한국학교수학회논문집 제 1 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 1, Number 1, 185-196, 1998

中學校의 近似값 指導를 위한 敎授-學習 資料 硏究

趙 成 範[1)]

Ⅰ. 序 論

A. 硏究의 必要性

우리의 일상 생활에서는 근사값을 사용하는 경우가 많이 있다. 예를 들어 「A도시의 인구수는 50만명 이다」와 같이 참값은 있으나 알 수 없거나 그다지 자세한 수값을 필요로 하지 않는 인구, 물가 변동, 할인가격(몇%할인) 등과 같은 것이나, 「서울에서 대전까지의 거리는 175Km이다」와 같은 거리와 길이, 넓이, 부피, 무게, 시간, 온도 등 일상 생활에서 사용되고 있는 많은 수치들도 정확하고 정밀한 측정치를 얻으려 하지만 모두 어림한 근사값으로 사용되고 있다. 이러한 계산 및 측정의 결과로 나타날 수 있는 수치들은 모두 연속적인 값들이기 때문에, 근사치를 구하는데 있어서 계산 도구의 이용보다는 수학적인 구상, 즉 새로운 계산 지도의 방법이 필요하다.

따라서 우리는 여러가지 수학적 상황에 맞는 폭넓고 다양한 계산 및 어림 기법을 사용할 수 있어야 하며 계산 도구로부터 나온 결과를 특정 문제나 상황에 적합하게 해석, 적용할 수 있어야 한다.

그러나, 현행 초·중등 교육과정에서는 근사값의 중요성을 인식하면서도 이 부분이 단지 수학의 한 분야로서 분류되고 형식화되어 있어서 다양한 실생활의 문제에 대하여 합리적으로 문제를 해결 할 수 없다.

일상 생활에서 근사값이 언제 필요하고, 또 왜 그런 근사값으로 사용했는지 등 근사값을 통한 논리성 계발에 힘써야 할 것이다. 즉, 근사값 지도에 있어서는 구체적인 장면을 통하여 근사값의 필요성과 그 때의 근사값으로 나타내는 방법 등을 이해시키는 것이 중요하며 이를 통해서 그 근사값이 갖는 의미와 근사값이 쓰이는 문제의 처리가 자연스럽게 이해되게 해야 할 것이다.

현재 우리나라에서의 근사값에 관련된 연구를 살펴보면 초등학교에서의 어림수에 관한 연구에 비해 중·고등학교에서의 근사값에 관한 연구가 거의 없는 실정이라서 근사값 지도에 어려움을 겪고 있다.

따라서 중학교 교육과정에서 근사값으로 나오는 수치에 대한 역사적 과정 및 결과에 대한 연구를 한다면 근사값의 지도에 많은 도움을 줄 수 있을 뿐만 아니라 근사값의 중요성을 한층 더 강화시킬 수 있을 것이다.

B. 硏究의 目的

본 논문의 연구 목적은 중학교 교육과정에서 다루어 지고 있는 근사값에 대한 수학

1) 충남 예산 예산여자중학교

사적 자료를 개발하여 근사값이 갖는 의미와 근사값이 쓰이는 문제의 처리 등 근사값의 본질을 더욱 명확히 하고 근사값이 사용되는 내용의 폭넓은 지도를 위한 학습자료로 삼고자 함에 있다.

C. 硏究의 制限点

가. 본 연구는 1995학년도 부터 시행된 중학교 교육과정의 근사값과 관련된 단원중에서 π, 제곱근, 삼각비의 근사값 만을 대상으로 하였다.

나. 본 연구는 주로 문헌 탐색의 방법을 택하여 근사값 사용 역사와 관련하여 근사값 구하는 방법 및 관련된 이론들 만을 자료로 개발하였다.

Ⅱ. 教育課程 分析 및 指導 現況

A. 初等學校 教育課程 分析 및 指導 現況

제5차 교육과정의 4학년에서 지도하던 참값, 근사값, 오차를 제6차 교육과정에서는 5학년에서 지도하고, 제5차 교육과정의 5학년에서 지도하던 어림수, 어림셈을 제6차 교육과정에서는 6학년에서 강화하여 지도 하도록 하였다. 그 내용을 학년별로 살펴보면 다음 표와 같다.

<표 1> 근사값과 관련된 초등학교 교육과정

학년	근사값 관련 내용
2	길이의 측정값을 '더된다' '못된다'로 나타낼 수 있게하여 측정값의 처리 방법에 대한 기초 경험을 가지게 한다.
3	측정값을 '약'을 사용하여 나타낼 수 있게 한다.
4	측정값의 처리 방법으로 반올림, 올림, 버림을 알게 한다.
5	참값과 근사값의 관계를 이해하게 한다. ㅇ참값, 근사값 ㅇ오차
6	어림수와 어림셈이 사용되는 경우를 통하여 이를 활용 할 수 있게 한다. ㅇ어림수 ㅇ어림셈

B. 中學校 教育課程 分析 및 指導 現況

제5차 교육과정의 1학년에서 지도하던 근사값과 오차, 근사값의 표현과 3학년에서 지도하던 근사값의 사칙계산을 난이도와 분량을 고려하여 제6차 교육과정에서는 모두 2학년에서 지도하도록 하였다. 그리고 3학년 과정에서 무리수의 근사값, 삼각비의 근사값 구하는 방법이 부분적으로 다루어 지고 있다. 그 내용을 살펴보면 다음과 같다.

가. 근사값과 오차

여러가지 물체의 길이나 무게 등을 측정하는 조작을 통하여 참값과 측정값의 뜻을 이해하게 하고, 참값의 범위를 구할 수 있게 하였으며, 또한 근사값과 오차, 오차의 한계을 생각하는 이유를 알고 구할 수 있게 하였다.

나. 근사값의 표현

유효숫자의 뜻을 이해하게 하고 유효숫자를 써서 근사값을 나타낼 수 있게 하였으며, 근사값을 유효숫자와 10의 거듭제곱을 사용하여 나타내는 이유를 이해하게 하였다.

다. 근사값의 계산

· 근사값의 덧셈과 뺄셈 : 근사값의 덧셈과 뺄셈에서는 유효숫자의 끝자리가 같도록 반올림하여 계산한다.

· 근사값의 곱셈과 나눗셈 : 근사값의 곱셈과 나눗셈에서는 유효숫자의 개수를 적은 쪽에 맞추어 계산하고, 그 결과도 반올림하여 유효숫자의 개수가 같도록 정한다.

라. 제곱근의 근사값

제곱근표를 보는 방법을 알게 하고, 이를 이용하여 제곱근의 근사값을 구할 수 있게 하였으며, 제곱근표에 없는 제곱근의 근사값은 제곱근의 성질을 이용하여 구할 수 있게 하였다.

마. 삼각비의 근사값

삼각비를 정의하여 30°, 45°, 60° 의 삼각비의 값을 피타고라스 정리를 이용하여 구할 수 있게 하였고, 임의의 예각에 대한 삼각비의 값을 좌표평면 위에 그려진 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 구하는 방법을 이해하게 하였으며, 또, 0° 와 90° 에 가까와짐에 따라 삼각비의 값이 어떻게 변하는가를 살펴봄으로써 0° 와 90° 에 대해서도 사인과 코사인의 값을 정할수 있다는 것을 알게 한다. 또, 사분원을 이용하여 삼각비의 값을 구하는 것이 불편하다는 것을 깨닫게 하여 삼각비의 표를 활용하여 삼각비의 근사값을 구할 수 있게 하였다.

Ⅲ. 새로운 指導 方法을 위한 檢討

A. 歷史 發生的 原理

역사발생적 원리는 수학의 역사에서 볼 수 있는 역사적 도식화의 과정을 단축하여 그것을 수학의 교수-학습에서 재현하게 한다는 교수 원리이다.

이러한 역사발생적 원리는 연역적으로 전개된 이론 체계에 따른 형식적인 학교수학의 결함을 극복하기 위하여 18세기 이래 거듭 제기 되어 왔다.

수학, 특히 기하학의 관점에서의 발생적 접근은 Arnauld(1612-1694)와 Clairaut(1713-1765)가 개척자 역할을 하였으며, 19세기에 Lindner에 의해 발생적 원리가 '역사-발생적 방법'이라는 일반적인 교수학적 구상으로 명확하게 나타나게 되었다.

발생적 원리에 입각한 학교교육의 포괄적인 구상이 독일의 Mager에 의해 19세기 중엽에 이루어졌는데, 그는 교과서가 학문 발달에서 중요한 기여를 한 과학자들의 아이디어의 집성이어야 한다고 주장하면서, 원전에 관한 연구를 권장하였다.

20세기에 들어와 발생적 원리를 강력히 요구한 사람은 Klein과 Poincare이었다. 그들은 역사발생적 원리에 따른 수학교육을 옹호하고 교사 교육에서의 수학사의 중요성을 강조하였다.

수학교사 교육을 위한 역사발생적 원리에 따른 수학 교재의 구성은 실직적으로 Toeplitz에 의해 최초로 이루어졌다.

Toeplitz는 수학교사 교육에서 중요한 것은 역사적 사실의 전달이 아니라 수학과 수학적 방법의 특성에 대한 바른 파악, 곧 태도의 전달이라고 보았으며, 수학의 역사적 발달의 논리를 교수학적으로 번역할 수 있기를 바랬다.

2차 세계대전 이후 수학교육학 분야에서 역사발생적 원리는 여러 학자들에 의해 새롭게 형식화되어 옹호되어 왔다. 그 대표적인 학자로 Freudenthal과 Lakatos를 들 수 있다.

Freudenthal은 학생들에게 역사적 학습과정, 다시 말해 수학의 발달이라고 하는 인류의 학습과정을 단축된 형태의 가상적 과정으로 재현시켜 줌으로써, 수학적 사고 경험을 하게 할 수 있다고 보았다.

이상의 고찰을 통하여 본 바와 같이 역사발생적 원리는 18세기 이래로 여러 학자들에 의해 수학을 논리적으로 전개된 결과적 지식체계로 가르치는 연역적인 수학교육에 대한 반성과 함께 그 결함을 극복하기 위해 제기된 수학학습 지도 원리로서 꾸준히 주장되어 왔다.

역사발생적 원리에 따르면 수학은 완성된 산물로서가 아니라 역사적 발생과정 곧, '수학화' 과정을 되밟게 함으로써 바르게 이해되고 적용될 수 있다.

B. 數學史的 內容 導入에 관한 先行 研究의 考察

가. 수학사는 모든 과학이나 산업기술의 기반으로서 인간 문화에 중요한 지위를 차지하는 수학이 어떠한 자연과 사회를 배경으로 어떻게 발전되어 왔으며, 또 그렇게 형성된 수학이 인간의 생활개선에 어떠한 역할을 해 왔는가를 인식시켜 주고, 교재의 취급과 연구에 있어서 또는 지도상의 문제점의 규명에 있어서 많은 도움이 되며, 학생들에게 친근감을 주고 무미건조하게 되기 쉬운 학습을 흥미있는 학습으로 이끌수 있으며 수학에 대한 자신감과 용기를 준다

나. 수학사적인 내용을 수업에 전개시켜 본 바 학생들이 수업중에 대단한 흥미를 보였고, 수학에 보통 느끼는 딱딱한 거부감 대신 접근적인 친밀감을 느껴 수학을 좋아하게 된 학생들이 많았다.

다. 수학사의 지도는 수학의 역사적 발달과정을 되돌아 봄으로써 수학적 사고의 인간적인 모습과 수학의 진정한 모습을 접해 보게 하여 학습동기를 유발하게 하고, 수학학습에 생기를 불어 넣는 방안을 찾을 수 있다. 그리고 수업에서 학생들이 주의를 집중시키고 수업에 변화를 주는 방법으로 사용할 수 있다.

라. 교사는 수학에 대한 다양한 상식과 지식을 가지고 관심과 흥미를 유발시키는 수학사적 자료들을 통하여 수학이 어렵고 흥미없는 과목이라고 생각하는 많은 학생들의 선입관을 불식시키고 나아가 산업화된 시대를 살아가는데 수학자들의 인내와 노력, 인간성, 학문적인 정진의 자세를 본보기로 삼아 자극과 영향을 받도록 하여야 한다.

Ⅳ. 近似값에 관한 數學史的 敎授-學習 資料 研究

A. 원주율(π)의 근사값

가. Babylonia 인들의 원주율

B.C 2000년경 부터 B.C 600년경 사이의 유프라테스 강과 티그리스 강 사이에서 형성된 바빌로니아(메소포타미아) 문명은 쐐기문자라는 독특한 모양의 문자를 가짐으로서 고도의 문명을 이룩하게 되었다. 이 곳에서 지금까지 발굴된 수학적 내용을 담은 250여개의 진흙판 중에는 정육각형의 변의 길이와 이 정육각형에 외접하는 원의 원둘레의 비율에 관한 기록이 있다. 1950년에 이 진흙판에 대한 대부분의 해석이 이루어졌는데 지금 우리가 쓰는 기호로 표시하면

$\frac{57}{60}+\frac{36}{(60)^2}$ 임을 알게 되었다.

즉, $\frac{\text{정육각형의 변의 전체길이}}{\text{외접원의 원둘레}}$

$$= \frac{57}{60}+\frac{36}{(60)^2} \qquad (1)$$

그런데, 바빌로니아인들은 정육각형의 한변의 길이는 외접하는 원의 반지름과 일치한다는 사실을 알고 있었다. 따라서 정육각형의 한변의 길이를 r 이라 하고 외접원의 원둘레를 C라 하면 식 (1)은

$$\frac{6r}{C}=\frac{57}{60}+\frac{36}{(60)^2} \qquad (2)$$

이 되고, $\pi=\frac{C}{2r}$ 이므로

$$\frac{6r}{C}=\frac{6r}{2\pi r}=\frac{3}{\pi}=\frac{57}{60}+\frac{36}{(60)^2} \qquad (3)$$

을 얻게 된다.

따라서, $\pi=3\frac{1}{8}=3.125$을 얻게 된다.

이로써 바빌로니아인들은 진흙판에 새겨진 비를 π의 근사값으로 사용했음을 짐작 할 수 있다.

나. Egypt 인들의 원주율

수학과 관련을 갖고 있는 이집트의 가장 오래된 자료인 B.C 2000년에서 B.C 1700년 사이의 것으로 알려진 Rhind Papyrus 또는 Ahmes Papyrus는 그 시대보다 이전의 자료를 기록한 것으로 수학에 관한 84문제와 그 해답이 담겨져 있는데, 여기에서 아메스는 "지름이 9인 원 모양의 밭의 넓이가 한변의 길이가 8인 정사각형인 지역의 넓이와 같다"고 했다.

원의 면적 공식 A = πr^2을 사용하면

$$\pi(9/2)^2 = 8^2$$

이된다. 그러므로 이집트인들의 π값은

$$\pi = 8^2 \times (2/9)^2$$
$$= 4 \times (8/9)^2$$
$$= 3.16049 \cdots\cdots$$

임을 짐작할 수 있다.

다. Archimedes의 원주율

아르키메데스는 원둘레를 계산하는데 원에 내접하는 정n각형의 변의 총길이는 원둘레 길이 보다 짧고, 원에 외접하는 정n각형의 변의 총길이는 원 둘레 보다는 길다는 사실에 근거하여 정6각형에서 시작하여 변의 수를 2배씩 증가함으로써 96각형에 이르러 π의 값을 다음과 같이 구했다.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \qquad (1)$$

즉, 지금의 소수로 표시하면

$$3.14084 < \pi < 3.142857 \qquad (2)$$

임을 알 수 있다.

그의 계산을 점검하기 위하여 삼각함수을 사용하여 알아보면 다음과 같다.

만일, $\theta = \frac{\pi}{n}$가 정 n각형의 한변에 대한 내각의 절반이라고 하면, 내접하는 한변의 길이는

$$i = 2r\sin\theta \qquad (3)$$

이고, 외접하는 한변의 길이는

$$c = 2r\tan\theta \qquad (4)$$

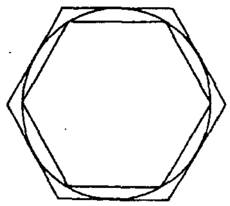
이다. 원의 둘레 C에 대하여 다음이 성립하고,

$$ni < C < nc$$

여기에 (3)과 (4)를 대입하고 $2r$로 나누면, C = $2\pi r$ 이므로

$$n\sin\theta < \pi < n\tan\theta \qquad (5)$$

이다. 원래의 변의 수를 두배씩 k번 하면,



<그림1>

$$2^k n\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right) < \pi < 2^k n\tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \quad (6)$$

이 되고, k를 충분히 크게하면 π의 근사값은 얼마든지 정확하게 구할 수 있다.

정96각형의 경우는 k = 4 일 때이고, 이때의 π의 근사값은 (1)식에서 보여준 것이다.

라. 고대 인도의 원주율

구입할 수 있는 고대 인도의 최초의 문헌은 A.D 380에 출판된 시탄타(Siddhanta)인데 이 가운데 π의 값으로

$$\pi = 3\frac{177}{1250} = 3.1416$$

을 사용하고 있다. 그리고 A.D 499년에 쓰여진 책 아라바티야(Aryabhatiya)에서는 "100에 4를 더하고 8을 곱한 후에 62,000을 더하라. 그 결과는 대략 지름이 20,000인 원의 둘레가 된다"고 하고 있어서 이것을 계산해 보면 π가

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

이 됨을 알 수 있다.

인도 사람들은 그것들을 어떻게 알게 되었는지 밝히지 않았다. 아마도 인도 사람들은 아르키메데스의 다각형법에 의하여 이 값을 얻었을 가능성이 크다. 원에 내접하는 정n각형의 한변의 길이를 $s(n)$이라 하면 정2n각형의 한변의 길이는

$$s(2n) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2(n)}}$$

이 된다는 편리한 관계식을 유도하여 그식으로 계산하였다 한다. 6각형에서 출발하여 2배수로 12, 24, 48, 96 192, 384 다각형을 생각해 보면 원의 지름이 100인 원에 내접하는 384다각형의 변 둘레는 98,694의 제곱근이 되어

$$\pi \fallingdotseq \frac{\sqrt{98694}}{100} = 3.14156\cdots\cdots$$

이 된다. 이 값이 아라바티야가 보여주는 값이다.

마. 고대 중국의 원주율

중국은 B.C1000년경에 엮어진 것으로 짐작되는 주패산경(周髀算經)에서는 "지름이 1일때 원의 둘레는 3" 곧 원주율 π를 3으로 잡고 있다. 이 책 다음으로 오래된 중국의 유클레이데스로 일컬어지는 B.C100년 경의 구장산술(九章算術)에서도 $\pi = 3$ 으로 쓰이고 있다.

이후 π의 값은 중국에서는 다음과 같이 셈하여졌다.

서기 9년경 유흠(劉歆)은 3.154로, 왕망(王莽)은 $\sqrt{10}$으로 사용하였으며,

서기 264년에 유휘(劉徽)는 아르키메데스의 내접다각형을 변형 192각형을 이용하여 $3.141024 < \pi < 3.142704$를 구하였고, 3072각형을 이용하여 $\pi = 3.14159$를 얻었다.

그후 5세기경에 조충지(祖冲之)와 그의 아들 조항지(祖恒之)는

$3.1415926 < \pi < 3.1415927$을 얻었는데, 이 값이 어떻게 구해졌는지는 알려지지는 않았지만 아마도 유휘(劉徽)가 구했듯이 세분된 내외접 정다각형에서 산출된 것이라고 생각된다.

바. 중세 이후의 원주율

지금까지의 중세 이후 원주율의 정확한 값은 거의 모두 원에 내접(또는 외접)하는 정 2^n각형의 둘레를 가지고 근사값을 구하는 결과가 되었다.

B. 제곱근의 근사값

가. 바빌로니아의 제곱근의 근사값

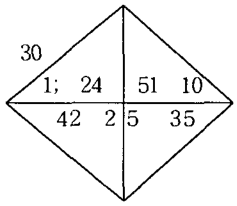
19세기의 처음 50년 이래 메소포타미아에서 활동한 고고학자들은 약 50만개의 점토판을 발굴했는데 그 점토판 중에는 그림과 같이 3개의 수

a = 30(왼쪽위)

b = 1 ; 24, 51, 10 (중앙윗부분)

c = 42; 25, 35 (중앙 아래 부분)

가 적혀있다.



<그림2>

메소포타미아에서는 60진법이 쓰였다는 사실을 염두해 두면

$b = 1\ ;\ 24,\ 51,\ 10$

$\quad = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$

$c = 42;\ 25,\ 35 = 42 + 25/60 + 35/60^2$

따라서, $ab = 30 + 720/60 + 1530/60^2 + 300/60^3 = c$

즉, 진흙판의 수수께기는 이들 a, b, c 사이의 관계를 나타내고 있는 것임을 알 수 있다.

여기서 가운데의 수 b 는 한변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 $\sqrt{2}$를 나타내고 있다는 것을 알 수 있다.

$b = 1 + 0.4 + 0.0141666\cdots$
$\quad + 0.00004629629\cdots$
$\quad = 1.4142126296\cdots \fallingdotseq \sqrt{2}$

이처럼 B.C 2000년 경에 이미 소수점 이하 다섯째자리까지 정확하게 $\sqrt{2}$의 근사값을 사용하였음을 짐작할 수 있다.

또한 이들 진흙판에 의하면 바빌로니아인들은 비제곱수에 대한 제곱근의 근사값을 구하는 몇가지 흥미로은 결과를 만들어 냈는데, $\sqrt{2}$ 의 근사값을 17/12로, $1/\sqrt{2}$의 근사값을 17/24로 했다. 아마 바빌로니아인들은 다음 근사 공식을 이용했던것 같다.

$$\sqrt{a^2+h} \fallingdotseq a + h/2a$$

$\sqrt{2}$에 대한 더욱 놀라운 근사값인

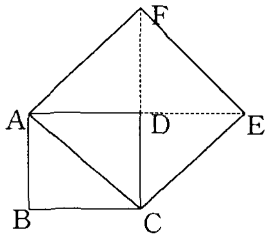
$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$$
$$= 1.4142155$$

도 B.C 1600년경으로 추정되는 판에서 발견된 것이다.

나. 고대 인도의 제곱근의 근사값

기원전 6세기경 인도의 수학책 '밧줄의 법칙'에 나와있는 $\sqrt{2}$의 근사값을 쉽게 구하는 방법으로 다음과 같은 것이 있어 고대 인도인들도 역시 제곱근의 근사값을 계산하여 사용 하였음을 짐작할 수 있다.

그림과 같이 한변의 길이가 12인 정사각형 ABCD를 생각한다. 그러면, 대각선AC를 한변으로 하는 정사각형ACEF의 면적은 처음 정사각형 ABCD의 면적의 2배가 된다. 즉,



<그림3>

$$AC^2 = 2 \times AB^2$$
$$= 2 \times 12^2 = 288 \fallingdotseq 289 = 17$$

따라서, AC ≒ 17 그런데, 2= AC^2/AB^2

$\therefore\ \sqrt{2} = AC / AB \fallingdotseq 17 / 12 = 1.4166\cdots$

이것은 소수점 이하 둘째 자리까지 정확하다. 위의 계산에서는 AC^2을 17^2 (=289)으로 잡았으나, 실제값은 이보다 조금 작기 때문에

$$(17 - x)^2 = 2 \times 12^2$$

과 같이 놓으면,

$$289 - 34x + x^2 = 288$$

그런데 x^2은 작기 때문에 x^2을 무시해서 계산하면,

$$289 - 34x = 288$$

따라서 $x \fallingdotseq 1/34$ 즉,

$$(17 - 1/34)^2 \fallingdotseq 2 \times 12^2$$

그러므로

$$\sqrt{2} \fallingdotseq 1/12 \times (17 \times 34 - 1) / 34$$
$$= 577/408 = 1.4142156 \cdots$$

이것은 소수점 아래 5째자리까지가 정확하다. 더 정밀하게 근사값을 구하고 싶으면,

$$(577 - y)^2 = 2 \times 408^2$$

와 같이 놓고, 계산하면 된다. 이때,

$$\sqrt{2} \fallingdotseq 1/408 \times (577 \times 1154 - 1) / 1154$$
$$= 665857/470832 = 1.4142135\cdots$$

이것은 소수점 아래 6째자리까지가 정확하다.

다. 헤론(Heron)의 제곱근의 근사값

이집트 시대의 응용수학에 있어서 주목할 만한 사람은 바로 알렉산드리아의 헤론이다. 그의 14편쯤 되는 논문 중 기하학에 관한 중요한 <측정론>의 세권 중 1권에는 완전제곱이 아닌 정수의 제곱근을 근사시키는 헤론의 방법이 있다. 이것은 바빌로니아의 제곱근 풀이법을 정식화 한 것으로 오늘날 컴퓨터에서 흔히 이용되는 다음과 같은 방법이다.

$n = ab$ 이면 $\sqrt{n}$ 은 $(a + b) / 2$

에 의해 근사되는데, 이때 이 근사값은 a 나 b보다는 더 좋은 근사값이다. 이 방법을 계속하여 보자.

즉, a_1이 $\sqrt{n}$의 최초의 근사값이면

$$a_2 = \frac{a_1 + \dfrac{n}{a_1}}{2}$$

은 더 좋은 근사값이고, 다시

$$a_3 = \frac{a_2 + \dfrac{n}{a_2}}{2}$$

은 그보다 더 정확한 근사값이고, 이를 계속해 가면 점점 더 정확한 근사값을 얻게 된다.

라. 연분수로 제곱근 근사값 구하기

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ 등의 근사값을 무한 연분수로 구할 수 있다. 예를들어 $\sqrt{2}$ 는 무리수이므로 규칙성을 찾을 수 없는 비순환 무한소수이다. 그러나 제곱근의 성질에서 $1 < \sqrt{2} < 2$ 임을 알수 있다. 즉 $\sqrt{2}$의 정수 부분이 1이므로

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$
$$= 1 + \frac{(\sqrt{2})^2 - 1^2}{\sqrt{2}+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{(\sqrt{2})^2-1^2}{\sqrt{2}+1}}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} \cdots\cdots$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} \cdots\cdots$$

이러한 방법으로 계속하면 $\sqrt{2}$의 근사값을 원하는 만큼 정확하게 계산할 수 있다.

(1) $\sqrt{2} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

(2) $\sqrt{2} \fallingdotseq 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4$

(3) $\sqrt{2} \fallingdotseq 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$

$$= \frac{17}{12} = 1.416\cdots$$

마. 제곱근 풀이법에 의한 근사값 구하기

양수 또는 대수식의 제곱근 구하는 계산을 제곱근 풀이법이라 한다.
제곱근 풀이법은 아르키메데스(B.C287 - B.C212)의 저서에 나와 있는데, 오늘날의 제곱근 풀이법은 16세기에 접어들어 발견된 것으로

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$
$$= (a_1)^2 + (2a_1 + a_2)a_2 +$$
$$+ (2a_1 + 2a_2 + a_3)a_3 + \cdot\cdot\cdot$$
$$+ (2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \cdots + a_n)a_n$$

의 항등식이 그 기초가 된다.

제곱근의 풀이 방법을 곱셈공식을 이용하여 살펴보면 다음과 같음을 알 수 있다.

(1) $(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b$

		4 3	…… a + b
a ……	4	$\sqrt{18\ 49}$	
a ……	4	16	… a^2
2a+b ……	83	2 49	
b ……	3	2 49	… (2a+b)b
	86	0	

(2) $(a+b+c)^2 = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c$

		4 2 6	
a …	4	$\sqrt{18\ 14\ 76}$	
a …	4	16	…… a^2
2a+b …	82	2 14	
b …	2	1 64	… (2a+b)b
2a+2b+c	846	50 76	
c …	6	50 76	… (2a+2b+c)c
	852	0	

C. 삼각비의 근사값

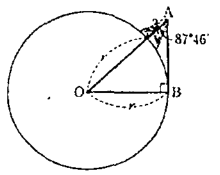
가. 히파르코스의 삼각비 계산

히파르코스는 원을 360 등분하여 그 중심각을 1° 라고 정하였으며, 반지름의 $\frac{1}{60}$을 단위로 현의 길이를 재어 그 값을 표로 만들었다.

그는 지구가 둥글다는 것을 알고 지구의 반지름을 구하기 위하여 삼각비를 사용하여 다음과 같은 방법으로 구했다고 한다.

먼저 높은 산에 올라가 수평선을 바라본다. 산의 높이가 3마일이고 수평선을 바라본 각도가 87° 46′ 이라고 하자.

△ABC는 직각삼각형이므로



$$\sin 87°\ 46' = \frac{r}{r+3}$$

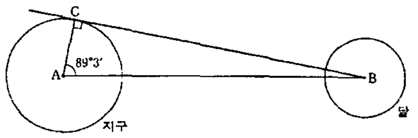
<그림4>

히파르코스는 sin 87° 46′ 의 값을 0.99924까지 알고 있었으므로,

$$0.99924 = \frac{r}{r+3}$$

$$\therefore\ r = 3944(\text{마일})$$

또, 히파르코스는 지구에서 달까지의 거리도 측정하였다.



<그림 5>

$$\cos 89°\ 3' = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\therefore\ \overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos 89°\ 3'}$$

$$= \frac{3900}{0.01600} = 243750\ (\text{마일})$$

나. 프톨레마이오스의 삼각비 계산

「알마게스트(Almagest)」에서 히파르코스의 논문으로부터 인용하여 만든 것으로 믿어지는 그 후속적인 현표를 보면 원의 중심각을 0.5° 씩 등분하여 180° 까지의 중심각에 대한 현의 길이의 코오드(crd)표를 만들어 놓고 있는데 이것은 결국 지금의 삼각사인표와 같음을 알 수 있다.

그것은 원의 반경을 60등분한 다음 그의 한 등분을 단위로 하여 각 현의 길이를 60진법으로 표현한 것으로, 이를테면 중심각이 36° 에 대한 현의 길이를 crd를 사용하여

$$\text{crd } 36° = 37^{p}\ 4'\ 55''$$

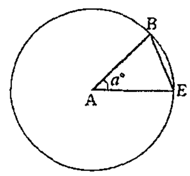
로 나타내었다.

이것은 중심각이 36° 인 현의 길이는

$$\text{반경의 } 37/60 + \text{반경의 } 4/60^{2} + \text{반경의 } 55/60^{3}$$

와 같음을 의미한다.

실제로, 오른쪽 그림에서

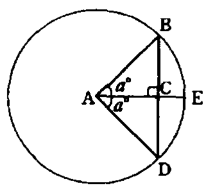


$$crd\ a° = \frac{60\times\overline{BE}}{\overline{AE}}$$

로 정하였다. 즉, <그림6>

$$crd\ a° = \frac{120\times\overline{BE}}{(\text{지름의 길이})}$$

아래 그림에 의하여, crd a° 의 값과 오늘날의 사인 값 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.



$$\sin a° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$= \frac{\overline{BD}}{(\text{지름의 길이})}$$

<그림7>

$$= \frac{crd\ 2a^\circ}{120}$$

따라서 프롤레마이오스의 현표는 본질적으로 0° 부터 90° 까지 15′ 마다 각 각의 sine값을 주고 있는 셈이다. 그때의 기록에 의하면

$$\sin\ \frac{1}{2}^\circ = 0^p\ 31'\ 25''$$

$$\left(= \frac{31}{60} + \frac{25}{60^2} = 0.0085 \right)$$

$$\sin 1^\circ = 1^p\ 2'\ 50''\ \left(=1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2} =0.0178 \right)$$

으로 현재의 값 $\sin\ \frac{1}{2}^\circ = 0.0087$, $\sin 1^\circ = 0.0174$ 와 거의 같음을 알 수 있다.

다. 보간법(補間法)에 의한 삼각비의 계산

삼각비의 근사값을 구하는데 있어서 고대 인도인들은 삼각비를 삼각함수로 확장하여 처음으로 보간법을 사용하여 삼각비의 근사값을 구하였다.

이를테면, tan 50° 20′ 의 근사값을 구하려 할때 삼각함수표에서

$\tan 50^\circ = 1.1918$

$\tan 51^\circ = 1.2349$

을 구하여 1° 만큼의 각도가 변함에 따라 탄젠트 값이 0.0431 (=1.2349 - 1.1918)이 변하였기에 20′ 에 대한 tangent의 변화량은 대략 비례하기에

$$0.0431 \times \frac{20}{60} = 0.0143$$

이다. 따라서,

$$\tan 50^\circ\ 20' \fallingdotseq \tan 50(1.1918) + 0.0143 = 1.2062$$

와 같이 구하는 방법이다.

물론, sine, cosine의 경우도 같은 방법으로 구할 수 있다.

V. 結　論

우리의 일상생활이나 학교 수학에서 수 또는 양적인 문제는 어림잡아 계산한 수치(근사값)이면 충분한 경우가 많이 있어 근사값이 가지는 의미와 근사값이 쓰이는 문제의 처리가 매우 중요하다.

그러나 종래의 근사값에 관한 지도를 보면 계산 형식이나 결과만을 강조하여 '수학적 지식과 기능의 습득'이라는 수학교육의 한쪽 목표의 함양 만을 추구한 결과가 되어 수학교육의 다른 목표인 '수학적 사고력 신장과 수학적 태도의 함양'은 결여 되어 있다.

이것은 수학이 오랜 역사를 통해 발전되어 왔고 지금도 발전되고 있는데, 학교수학은 그러한 수학의 발생 과정과는 무관하게 연역적인 전개 양식에 따라 전개되고 있기 때문일 것이다. 즉, 수학적 사고의 발생과 그 발전 과정은 무시되고 최종 산물인 현대 수학적 개념과 정리만을 논리적 전개 순서에 따라 제시 한 것이기 때문이다.

이러한 이유로 본 논문은 중학교 교육과정에서 근사값으로 다루어지고 있는 원주율, 제곱근의 값, 삼각비의 값에 관한 수학사와 발달 과정, 수학자들의 근사값을 구하는 방법 등 수학사적 자료를 연구함으로써 근사값의 의미와 근사값이 쓰이는 문제의 처리 등 근사값의 본질을 더욱 명확히 하고, 근사값이 사용되는 내용의 폭넓은 지도를 위한 학습자료로 삼게 하였다.

이러한 근사값에 관한 역사적인 자료들이 학생들에게 지도되어 근사값 및 근사값과 관련된 내용을 더욱 명확히 하게 하고, 또한, 이러한 사실들을 연구한 수학자들의 노력이나 생애를 통하여 학생들로 하여금 수학적 사고를 경험하게 하여 문제해결능력을 증진시켜야 할 것이다.

본 논문이 학생들을 지도하는데 보다 유용하고 효과적이고 폭넓은 학습 자료가 된다면 보다 더 기쁘게 생각한다.

參考文獻

강시중(1990), Computer나 calculator를 이용한 계산에서 오류 교정을 위한 어림셈 지도에 관한 연구, 전주교대 논문집

교육부(1994), 중학교 수학과 교육과정 해설, 대한 교과서 주식회사

구광조외(1994), 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 경문사

구장서(1994), 수학사와 관련한 중등 수학 교수-학습 지도 자료 개발 연구, 석사학위논문

권영한(1993), 재미있는 이야기 수학 , 전원문화사

김용운외(1989), 수학의 흐름, 전파과학사

김응태외(1993), 정수론, 경문사

류희찬(1992), 수학과 교육과정 개정방향에 대한 소고, 청람수학교육 제2집, 한국교원대학교, 수학교육연구소

민세영(1997), 역사발생적 원리에 따른 중등학교 수학교재 구성에 관한 연구, 서울대학교 대학원

이우영(1992), 수학사(고대 및 중세편), 경문사

이화영(1996), 만화와 함께 수학의 신비를 찾아서, 교우사

박미자(1986), 수학사적 내용의 도입을 통한 수학 교과 지도 방안, 석사 학위 논문, 충북대학교 대학원

박영훈(1994), π의 역사, 실천문학사

손영수(1990), 위대한 수학자들, 전파과학사

신 적(1995), 근사값의 지도에 관한 연구, 석사 학위 논문, 경북대학교 대학원

오동근(1992), π의 근사값에 대한 연구, 석사 학위 논문, 한남대학교 대학원

이기석(1969), 근사치와 오차에 관한 연구, 석사 학위 논문, 연세대학교 대학원

정태근(1979), 삼각함수에 관한 연구, 석사 학위 논문, 경희대학교 대학원

현종익(1996), 수학과 교수 학습 방법 탐구, 학문사.

A Study on the Teaching-Learning Materials about Approximation in Math History for the Middle School Education

Sung-bum Jho[1)]

ABSTRACT

This study is undertaken to clarify the evolution of the mathematics regarding the π ratio, square root, trigonometric ration which are dealing by approximate value according to the curriculum of Korean Middle School and its subsequent growth of methods for attaining the approximate value.

Furthermore a brief survey has been thought for assessing the significance of the core of approximate value and its utility which will be given a guide line to many young learners.

I'd better teach these historical background to the students and it makes clear the approximate value and the content about the approximate value.

This research should help to improve the student's ability of solving a problem by making them think it mathematically through the life and the effort of the mathematician.

1) Yesan Girls' Middle school, Yesan, 340-800, Korea