

펄스응답 순환행렬의 특이치 분해를 이용한 강인한 차수감소 모델예측제어기의 설계

Design of Robust Reduced-Order Model Predictive Control using Singular Value Decomposition of Pulse Response Circulant Matrix

김상훈, 문혜진, 이광순
(Sang Hoon Kim, Hye Jin Moon and Kwang Soon Lee)

Abstract : A novel order-reduction technique for model predictive control(MPC) is proposed based on the singular value decomposition(SVD) of a pulse response circulant matrix(PRCM) of a concerned system. It is first investigated that the PRCM (in the limit) contains a complete information of the frequency response of a system and its SVD decomposes the information into the respective principal directions at each frequency. This enables us to isolate the significant modes of the system and to devise the proposed order-reduction technique. Though the primary purpose of the proposed technique is to diminish the required computation in MPC, the clear frequency decomposition of the SVD of the PRCM also enables us to improve the robustness through selective excitation of frequency modes. Performance of the proposed technique is illustrated through two numerical examples.

Keywords : model predictive control, singular value decomposition, circulant matrix

I. 서론

지난 15여년간의 발전을 통하여 모델예측제어(MPC, model predictive control)는 공정산업에서 다중입출력 공정제어의 표준알고리즘으로 자리잡아 왔다[1][2]. 모델예측제어 알고리즘은 주어진 미래의 제어구간(control horizon) 동안 제어입력을 변화시킨다는 가정하에, 주어진 예측구간(prediction horizon)에서 모델에 의해 예측된 출력값과 기준값과의 차이를 최소화 시키는 제어입력신호를 찾는 open-loop 최적제어문제를 푼 후, 그 첫번째 요소, 즉 현재시점에 해당되는 제어신호만을 공정에 적용시키는 과정을 매 샘플링 시점에서 반복한다. 이 과정에서 가장 많은 계산을 요구하는 단계가 최적화(open-loop 최적제어)이며, 선형의 제약조건을 만족 시키며 이차목적함수를 최소화 하는 해를 구하기 위해서는 quadratic programming(QP) 문제를 풀어야한다. 이때 만족할 만한 제어성능을 얻기 위해서는 제어구간과 예측구간을 충분히 길게 설정하는 것이 필요하나[2][3], 입력변수가 많은 공정의 경우 QP가 요구하는 계산량이 기하급수적으로 증가하게 된다. 따라서 수치적인 안정성을 높이기 위해 흔히 blocking이라고 일컬어지는 방법을 통하여 계산량을 줄일 필요가 있다. 여기서 blocking이란 제어구간에서의 입력신호 근사방법을 통칭한다.

이러한 blocking에 대한 필요성은 이미 여러 연구자들에 의해 지적되었다. Lee et al.[4]와 Palavajihala et

al.[5]는 wavelet basis를 이용하여 입력신호를 근사할 것을 제안하였다. 이것은 신호근사의 관점에서 1차원적으로 blocking을 설계한 것이라 할 수 있으며, 주파수와 시간대에서 동시 분해능을 가지는 wavelet이 제어구간 상의 모델 예측제어 입력신호를 근사하는데에 적절한 basis 벡터라는 판단에서 수행된 것이다.

위의 방법과는 달리, Maurath et al.[6]은 DMC 알고리즘에서 dynamic 행렬을 특이치 분해(SVD, singular value decomposition)하는 방법으로 계산량을 줄이고 수치적 안정성을 증진시키는 방법을 제안하였다. 신호근사의 관점과 대비하여 이 방법은 공정의 동특성을 표현하는 dynamic 행렬을 근사하였다는 면에서, blocking을 공정근사의 관점에서 접근한 것이라 할 수 있다. 신호근사 관점에서는, 적당한 basis 벡터를 선택함으로써 입력신호의 스펙트럼을 원하는 영역에 집중시킬 수 있게 된다. 반면에 다중 입출력 공정의 중요한 특징인 방향성 문제에 대한 고려가 이루어지지 못한다. 이에 반하여 공정근사 관점에서는, 특이치 분해가 방향성까지 고려하여 공정을 분해하고 이로 부터 중요한 모드를 그렇지 않은 모드와 구별할 수 있게 된다. 그러나 dynamic 행렬은 계단 응답 계수로 구성되어 있기 때문에 공정 자체를 나타내는 것이 아니라 적분된 형태를 나타낸다. 위와 같은 고려를 바탕으로, 정확한 공정입출력 관계에 근거하여 방향성에 대한 정보도 가지면서 분명한 주파수 분해능을 갖는 basis 벡터를 찾는 것이 중요하다고 할 수 있다.

본 연구의 목적은 계산량을 줄일 뿐 아니라 견실성까지 향상시킬 수 있는 차수감소 모델예측제어 알고리즘을 설계하는데 있다. 이를 위해서 본 연구에서는 공정의 입출력 관계를 펄스응답계수로 구성된 순환행렬로 표현하고 이의 특이치 분해에 근거하여 차수감소 알고리즘을 구성하는 것

접수일자 : 1998. 1. 26., 수정완료 : 1998. 7. 10.

김상훈, 이광순 : 서강대학교 화학공학과

문혜진 : LG 하니웰

※본 연구는 포항공과대학교 공정산업의 지능자동화 연구센터를 통한 한국 과학재단의 우수연구센터 지원금 및 1997년 서강대학교 교내 연구비 지원에 의한 것입니다.

을 제안하였다. 모델예측제어는 말 그대로 모델을 기반으로 제어를 하는 것이므로, 모델오차가 있는 경우 제어 성능이 떨어질 뿐 아니라 심하면 불안정성까지 유발하게 된다. 따라서 견실성은 상당히 중요한 문제가 된다. 본 연구에서 제안하고 있는 펄스응답 순환행렬의 특이치 분해는 다변수 공정을 principal direction과 동시에 주파수 영역으로 완전한 분해를 수행하기 때문에 견실한 모델예측제어기를 설계하는데 도움이 된다.

II. 이론 전개

1. 모델예측제어 알고리즘[2]

모델예측제어의 대표적인 알고리즘이라고 할 수 있는 dynamic matrix control(DMC) 알고리즘의 개념은 다음과 같다. k 번째 샘플링 시간에서의 공정에 관한 정보는 상태 (state) 벡터 x_k 가 가지고 있다. 이것은 직접적으로 측정되기도 하고 측정치로부터 추정되기도 한다. 어떤 미래구간에서의 출력변수의 최적예측치는 상태추정치(state estimate), $x_{k|k}$ 와 미래구간에서의 입력변수의 함수로 나타난다. 따라서 예측식은 다음과 같은 형태로 된다.

$$\begin{aligned} y_{k+1|k} &= f_1(x_{k|k}, \Delta u_k) \\ y_{k+2|k} &= f_2(x_{k|k}, \Delta u_k, \Delta u_{k+1}) \\ &\vdots \\ y_{k+p|k} &= f_p(x_{k|k}, \Delta u_k, \Delta u_{k+1}, \dots, \Delta u_{k+m-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, Δu 와 y 는 입력변수 변화량과 공정출력치를 나타내는 벡터이고, p 와 m 은 각각 예측구간(prediction horizon)과 제어구간(control horizon)을 나타낸다. 미래의 입력변수는 예측된 출력값이 제약조건을 만족시키면서 기준값을 원하는 형태로 따라 가도록 결정된다. 이것은 다음과 같은 목적함수를 최적화시킴으로써 얻어질 수 있다.

$$\min_{\Delta U_k} J(E_{k+1|k}, \Delta U_k) \quad (2)$$

subject to

$$C_u \Delta U_k \geq C_k$$

여기서, $E_{k+1|k} = R_{k+1|k} - Y_{k+1|k}^p$ 는 미래오차벡터(future error vector)이고

$$\begin{aligned} Y_{k+1|k}^p &= \begin{bmatrix} y_{k+1|k} \\ y_{k+2|k} \\ \vdots \\ y_{k+p|k} \end{bmatrix}, \Delta U_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+m-1} \end{bmatrix}, \\ R_{k+1|k} &= \begin{bmatrix} r_{k+1|k} \\ r_{k+2|k} \\ \vdots \\ r_{k+p|k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$r_{k+1|k}$ 는 k 시점에서의 정보를 바탕으로 결정된 $k+1$ 시점에서의 출력기준치를 나타낸다. 여기서, 최적의 제어 입력 시퀀스의 첫번째 요소인 Δu_k 만이 실제 공정에 적용되고, 다음 샘플링 시간에서 위의 전 과정이 반복된다.

DMC는 계단응답계수를 이용한 공정모델을 이용하여 위의 개념을 구현한 것이다. 이제 상태공간모델을 이용하여 DMC 알고리즘을 기술하면 다음과 같다.

공정모델(process model) :

$$\begin{aligned} Y_k &= MY_{k-1} + S\Delta u_{k-1} \\ y_k &= NY_k + v_k \end{aligned} \quad (4)$$

상태 추정기(estimator)는 다음과 같은 형태를 갖는다.

예측(prediction) :

$$\begin{aligned} Y_{k|k-1} &= MY_{k-1|k-1} + S\Delta u_{k-1} \\ y_{k|k-1} &= NY_{k|k-1} \end{aligned} \quad (5)$$

보정(correction) :

$$Y_{k|k} = Y_{k|k-1} + K_f(y_k - y_{k|k-1}) \quad (6)$$

여기서,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T, S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{bmatrix}$$

이며, S_i 는 계단응답계수이다. y_k 는 k 시점에서의 출력 측정치이며, 아래첨자 $k|l$ 는 l 시점까지의 측정치를 이용한 k 시점에서의 최적의 추정치를 나타낸다. K_f 는 상태 추정기의 필터이득이다.

k 시점에서 모델예측제어에 대한 목적함수의 최적화 문제는 다음과 같이 쓰여진다.

$$\min_{\Delta U_k} \|A_y(R_{k+1|k} - Y_{k+1|k}^p)\|_2^2 + \|A_u \Delta U_k\|_2^2 \quad (7)$$

subject to

$$\begin{aligned} Y_{k+1|k}^p &= M_p Y_{k|k} + S_p \Delta U_k \\ C_u \Delta U_k &\geq C_k \end{aligned} \quad (8)$$

(7)의 비제약 (unconstrained) 해는 목적함수 (7)을 최소화 시키는 다음의 최소자승해(least square solution)이다.

$$\begin{aligned} \Delta U_k &= K_{mpc} E_{k+1|k} \\ K_{mpc} &= (S_p^T Q S_p + R)^{-1} S_p^T Q \\ E_{k+1|k} &\equiv R_{k+1|k} - M_p Y_{k|k} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$Q = A_y^T A_y, \quad R = A_u^T A_u$$

제약조건이 있는 경우는 QP를 사용해서 최적의 입력신호를 구하게 된다.

2. 차수감소의 기본개념

실제 공정은 차수가 높은 다중 입출력 공정인 경우가 많으며 모델예측제어에서는 모든 입력변수의 값을 매 샘플링 시점마다 결정하여야 한다. 더우기 좋은 제어성능을 얻기 위해서는 제어구간을 늘리는 것이 유리하며, 이때 온라인 최적화 문제를 풀기 위해서는 상당한 계산량이 요구된다. 따라서 모델예측제어의 성능을 향상시키기 위해서는 수치적 안정성을 증진시키며 계산량을 감소시키는 것이 필수적이라 할 수 있다. 한편 모델의 오차는 어쩔 수 없이 존재하는 것이며, 이때 오차의 성격(특히 주파수에 따른 모델오차)에 따라 원하는 제어성능을 얻기 어려울 수 있을 뿐 아니라 심할 경우 불안정성까지 유발되기도 한다. 위의 문제점을 종합적으로 해결하기

위해서는 제어성능이 크게 손상되지 않는 범위내에서, 결정해야 할 입력변수의 수를 줄이며 동시에 원하지 않는 주파수 영역의 입력변수가 공정에 유입되는 것을 차단할 수 있어야 한다.

모델예측제어에서 과도한 계산량과 강인성 문제를 극복하기 위한 소위 blocking 방법은 입력변수를 적절히 선택된 적은 수의 orthonormal basis 벡터의 선형조합으로 근사한 후 그 계수를 결정하는 것이다. 이제 이 basis 벡터를 b_1, \dots, b_c 라 하자. 입력의 개수가 n_u , 제어구간이 m 인 문제에서 QP를 통하여 결정되어야 할 입력 시퀀스 ΔU_k 를 이들 basis 벡터의 선형 조합으로 나타내면.

$$\Delta U_k = \Delta u_{1,k}^* b_1 + \Delta u_{2,k}^* b_2 + \dots + \Delta u_{c,k}^* b_c \equiv B \Delta U_k^* \quad (10)$$

여기서,

$$b_i \in R^{n_m \times 1}, \quad n_m = n_u \times m, \quad B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_c] \quad (11)$$

$$\Delta U_k^* = [\Delta u_{1,k}^* \ \Delta u_{2,k}^* \ \dots \ \Delta u_{c,k}^*]$$

이다. 이것을 모델예측제어 알고리즘의 예측기와 목적함수에 각각 대입하면 다음과 같다.

$$Y_{k+1|k}^p = M_p Y_{k|k} + S_p B \Delta U_k^* \quad (12)$$

$$\min \|\Lambda_y (R_{k+1|k} Y_{k+1|k}^p - Y_{k+1|k}^d)\|_2^2 + \|\Lambda_u B \Delta U_k^*\|_2^2 \quad (13)$$

위 목적함수의 최소화승해는 다음과 같다.

$$\Delta U_k = K_{mpc}^* E_{k+1|k}$$

$$K_{mpc}^* = B (B^T S_p^T Q S_p B + B^T R B)^{-1} B^T S_p^T Q \quad (14)$$

$$E_{k+1|k} = R_{k+1|k} - M_p Y_{k|k}$$

여기서, ΔU_k 의 첫번째 원소만 적용되고 다음 샘플링 시간에서 다시 최적화 문제를 풀게 된다. 이것은 제약조건이 있는 경우도 마찬가지다. 위와 같이 수정된 알고리즘에서 $c \ll n_m$ 일 경우, 최적화 문제에서 결정해야 할 변수의 수가 작아지므로 계산량이 그만큼 줄어든다. 제약조건이 없는 경우는 K_{mpc}^* 가 미리 계산되기 때문에 계산량 감소효과가 그다지 크지 않지만, 제약조건이 있는 경우는 그 효과가 매우 크다.

이와 같이 차원이 줄어든 모델예측제어기의 성능은 전적으로 선택한 orthonormal basis 벡터에 의존한다. 즉 입력변수가 basis 벡터에 의해 얼마나 잘 근사되느냐에 따라 제어기의 성능이 결정된다고 볼 수 있다. 지금까지의 연구결과를 보면 basis 벡터를 선택하는데는 크게 두가지 관점에서 볼 수 있다. 하나는 신호근사 관점에서 보는 것이고 다른 하나는 공정근사 관점에서 보는 것이다. wavelet에 의한 근사([4],[5])가 전자에 해당하고, dynamic 행렬(S_p)의 특이치 분해에 의한 근사([6])가 후자에 해당한다. Wavelet은 시간과 주파수 성분에 대한 분해능이 동시에 있는 반면, 어느 하나에 대해서도 명확한 분해능을 주지 못한다. 또한 다중입출력 공정의 경우 방향성 문제에 대한 고려를 할 수 없다. Dynamic 행렬의 특이치 분해에 의한 방법은 dynamic 행렬이 공정 자체를 나타내는 것이 아니라 공정이 적분된 형태를 나타내는 것이므로 실제 공정을 정확히 묘사한 것이라 할 수

없다. 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 본 연구에서는 펄스응답계수로 구성된 순환행렬의 특이치 분해를 이용할 것을 제안하고 있다. 펄스순환행렬과 그의 특이치 분해는 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

3. 펄스응답 순환행렬

일반적인 n_u -입력/ n_y -출력인 다중입출력 시불변 이산시간대 공정은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y(z^{-1}) = H(z^{-1}) u(z^{-1}) \quad (15)$$

한편 $h_k \in R^{n_y \times n_u}, k=1, 2, \dots$ 를 공정의 k 번째 펄스 응답이라고 하고, 입력신호가 주기 N 을 가진다면 공정의 입출력관계는 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{k+N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_N & \dots & h_2 \\ h_2 & h_1 & \dots & h_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_N & h_{N-1} & \dots & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+N-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\Rightarrow Y_N = H_N U_N$$

여기서, $N \rightarrow \infty$ 일때 (16)→(15)인 것은 명확하다. 이때 H_N 를 펄스응답 순환행렬(PRCM, pulse response circulant matrix)이라고 정의한다. (16)의 양변에 discrete Fourier transform(DFT)을 취하면 다음과 같다.

$$(F_{n_y}, Y_N) = (F_{n_y}, H_N \bar{F}_{n_u}) (F_{n_u}, U_N) \rightarrow Y_N = H_N U_N \quad (17)$$

여기서, F_{n_u} 는 n_u 개의 (벡터)요소로 구성된 이산시간대 신호의 DFT 행렬을 나타낸다. 펄스응답 순환행렬과 그것의 DFT는 다음과 같은 성질을 갖는다[7].

$$\mathcal{H}_N = \text{diag}[\hat{h}(e^{-j\omega_k})] \quad (18)$$

여기서, $\hat{h}(e^{-j\omega_k}) = \sum_{l=1}^N h_l e^{-j\omega_k l}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ 한편

$H(e^{-j\omega}) = \sum_{l=1}^{\infty} h_l e^{-j\omega l}$ 이므로 \mathcal{H}_N 은 공정의 주파수 응답을 제한된 수의 펄스응답계수를 이용하여 근사한 것이며, 이때 연속 스펙트럼을 갖는 공정의 주파수응답이 이산 주파수 $\omega_k = 2\pi k/N, k=0, 1, \dots, N-1$ 에서 나타남을 알 수 있다. 따라서

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow \mathcal{H}_N \rightarrow \text{diag}[H(e^{-j\omega})] \quad (19)$$

이 성립하게 된다.

4. 펄스응답 순환행렬의 특이치 분해

펄스응답 순환행렬의 특이치 분해를 다음과 표현하자.

$$H_N = W_N D_N V_N^T \quad (20)$$

양변에 DFT를 취하고 (17)의 관계를 이용하면

$$\mathcal{H}_N = (F_{n_y}, W_N) D_N (\bar{F}_{n_u}, V_N)^T \quad (21)$$

이다. 여기서, DFT 행렬과 좌우 특이행렬이 모두 unitary이므로 F_{n_y}, W_N 과 \bar{F}_{n_u}, V_N 이 다시 unitary가 되며, D_N 은 대각행렬이므로 (21)은 \mathcal{H}_N 의 특이치 분해를 알 수 있다. 한편 SISO의 경우, \mathcal{H}_N 은 복소수 요소를 갖는 대각행렬((18))이므로 D_N 은 \mathcal{H}_N 의 절대값이 되며,

공정 주파수응답의 amplitude ratio가 됨이 명백하다. 한편 다소 복잡하지만 DFT의 성질을 이용한 명백한 과정을 통하여 입력 특이벡터와 출력 특이벡터가 다음과 같이 이산 주파수에서의 sine함수형태의 값을 갖는다는 것을 유도할 수 있다[8].

$$w_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \cos(-\phi_k) \\ \cos(\omega_k - \phi_k) \\ \vdots \\ \cos(\omega_k(N-1) - \phi_k) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \cos(\omega_k) \\ \vdots \\ \cos(\omega_k(N-1)) \end{bmatrix}$$

여기서, ϕ_k 는 주파수 ω_k 에서의 공정의 phase angle을 나타낸다. 한편 인접한 w_{m+1} 과 v_{m+1} (혹은 w_{m-1} 과 v_{m-1})은 w_m 과 v_m 의 sine complement를 나타낸다.

이제 위의 결과들을 정리하면, N 이 큰 값을 갖는 경우, SISO공정에 대해 펄스응답 순환행렬의 특이치 분해는 다음과 같은 성질을 나타낸다.

i) 특이치는 이산주파수, $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ 에서의 공정 주파수응답의 amplitude ratio를 나타낸다.

ii) 입력 특이벡터는 해당되는 특이치 주파수성분의 sine이나 cosine함수의 이산시간대에서의 값들을 나타낸다. 출력 특이벡터도 같은 형태를 가지나 해당 주파수에서의 phase angle을 포함한 위상지연을 갖는다.

위의 결과는 MIMO 공정으로도 쉽게 확장될 수 있다 [8]. 다만, MIMO의 경우는 각 주파수에서의 amplitude ratio가 $n_y \times n_u$ 행렬이 되므로 이를 다시 특이치 분해한, 즉 각 주파수에서의 directional gain이 특이치를 구성한다. 따라서 펄스응답 순환행렬의 특이치 분해는 주파수로 뿐만 아니라 principal direction으로도 분해하게 된다.

5. 차수감소 모델예측 제어기 설계에의 응용

앞의 분석을 통하여 펄스응답 순환행렬이 공정의 주파수응답을 적절히 표현하며 이의 특이치 분해가 여러 유용한 성질을 가지고 있음을 알았다. 이제 이 성질을 이용하여 차수감소 MPC 알고리즘을 설계하자. (20)을 공정의 중요한 모드와 그렇지 않은 모드로 구별하여 다음과 같이 분해하자.

$$H_N = [W^1 \ W^2] \begin{bmatrix} D^1 & 0 \\ 0 & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{1T} \\ V^{2T} \end{bmatrix}$$

$$= W^1 D^1 V^{1T} + W^2 D^2 V^{2T} \quad (23)$$

모드의 중요성은 관점에 따라 달라지지만, 공정출력에 미치는 영향에 의하여 판단하면 $D^1 \gg D^2$ 의 관점으로 분해되며, 이때 공정의 입출력관계는 다음과 같이 근사된다.

$$Y_N \approx W^1 D^1 V^{1T} U_N \quad (24)$$

이것은 더 낮은 차원의 subspace로 투영된 미래 입력변수, $V^{1T}U_N$ 가 미래 출력변수를 결정한다는 것을 의미

한다. V^1 의 열벡터(column vector)가 서로 수직이므로 이것을 (1)의 B로 선택할 수 있다.

$$\Delta U_k \approx V^1 \Delta U_k^* \equiv B \Delta U_k^* \quad (25)$$

(25)를 모델예측제어 알고리즘에 대입하면 최적화 문제에서 풀어야 할 변수는 차수가 훨씬 줄어든 ΔU_k^* 가 된다. 한편 앞에서 설명한 바와 같이, 펄스응답 순환행렬의 특이치 분해가 공정의 주파수 응답에 대한 완전한 정보를 가지고 있기 때문에 견실한 모델예측 제어기를 설계하는데 도움이 된다. 즉 V_N 의 벡터들이 이산 시간대의 sine이나 cosine함수 형태를 나타내므로, 원하지 않는 주파수 영역이나 중요하다고 생각치 않는 주파수 영역에 속한 벡터를 제거한 후 V^1 을 구성하면, 원하지 않는 주파수 영역의 모드를 자극하지 않으므로 강인한 제어기를 설계할 수 있게 된다. 이것은 기존의 feedback 경로 내에 low-pass filter를 사용하는 것과 유사한 효과를 나타내지만, filter를 추가함으로써 생기는 phase lag가 생기지 않는다는 장점이 있다.

III. 수치 예

본 논문에서 제시한 차수감소 MPC의 성능을 모델오차가 없는 경우와 있는 경우의 수치 예를 통하여 살펴보기로 하자.

1. 모델오차가 없는 경우

이 수치 예는 모델이 실제 공정과 일치할 때 본 연구에서 제시한 방법에 의하여 차수를 감소시킨 MPC의 제어성능을 정규 MPC의 제어성능과 비교한 것이다. 우선 공정의 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{17}{60.84s^2 + 15.6s + 1} & \frac{5}{19.36s^2 + 7.04s + 1} \\ \frac{3}{10.89s^2 + 4.62s + 1} & \frac{10}{36s^2 + 12s + 1} \end{bmatrix}$$

입력과 출력의 가중행렬은 $Q=I$, $R=0.01I$, 샘플링 간격은 1, 그리고 예측구간(p)과 제어구간(m)은 각각 50으로 취하였다. 한편 입력변수에 대한 제약조건은 $-1 \leq U_k \leq 1$ 로, 설정치는 입력신호가 가장 심하게 움직이는 방향으로 정하였다. $p=m=50$ 이고 2×2 공정이므로 이 공정의 펄스응답 순환행렬의 차수는 100×100 이 된다. 이 행렬의 특이치를 구하여 그림 1에 보였다. 그림에서 보는 바와 같이 지배적인 공정의 모드는 대략 앞의 20여개 정도이며, 해당되는 20개의 입력특이 벡터를 취하여 blocking 행렬 B를 구성하였다.

그림 2, 3에 두 경우의 MPC 전산모사 결과를 보였다. 그림에서 보는 바와 같이, 출력에 대한 제어성능은 거의 차이가 없다. 그러나 입력변수의 거동에는 많은 차이가 있다. 정규 MPC에서는 입력변수가 초기에 제약조건까지 움직이며 매우 크게 변화하는 것을 볼 수 있다. 실제적으로 제약조건을 주지않고 모사를 하면 입력변수가 10이상까지 변화하는 것을 관찰할 수 있다. 반면에 특이치 분해를 통해 20개의 벡터를 취하여 구성한 차수감소 MPC의 입력변수의 움직임은 훨씬 부드러움을 볼 수 있

다. 또한 QP에서 결정하여야 하는 입력변수의 차수가 1/5로 감소됨에 따라 계산시간도 매우 줄어들었다.

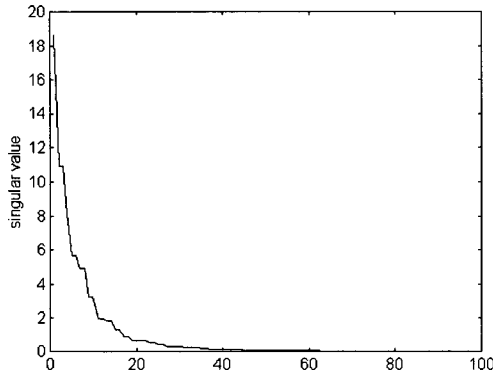


그림 1. PRCM의 특이치(예제 1).
Fig. 1. Singular values of the PRCM (example 1).

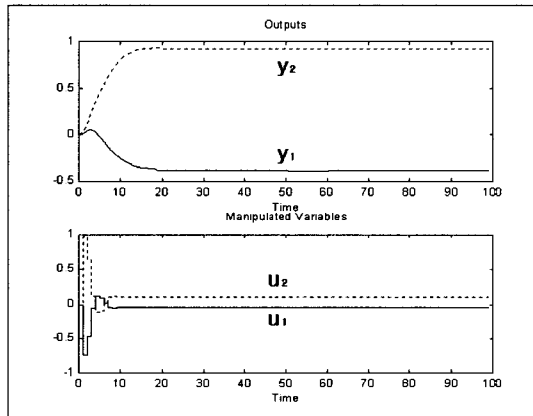


그림 2. 정규 모델예측제어의 성능(예제 1).
Fig. 2. Performance of regular MPC (example 1).

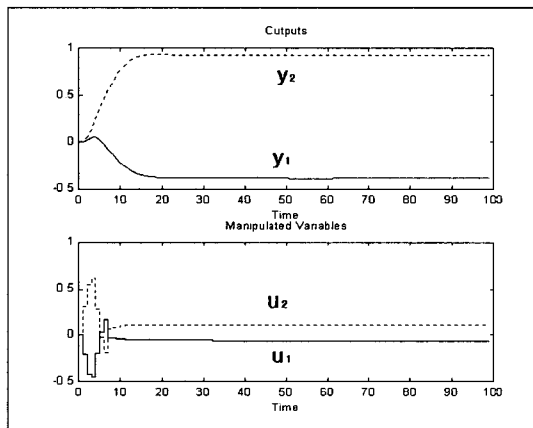


그림 3. 제안된 차수감소 모델예측제어의 성능(예제 1).
Fig. 3. Performance of proposed reduced-order MPC (example 1).

2. 모델오차가 있는 경우

두번째 예제로 모델오차가 있는 경우를 생각한다. 실제 공정과 제어기 설계에 사용된 모델의 전달함수는 다음과 같다고 가정한다.

$$G^{true}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.7}{(10s+1)(10s^2+s+1)} & \frac{2.3}{30s+1} \\ \frac{1.3}{20s+1} & \frac{2.8}{(10s+1)(5s^2+s+1)} \end{bmatrix}$$

$$G^{model}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.5}{10s+1} & \frac{2.2}{30s+1} \\ \frac{1.2}{20s+1} & \frac{2.6}{10s+1} \end{bmatrix}$$

입력과 출력 가중행렬은 $Q=I$, $R=I$, 샘플링 간격은 2, 예측구간(p)과 제어구간(m)은 가능하면 길게 하기 위해 90을 주었다. 또한 입력변수에 대한 제약조건은 없다고 가정하였고, 설정치는 모두 1로 주었다. 이 공정은 그림 3의 Bode plot에 보인 바와 같이, 대각항의 전달함수가 crossover 주파수 부근, 즉 0.3 rad/sec 이상에서 심한 오차를 갖는다. 때문에 이와 같은 모델을 기반으로 제어기를 설계할 경우, 제어성능이 떨어지거나 잘못된 불안정성까지 유발할 수 있다.

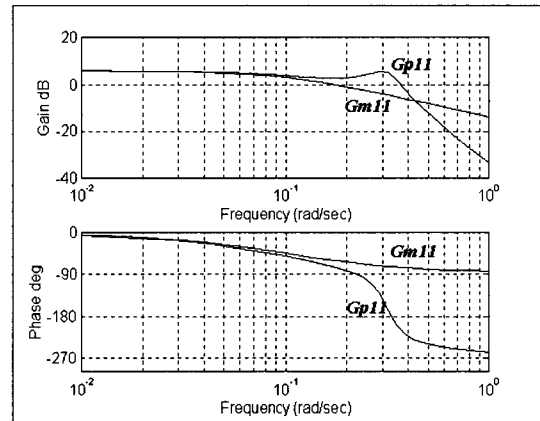


그림 4. G_{11}^{true} 와 G_{11}^{model} 의 Bode plot(예제 2).
Fig. 4. Bode plots of G_{11}^{true} and G_{11}^{model} (example 2).

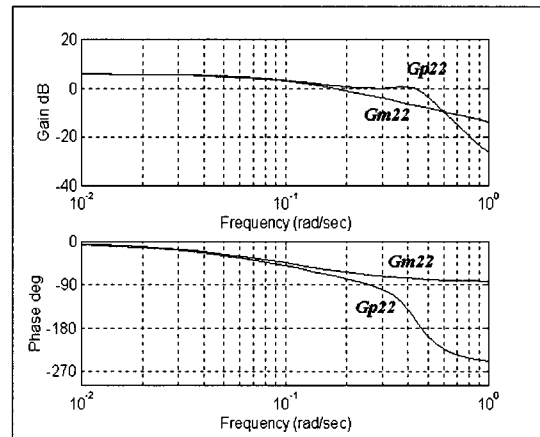


그림 5. G_{22}^{true} 와 G_{22}^{model} 의 Bode plot(예제 2).
Fig. 5. Bode plots of G_{22}^{true} and G_{22}^{model} (example 2).

위의 모델에 대한 펄스응답 순환행렬의 차수는 180×180 이다. 이제 차수감소 MPC를 구성하기 위해서는 차수는 줄이되 원하지 않는 모드, 즉 0.3 rad/sec 이상의 주파수 영역을 자극 시키지 않도록 blocking 행렬

을 설계해야 한다. 이를 위하여 V_N 의 각 column 벡터의 주파수를 조사하고, 0.3rad/sec 이하의 주파수 영역에서 큰 특이치를 갖는 20개의 column 벡터 20개를 선택하여 blocking 행렬 B를 구성하였다.

그림 6과 7에 정규 MPC의 성능과 이렇게 구성된 차수감소 MPC의 성능을 비교하였다. 그림 6에서 보는 바와 같이, 정규 모델예측제어 알고리즘을 심각한 모델오차가 있는 공정에 대해 적용한 결과, 입력 가중치를 비교적 큰 값으로 주었음에도 불구하고 불안정해지는 것을 볼 수 있다. 반면, 차수감소를 통해 계산량은 줄이면서, 원하지 않는 주파수 영역을 자극시키지 않은 결과, 그림 7과 같이 비교적 좋은 제어성능의 안정된 제어결과를 얻은 것을 볼 수 있다.

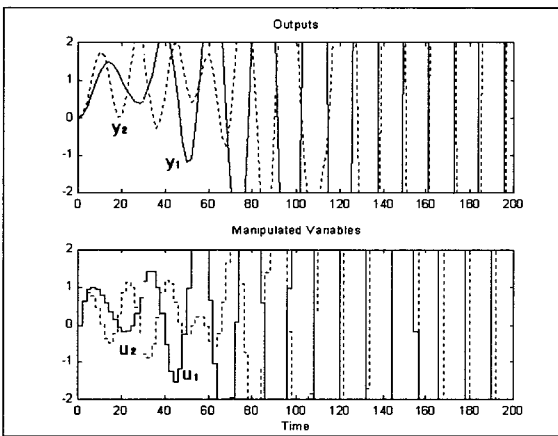


그림 6. 모델오차가 있는 경우의 정규 모델예측제어의 성능(예제 2).
Fig. 6. Performance of regular MPC for model error case (example 2).

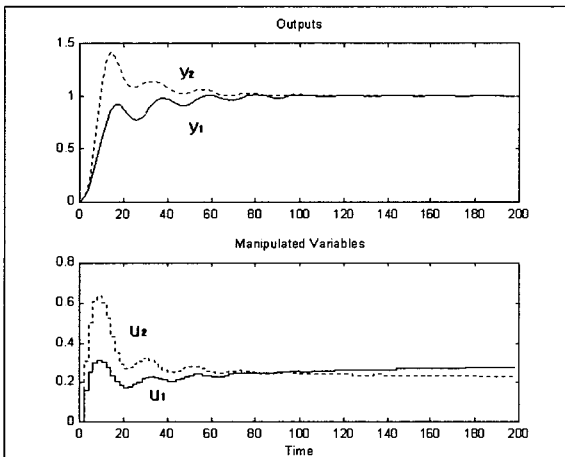


그림 7. 모델오차가 있는 경우 차수감소 MPC의 성능(예제 2).
Fig. 7. Performance of reduced-order MPC for model error case (example 2).

위의 결과를 좀 더 깊이 살펴보기 위하여 제안된 차수감소 MPC에 의하여 제어계의 견실성이 어떻게 개선되었는지를 분석하여 보자. 잘 알려진 바와 같이, 다중 입

출력 공정에서 비구조화 모델오차(unstructured model uncertainty)가 있는 feedback 제어계가 견실안정(robust stability)할 조건은 일반적인 $M-\Delta$ 구조로부터

$$\det(I - M\Delta(i\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall \Delta \in \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow \|M\|_\infty < 1$$

으로 표현된다[9].

만약 비구조화된 모델오차가 multiplicative 출력 오차(output uncertainty)라면

$$M = -\hat{P}C(I + \hat{P}C)^{-1}\bar{I}_o \quad (29)$$

이것을 (28)에 대입하면,

$$\bar{\sigma}(\hat{P}C(I + \hat{P}C)^{-1})\bar{I}_o = \bar{\sigma}(\hat{H})\bar{I}_o < 1 \quad \forall \omega \quad (30)$$

$$\Leftrightarrow \|\hat{H}\bar{I}_o\|_\infty < 1$$

여기서 \hat{H} 는 다중 입출력 공정의 nominal 모델로부터 구한 complementary sensitivity 함수 행렬이고, \bar{I}_o 은 multiplicative 출력 모델오차를 나타낸다. 따라서 행렬곱의 특이치와 각각의 행렬의 특이치 사이의 부등식을 이용하여 견실안정을 위해 허용되는 모델오차의 한계를 구하면

$$\bar{\sigma}(\bar{I}_o) < \frac{1}{\bar{\sigma}(\hat{H})} \quad \text{for all } \omega \quad (31)$$

와 같다. Complementary sensitivity 함수 행렬은 I-(sensitivity 함수 행렬)의 관계를 가지며, 모델예측제어계에서 sensitivity 함수 행렬은 II-1절의 DMC 식으로부터 외란 v_k 와 출력 y_k 사이의 closed-loop 전달함수로 표현된다. 이러한 관계를 이용하여 구한 complementary sensitivity 함수 행렬은 다음과 같다[3].

$$H(q) = Nq(qI - M + SN_m K_{mpc} M_p)^{-1} SN_m K_{mpc} M_p \times (qI - M + K_f NM)^{-1} K_f \quad (32)$$

이제 (32)의 S에 nominal 모델에서 구해진 값을 대입하고, K_{mpc} 에 정규 MPC에서 구해진 값과 차수감소 MPC에서 구해진 값을 각각 대입하여 구한 허용모델오차의 한계를 그림 8에 보였다.

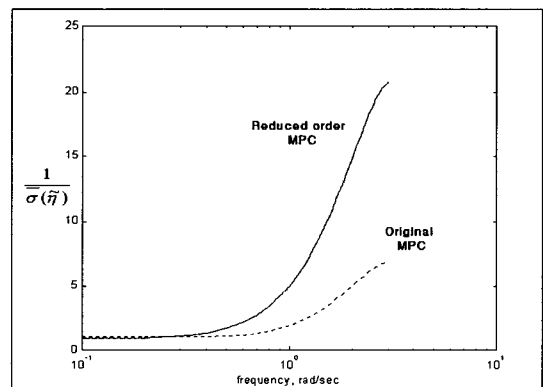


그림 8. 허용가능한 모델오차 범위 ($\frac{1}{\bar{\sigma}(\bar{\eta})}$).
Fig. 8. Allowable model error bound ($\frac{1}{\bar{\sigma}(\bar{\eta})}$).

그림에서 볼 수 있는 것과 같이 고주파 영역에서의 허용가능한 모델오차 범위가 차수감소 과정을 통하여 한결 증대되었음을 확인할 수 있다.

IV. 결론

본 연구에서는 펄스응답 순환행렬의 특이치 분해를 통해 모델예측제어의 계산량을 감소시키고 강인한 제어를 설계하는 방법을 제안하였다. 또한 이의 효율성을 증명하기 위하여 모델오차가 없는 경우와 있는 경우에 대한 수치모사를 수행하였다. 수치예에서도 볼 수 있듯이, 모델오차가 없는 경우 제안한 방법을 이용하면 일반적인 모델예측제어 알고리즘을 사용했을 때 보다 계산량은 훨씬 줄어들면서 제어성능은 거의 유지되었다. 더구나 입력을 보면 특이치 분해 알고리즘을 이용함으로써 weak direction을 제거하기 때문에 과도한 입력신호가 들어가는 것을 막을 수 있었다. 모델 오차가 있는 경우에는, 펄스응답 순환행렬의 특이치 분해의 명확한 주파수 분해능을 이용하여 심각한 모델 오차가 있는 주파수 영역의 입력 신호를 제거함으로써 강인한 모델예측제어 알고리즘을 얻을 수 있었다. 또한 강인성 분석을 통하여, 특이치 분해 알고리즘을 이용했을 때의 허용가능 오차범위가 일반적인 알고리즘을 이용했을 때의 것보다 더 크게 나타났다.

참고문헌

[1] S. J. Qin and T. A. Badgwell, "An overview of industrial model predictive control technology," *AICHE Symposium Series 316*, pp. 232-256, 1996.

[2] J. H. Lee, "Recent advances in model predictive control and other related areas," *AICHE Symposium Series 316*, 1996.

[3] J. H. Lee, M. Morari and C. E. Garcia, "State-space interpretation of model predictive control," *Automatica*, vol. 30, pp. 707-717, 1994.

[4] J. H. Lee, Y. Chikkula, Z. Yu and J. C. Kantor, "Improving computational efficiency of model predictive control algorithm for multi-time-scale systems using wavelet transformation," *Int. J. Control*, vol. 61, pp. 859-883, 1995.

[5] S. Palavajhala, R. L. Motard and B. Joseph, "Blocking and condensing design for quadratic dynamic matrix control using wavelets," *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 33, pp. 1159-1173, 1994.

[6] P. R. Maurath, A. J. Laub, D. E. Seborg and D. A. Mellichamp, "Predictive controller design by principal components analysis," *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 27, pp. 1204-1212, 1988.

[7] A. N. Akansu, *Multiresolution Signal Decomposition*, Academic Press, N.Y., pp. 35-39, 1992.

[8] K. S. Lee and S. H. Kim, "The pulse response circulant matrix : application to the design of reduced-order robust MPC and MIMO identification," *Proc. of the 12th KACC*, 한국전력연수원, Seoul, pp. 313-316, 1997.

[9] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust Process Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, pp. 205-242, 1989.



김 상 훈

1973년생. 1996년 서강대 화학공학과 졸업(공학사). 1998년 동대학원 졸업(공학석사). 주관심 분야는 모델 인식, 모델 예측 제어.

문 혜 진

1973년생. 1995년 서강대 화학공학과 졸업(공학사). 1997년 동대학원 졸업(공학석사). 1997년~현재 LG 하니웰. 주관심 분야는 모델 인식, 모델 예측 제어.



이 광 순

1955년생. 1977년 서울대 화학공학과 졸업(공학사). 1979년 한국과학기술원 화학공학과 졸업(공학석사). 1983년 한국과학기술원 화학공학과 졸업(공학박사, 공정제어전공). 1983년 서강대학교 화학공학과에 임용되어 현재 정교수. 1986년 캐나다 Univ. of Waterloo 방문교수. 1995년 미국 Auburn Univ. 방문교수. 1991년~현재 포항공과대학교 부설 공정산업의 지능자동화연구센터(ARC) 연구원으로 회분식공정의 자동화 분야 담당. 주요 관심 분야는 batch repetitive transient 공정의 학습제어 및 모델 기반 예측 제어, MPC, 모델인식, SPC.