파라미터 불확실성을 포함하지 않는 문제로 변형시킴으로써 기존에 제시된 선형 시불변 시스템에 대한 양실제어 문제의 해[9]를 강인 양실 제어문제에 이용할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 양실 제어 문제를 기술하고 3장에서는 불확실성을 갖는 양실 제어 문제를 불확실성을 포함하지 않는 양실 제어 문제로 변환하는 과정을 제시한다. 4장에서는 궤환 제어기 설계 문제를 다루며 5장에서 결론을 제시한다.

II. 양실 제어문제의 정의

다음의 선형 시불변 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t)\\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t)\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x\in R^n, w\in R^q, z\in R^p$이다. (1)의 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \tag{2}$$

양실 시스템과 관련하여 본 논문에서는 다음과 같은 일반적인 정의를 이용한다.

정의 1 : a)시스템 (1)의 전달함수 $G(s)$가 $Re(s)>0$의 영역에서 해석적(analytic)이고 $Re(s)>0$인 모든 s에 대해 $G(s)+G^T(s^*)\geq 0$를 만족하면 시스템 (1)은 양실성(positive real)을 갖는다.

b) 시스템 (1)의 전달함수 $G(s)$가 $Re(s)>0$의 영역에서 해석적(analytic)이고 $\omega\in[0,\infty)$에 대해

접수일자 : 1998. 4. 14., 수정완료 : 1998. 7. 30.
이보형 : 서울대학교 전기공학부
심덕선 : 중앙대학교 제어계측공학과
이장규 : 서울대학교 전기공학부
※ 본 논문은 한국학술진흥재단 신진연구인력 연구 장려금 지원하에 연구되었습니다.

$G(j\omega)+G^T(-j\omega)\geq 0$를 만족하면 시스템 (1)은 강양실성(strictly positive real)을 갖는다.

c) 시스템 (1)이 강양실성을 만족하고 $G(j\infty)+G^T(-j\infty)\geq 0$를 만족하면 시스템 (1)은 확장된 강양실성(extended strictly positive real)을 갖는다.

보조정리 1[9] : 시스템 (1)에 대하여 다음의 세 조건은 동일하다.

a) A가 안정하고 시스템이 확장된 강양실성을 갖는다.

b) $D+D^T>0$이고 다음에 제시된 대수 리카티 부등식의 양의 정부호(positive definite) 해 $P>0$가 존재한다.

$A^TP+PA+(C-B^TP)^T(D+D^T)^{-1}(C-B^TP)<0$c)

$D+D^T>0$이고 다음의 부등식을 만족하는 양의 정부호(positive definite) 해 $P>0$가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A^TP+PA & (C-B^TP)^T \\ C-B^TP & -(D+D^T) \end{bmatrix}<0$$

이제, 불확실성을 갖는 다음의 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\Delta x(t)+B_\Delta w(t) \\ z(t) &= C_\Delta x(t)+D_\Delta w(t) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, $\begin{bmatrix} A_\Delta & B_\Delta \\ C_\Delta & D_\Delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix}$이다.

$\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$는 시불변이고 노움이 유계된 파라미터 불확실성을 나타낸다.

확장된 강양실성과 강한 강인 안정성을 다음과 같이 정의한다.

정의 2 : $D+D^T>0$이고 불확실성 $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$에 대해 다음의 조건을 만족하는 $P>0$가 존재하면 시스템 (3)은 확장된 강양실성과 강한 강인 안정성을 갖는다.

$$\begin{aligned} &{A_\Delta}^TP+PA_\Delta+(C_\Delta-{B_\Delta}^TP)^T \\ &\times(D_\Delta+{D_\Delta}^T)^{-1}(C_\Delta-{B_\Delta}^TP)<0 \end{aligned} \tag{4}$$

본 논문에서는 다음과 같은 불확실성을 갖는 시스템을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} A_\Delta & B_\Delta \\ C_\Delta & D_\Delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} H \\ H_1 \end{bmatrix}\Delta[\,E \;\; E_1] \tag{5}$$

여기서, $2\Delta=F(I-JF)^{-1}$이고 F는 다음과 같이 크기가 한정되고 반복된 스칼라 블록의 형태를 갖는다.

$$F=blockdiag(\delta_1 I_{r_1} \cdots \delta_k I_{r_k}),\ \delta_i\in R,\ |\delta_i|\leq 1 \tag{6}$$

(6)의 형태로 주어진 F는 다음의 조건 (7), (8)을 만족한다.

$$F^TF=FF^T\leq I \tag{7}$$

$$NF-FN=0,\ i.e. NF=FN \tag{8}$$

여기서, N은 다음의 집합

$$\Sigma=\left\{\begin{array}{c} blockdiag[N_1 \cdots N_k] \\ \in R^{(r_1+\cdots+r_k)\times(r_1+\cdots+r_k)} \\ :N_i\text{는역행렬이존재하는블록행렬} \end{array}\right\} \tag{9}$$

(9)에 속하는 행렬을 나타낸다. (7), (8)에 의해 다음이 성립한다.

$$NFF^TN^T=NF^TFN\leq NN^T \tag{10}$$

(10)에서 $NN^T>0$이다.

III. 불확실성을 갖는 양실 시스템

본 논문의 주요 결과를 유도하기 위해 보조정리 2, 3, 4를 이용한다.

보조정리 2[7] : 대칭행렬 Q와 $T>0$을 만족하는 적절한 차원의 주어진 행렬 Q,H,E와 T에 대하여 다음이 성립한다. $F^TF\leq T$인 모든 F에 대해

$$Q+HFE+E^TF^TH^T<0 \tag{11}$$

이 만족하기 위한 필요충분 조건은 적당한 $\varepsilon>0$에 대해

$$Q+\varepsilon^2HH^T+\varepsilon^{-2}E^TTE<0 \tag{12}$$

이 성립하는 것이다.

보조정리 3 : $I-J^TJ>0$을 가정하고 다음의 집합 Γ를 정의한다.

$$\Gamma=\left\{\begin{array}{c} \Delta=F(I-JF)^{-1} \\ F=blockdiag(\delta_1 I_{r_1} \cdots \delta_k I_{r_k}) \\ \delta_i\in R,\ |\delta_i|\leq 1 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Γ는 다음의 집합 $\overline{\Gamma}$에 포함된다.

$$\overline{\Gamma}=\left\{\begin{array}{c} \Delta=NN^TJ^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}+\Pi^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-\frac{1}{2}} \\ \Pi^T\Pi\leq NN^T+NN^TJ^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}JNN^T \\ N\in\Sigma,\ NN^T-JNN^TJ^T \end{array}\right\} \tag{14}$$

여기서, Σ는 (9)에 정의된 집합을 나타낸다.

증명 : (10)에 의해 다음이 성립한다.

$$NFF^TN^T\leq NN^T$$

$F=(I+\Delta J)^{-1}\Delta$를 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$FNN^TF^T=(I+\Delta J)^{-1}\Delta NN^T\Delta^T(I+\Delta J)^{-T}\leq NN^T$$

$$\Delta NN^T\Delta^T\leq NN^T+NN^TJ^T\Delta^T+\Delta JNN^T+\Delta JNN^TJ^T\Delta^T$$

$$\Pi^T\Pi\leq NN^T+NN^TJ^T(NN^T-JNN^TJ^{T})^{-1}JNN^T$$

$$\Pi=(NN^T-JNN^TJ^T)^{\frac{1}{2}}\Delta^T-(NN^T-JNN^TJ^T)^{-\frac{1}{2}}JNN^T$$

여기서 N은 $NN^T-JNN^TJ^T>0$를 만족해야 한다. ■

보조정리 4 : 적절한 차원의 주어진 행렬 H,E와 대칭행렬 Q에 대해 다음이 성립한다. $\overline{\Gamma}$에 속하는 Δ에 대해

$$Q+H\Delta E+E^T\Delta^TH^T<0 \tag{15}$$

가 성립하기 위한 필요충분조건은 적당한 $\varepsilon>0$에 대해

$$Q+[\,\varepsilon H \;\; \varepsilon^{-1}E^T]\begin{bmatrix} (NN^T)^{-1} & -J^T \\ -J & NN^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon H^T \\ \varepsilon^{-1}E \end{bmatrix}<0 \tag{16}$$

가 성립하는 것이다.

증명 : 보조정리3에 의해 (15)는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} RIX\ Q&+HNN^TJ^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}E+E^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}JNN^TH^T \\ &+H\Pi^T(NN^TMAT2-JNN^TJ^T)^{-\frac{1}{2}}E+E^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-\frac{1}{2}}\Pi H^T<0 \end{aligned} \tag{17}$$

보조정리2에 의해 (17)이 성립하기 위한 필요충분조건은 적당한 $\varepsilon>0$에 대해 다음의 조건이 성립하는 것이다.

$$\begin{aligned} &Q+HNN^TJ^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}E \\ &+E^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}JNN^TH^T \\ &+\varepsilon^{-2}E^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}E \\ &+\varepsilon^2H(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}H^T<0 \end{aligned} \tag{18}$$

역행렬 정리를 이용하여 (18)을 정리하면 (16)과 같다. ■

다음의 정리1은 불확실성을 갖는 양실 시스템 (3),(5)를 불확실성을 포함하지 않는 양실 시스템으로 변환한다. (5)에서 모든 허용된(admissible) F에 대해 행렬 $I-JF$의 역행렬이 존재하기 위해서는 $I-J^TJ>0$의 조건이 필요하므로 본 논문의 나머지 부분에서는 이 조건이 성립한다고 가정한다.

정리 1 : (3), (5)의 불확실한 시스템에서 다음을 가정한다.

$$D+D^T+H_1\Delta E_1+E_1{}^T\Delta^T H_1{}^T>0 \tag{19}$$

S_1, S_2를 $N\in\Sigma$에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$S_1=NN^T-JNN^TJ^T>0$$

$$\begin{aligned} S_2 &= NN^T+NN^TJ^T(NN^T-JNN^TJ^T)^{-1}JNN^T \\ &= NN^T+NN^TJ^T S_1{}^{-1}JNN^T>0 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} -(D+D^T) & \sqrt{\varepsilon}H_1 & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E_1 \\ \sqrt{\varepsilon}H_1{}^T & -(NN^T)^{-1} & J^T \\ -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E_1{}^T & J & -NN^T \end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

(21)을 만족하는 적당한 $N\in\Sigma$과 $\varepsilon>0$에 대해 다음의 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \overline{A}x+\left[\overline{B}\;\; H(\sqrt{\varepsilon}S_2{}^{\frac{1}{2}})\right]\tilde{w} \\ \tilde{z} &= \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}E \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} \overline{D} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}\tilde{w} \end{aligned} \tag{22}$$

여기서

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A+H(S_2^{\frac{1}{2}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}+NN^TJ^TS_1^{-1})E \\ \overline{B} &= B+HNN^{TJ^T}S_1{}^{-1}E_1-\varepsilon HS_2H_1^T \\ \overline{C} &= C+H_1NN^TJ^TS_1{}^{-1}E-\varepsilon^{-1}E_1^TS_1{}^{-1}E \\ \overline{D} &= D+H_1NN^TJ^TS_1{}^{-1}E_1-\frac{1}{2}\varepsilon H_1S_2H_1^T-\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}E_1^TS_1{}^{-1}E_1 \end{aligned} \tag{23}$$

$\overline{A}$가 안정(stable)하고 (22)가 확장된 강양실성을 만족하면 원래의 불확실한 시스템 (3), (5)는 확장된 강양실성과 강한 강인 안정성을 갖는다.

증명 : (21)에 의해 $D+D^T>0$가 성립한다. (19)에 의해 (21)을 만족하는 $N\in\Sigma$과 $\varepsilon>0$은 항상 존재한다. $\overline{A}$가 안정하고 (22)가 확장된 강양실성을 만족하면 보조정리1의 (2)에 의해

$$\begin{aligned} &P\overline{A}+\overline{A}^TP+\left[\begin{bmatrix} \overline{C} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}E \end{bmatrix}-\left[\overline{B}\;\; H(\sqrt{\varepsilon}S_2^{\frac{1}{2}})\right]^TP\right]^T \\ &\times\begin{bmatrix} \overline{D}+\overline{D}^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I \end{bmatrix}^{-1}\left[\begin{bmatrix} \overline{C} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}E \end{bmatrix}-\left[\overline{B}\;\; H(\sqrt{\varepsilon}S_2^{\frac{1}{2}})\right]^TP\right]<0 \end{aligned}$$

의 양의 정부호 해 $P>0$가 존재한다. 이 식은 (23)을 이용하여 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} &PA+A^TP+PHNN^TJ^TS_1^{-1}E+E^TS_1^{-1}JNN^TH^TP \\ &+PHS_2^{\frac{1}{2}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}E+E^TS_1{}^{-\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}}H^TP \\ &+(\overline{C}-\overline{B}^TP)^T(\overline{D}+\overline{D}^T)^{-1}(\overline{C}-\overline{B}^TP) \\ &+(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}E-\sqrt{\varepsilon}S_2^{\frac{1}{2}}H^TP)^T(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}E-\sqrt{\varepsilon}S_2^{\frac{1}{2}}H^TP)<0 \end{aligned} \tag{24}$$

(24)는 다음의 (25)에서

$$Q=\begin{bmatrix} A^TP+PA & (C-B^TP)^T \\ C-B^TP & -(D+D^T) \end{bmatrix},$$

$$\overline{H}=\begin{bmatrix} PH \\ H_1 \end{bmatrix},\quad \overline{E}=[\,E\;\; -E_1\,]$$

로 정의하고 역행렬 정리와 보조정리1의 (3)을 이용하여 복잡한 행렬전개를 통해 (25)와 동일한 조건임을 알 수 있다. ■

$$Q+[\,\varepsilon H\;\; \varepsilon^{-1}E^T]\begin{bmatrix} (NN^T)^{-1} & -J^T \\ -J & NN^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon H^T \\ \varepsilon^{-1}E \end{bmatrix}<0 \tag{25}$$

(25)에서 보조정리4에 의해 $Q+\overline{H}\Delta\overline{E}+\overline{E}^T\Delta^T\overline{H}^T<0$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} &(A+H\Delta E)^TP+P(A+H\Delta E) \\ &+(C+H_1\Delta E-(B+H\Delta E_1)^TP)^T \\ &\times(D+H_1\Delta E_1+(D+H_1\Delta E_1)^T)^{-1} \\ &\times(C+H_1\Delta E-(B+H\Delta E_1)^TP)<0 \end{aligned}$$

를 만족하는 양의 정부호 해 $P>0$가 존재하므로 원래의 불확실한 시스템 (3), (5)는 정의2에 의해 확장된 강양실성과 강한 강인 안정성을 갖는다.

정리 1의 결과는 반복된 스칼라 블록 불확실성을 포함하는 일반적인 구조적 불확실성(structured uncertainy)을 갖는 경우로 확장이 가능하다.

$$F=blockdiag(\delta_1I_{r_1}\;\cdots\;\delta_kI_{r_k}\;F_1\;\cdots\;F_s) \tag{26}$$

여기서, $1\le i\le k$에 대하여 $\delta_i\in R, |\delta_i|\le 1$이고, $1\le j\le s$에 대하여 $F_j\in R^{f_j\times f_j}$, $F_j{}^TF_j\le I$이다. 위와 같은 불확실성에 대해서 N을 다음과 같은 집합의 원소로 대체하면 정리1은 (26)의 불확실성에 대해서도 그대로 적용된다.

$$\Sigma_s=\left\{\begin{array}{c} blockdiag[N_1\;\cdots\;N_k\;d_1I_{f_1}\;\cdots\;d_sI_{f_s}] \\ \in R^{(r_1+\cdots+r_k+f_1+\cdots+f_s)\times(r_1+\cdots+r_{k+}f_1+\cdots+f_s)} \\ :N_i\text{는 } 1\le i\le k\text{에 대하여 역행렬이 존재하는 블록행렬} \\ d_j\text{는} 1\le j\le s\text{에 대하여 } d_j>0 \end{array}\right\} \tag{27}$$

정리1에서 $H_1=E_1=0, J=0$이면 (22)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[A+H(S_2^{\frac{1}{2}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}+NN^TJ^TS_1^{-1})E\right]x \\ &\quad+\left[\overline{B}\;\; H(\sqrt{\varepsilon}S_2{}^{\frac{1}{2}})\right]\tilde{w} \\ \tilde{z} &= \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}S_1{}^{-\frac{1}{2}}E \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} \overline{D} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}\tilde{w} \end{aligned} \tag{28}$$

(28)에서 $N=I$로 놓으면 (29)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A+HE]x+[B\;\sqrt{\varepsilon}H]\tilde{w} \\ \tilde{z} &= \begin{bmatrix} C \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}\tilde{w} \end{aligned} \tag{29}$$

(29)는 [8]에서 제시된 결과로서 이 경우는 선형분수형이 아닌 선형의 불확실성이 행렬 A에만 포함되는 경우이다. 이 결과는 불확실성의 노옴 크기 제한만을 이용하여 유도된 결과이다.

IV. 출력궤환 강인 양실제어

다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\Delta x(t)+B_{1\Delta}w(t)+B_{2\Delta}u(t) \\ z(t) &= C_{1\Delta}x(t)+D_{11\Delta}w(t)+D_{12\Delta}u(t) \\ y(t) &= C_{2\Delta}x(t)+D_{21\Delta}w(t)+D_{22\Delta}u(t) \end{aligned} \tag{30}$$

여기서, $x \in R^n, w \in R^q, u \in R^m, z \in R^p, y \in R^r$이다. 불확실성의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_\Delta & B_{1\Delta} & B_{2\Delta} \\ C_{1\Delta} & D_{11\Delta} & D_{12\Delta} \\ C_{2\Delta} & D_{21\Delta} & D_{22\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \Delta [\, E \;\; E_1 \;\; E_2 \,] \tag{31}$$

여기서, $\Delta = F(I-JF)^{-1}$이고 F는 (6)의 형태를 갖는다.

출력궤환 강인 양실 제어문제는 (30), (31)의 시스템에 대해 폐루프 시스템이 확장된 강양실성과 강한 강인 안정성을 만족하는 선형의 동적 출력궤환 제어기를 설계하는 것이다. 일반성을 잃지 않고 다음의 제어기 형태(strictly proper controller)를 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned} \tag{32}$$

정리 2 : S_1, S_2를 (20)과 같이 정의하고 (30), (31)의 불확실한 시스템에서 다음을 가정한다.

$$D_{11} + D_{11}^T + H_1 \Delta E_1 + E_1^T \Delta^T H_1^T > 0 \tag{33}$$

$$\begin{bmatrix} -(D_{11}+D_{11}^T) & \sqrt{\varepsilon} H_1 & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E_1 \\ \sqrt{\varepsilon} H_1^T & -(NN^T)^{-1} & J^T \\ -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E_1^T & J & -NN^T \end{bmatrix} < 0 \tag{34}$$

(34)를 만족하는 적당한 $N \in \Sigma$과 $\varepsilon > 0$에 대해 정의된 다음의 선형 시불변 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \overline{A} x + \left[\overline{B_1} \;\; H(\sqrt{\varepsilon} S_2^{\frac{1}{2}}) \right] \tilde{w} + \overline{B_2} u \\ \tilde{z} &= \begin{bmatrix} \overline{C_1} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} S_1^{-\frac{1}{2}} E \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \overline{D_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I \end{bmatrix} \tilde{w} + \begin{bmatrix} \overline{D_{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} S_1^{-\frac{1}{2}} E_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \overline{C_2} x + \left[\overline{D_{21}} \;\; H_2(\sqrt{\varepsilon} S_2^{\frac{1}{2}}) \right] \tilde{w} + \overline{D_{22}} u \end{aligned} \tag{35}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A + H(S_2^{\frac{1}{2}} S_1^{-\frac{1}{2}} + NN^T J^T S_1^{-1}) E \\ \overline{B_1} &= B_1 + HNN^{TJ^T} S_1^{-1} E_1 - \varepsilon H S_2 H_1^T \\ \overline{B_2} &= B_2 + H(S_2^{\frac{1}{2}} S_1^{-\frac{1}{2}} + NN^T J^T S_1^{-1}) E_2 \\ \overline{C_1} &= C_1 + H_1 NN^T J^T S_1^{-1} E - \varepsilon^{-1} E_1^T S_1^{-1} E \\ \overline{C_2} &= C_2 + H_2(S_2^{\frac{1}{2}} S_1^{-\frac{1}{2}} + NN^T J^T S_1^{-1}) E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{D_{11}} &= D_{11} + H_1 NN^T J^T S_1^{-1} E_1 - \frac{1}{2} \varepsilon H_1 S_2 H_1^T - \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} E_1^T S_1^{-1} E_1 \\ \overline{D_{12}} &= D_{12} + H_1 NN^T J^T S_1^{-1} E_2 - \varepsilon E_1^T S_2 E_2 \\ \overline{D_{21}} &= D_{21} + H_2 NN^T J^T S_1^{-1} E_1 - \varepsilon H_2 S_2 H_1^T \\ \overline{D_{22}} &= D_{22} + H_2(S_2^{\frac{1}{2}} S_1^{-\frac{1}{2}} + NN^T J^T S_1^{-1}) E_2 \end{aligned} \tag{36}$$

출력궤환 제어기 $K(s)$가 (35)의 시스템에 대해 폐루프 시스템이 안정하고 확장된 강양실성을 갖도록 하면 이 $K(s)$는 원래의 시스템 (30)의 폐루프 시스템이 모든 허용된 불확실성에 대해 확장된 강양실성과 강한 강인 안정성을 만족하도록 하는 제어기이다.

증명 : 위의 결과는 (30), (31), (32)를 폐루프 상태방정식으로 정리하고 정리1을 적용하여 얻는다. ■

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + H\Delta E_1) x(t) + B_1 w(t) + (B_2 + H\Delta E_2) u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \tag{37}$$

[8]에서 고려한 것과 같이 $J=0$를 가정한 (37)의 간단한 시스템을 고려하면 (35)는 [8]에서 얻은 것과 같이 (38)로 환원된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + HE_1] x + [\, \overline{B_1} \;\; \sqrt{\varepsilon} H \,] \tilde{w} + [B_2 + HE_2] u \\ \tilde{z} &= \begin{bmatrix} \overline{C_1} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \overline{D_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I \end{bmatrix} \tilde{w} + \begin{bmatrix} \overline{D_{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E_2 \end{bmatrix} u \\ y &= C_2 x + [\, D_{21} \;\; 0 \,] \tilde{w} \end{aligned} \tag{38}$$

V. 결론

본 논문에서는 모든 시스템 행렬에 구조적 불확실성을 갖는 시불변 시스템의 양실 제어문제를 다루었다. 파라미터 불확실성을 갖는 시스템의 양실성 해석과 확장된 강양실성과 강한 강인 안정성을 갖는 제어기의 설계를 위하여 강인 양실 제어문제를 불확실성을 갖지 않는 표준의 양실 제어문제로 변환할 수 있음을 보였다. 시스템 행렬의 일부에 포함된 선형 불확실성의 노옴 크기 제한만을 고려한 기존의 결과와 달리 본 논문에서는 모든 시스템 행렬에 포함된 선형분수형의 스칼라 블록 불확실성을 고려하였다. 또한 이 결과는 반복된 스칼라 블록 불확실성을 포함하는 일반적인 구조적 불확실성을 갖는 경우에도 적용이 가능함을 보였다.

참고문헌

[1] B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd, *Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[2] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[3] V. M. Popov, *Hyperstability of Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[4] K. S. Narendra and J. H. Taylor, *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*, Academic Press, New York, 1973.

[5] L. Xie, M. Fu and C. E. de Souza, "H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback," *IEEE trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 8, pp. 1253-1256, 1992.

[6] L. Xie and C. E. de Souza, "Robust control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty," *IEEE trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 8, pp. 1188-1191, 1992.

[7] L. Xie, "Output feedback control of systems with parameter uncertainty," *International Journal of Control*, vol. 63, no. 4, pp. 741-750, 1996.

[8] L. Xie and Y. C. Soh, "Positive real control problem for uncertain linear time-invariant systems, " *Systems and Control Letter*, vol. 24. pp. 265-271, 1995.

[9] W. Sun, P. P Khargonekar and Duksun Shim, "Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems," *IEEE*

trans. on Automatic Control, vol. 39, no. 10, pp. 2034 - 2046, 1994.

이 보 형

1992년 서울대 공대 기계공학과 졸업(제어계측공학 부전공), 1994년 서 울대 대학원 제어계측공학과 석사, 1994년-현재 동대학원 박사과정, 관심분야는 강인제어, 유도제어 등.

이 장 규

제어·자동화·시스템공학 논문지 제4권, 제2호, 참고.

심 덕 선

제어·자동화·시스템공학 논문지 제4권, 제2호, 참고.