

확장형 완경사방정식에 기초한 Galerkin 유한요소 모형 Galerkin Finite Element Model Based on Extended Mild-Slope Equation

정원무* · 이길성** · 박우선* · 채장원*

Weon Mu Jeong*, Kil Seong Lee**, Woo Sun Park* and Jang Won Chae*

요 旨 : 본 연구에서는 지배방정식으로 확장형 완경사방정식을 사용하고 무한요소를 이용하여 방사조건을 처리하는 Galerkin 유한요소 모형을 수립하였다. 수립된 모형의 타당성과 적용성을 입증하기 위하여 Ippen and Goda (1963)의 완전개방 직사각형 모형항만에서의 항만 공진과 Sharp(1968) 및 Chandrasekera and Cheung(1997)의 원형 천뢰상을 전파하는 파랑 변형에 대한 수치해석을 실시하였다. 수리모형실험 및 복합요소 모형에 의한 결과와의 비교를 통하여 본 모형이 급경사 지형에도 매우 양호한 결과를 제시함을 확인하였다. 마지막으로 방파제의 대안으로 고려될 수 있는 원형 해저 우물을 설정하고 이를 지나는 파의 변형 특성을 검토하였다.

핵심용어 : 확장형 완경사방정식, Galerkin 유한요소 모형, 무한요소, 급경사 원형 천뢰

Abstract □ A Galerkin's finite element model incorporating infinite elements for modeling of radiation condition at infinity has been developed, which is based on an extended mild-slope equation. To illustrate the validity and applicability of the present model, the example analyses were carried out for a resonance problem in the rectangular harbor of Ippen and Goda (1963) and for wave transformations over circular shoals of Sharp (1968) and Chandrasekera and Cheung (1997). Comparisons with the results obtained by hydraulic experiments and hybrid element method showed that the present model gives very good results in spite of the rapidly varying topography. Numerical experiments were also performed for wave transformations over a circular concave well which may be an alternative to conventional wave barriers.

keywords : extended mild-slope equation, Galerkin finite element model, infinite element, circular shoal with steep slope

1. 서 론

Berkhoff(1972)에 의해 처음으로 제안된 완경사방정식은 지금까지 천해역에서의 파의 굴절·회절 계산에 널리 사용되어 왔다. 이 완경사방정식은 파장에 비해 수심이 완만하게 변화한다는 가정하에 수심 경사의 제곱항과 곡률에 관계되는 항들을 무시한 채 유도된 것이다. 그럼에도 불구하고 수치실험 결과, 1:3의 저면

경사에 대해서도 상당히 정확한 결과를 준다고 제시(Booij, 1983)되어 다양한 형태로 이용되어 왔다. 한편, Kirby(1986) 등은 경사가 1:1을 초과하는 급격하게 변화하는 지형에서는 완경사방정식의 정밀도가 저하된다고 보고하였다.

최근, 완경사방정식의 유도시에는 무시되었던 저면 경사의 제곱과 저면 곡률에 비례하는 항들을 포함하는 확장형 완경사방정식이 Massel(1993)에 의해 제시되었

* 한국해양연구소 연안·항만공학연구센터 (Coastal and Harbor Engineering Research Center, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, Seoul 425-600, Korea)

** 서울대학교 지구환경시스템공학부 (School of Civil, Urban and Geo-Systems Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea)

다. 그는 Galerkin 고유함수법(Galerkin-eigenfunction method)을 이용하여 고차의 저면 효과항과 소멸파(evanescent mode)를 포함하는 새로운 확장형 환경사방정식을 유도하였다. 이 후 Chamberlain and Porter(1995)는 Massel(1993)처럼 고차의 저면 효과항을 포함하는 수정 환경사방정식을 제안하였으나 그들의 식에서는 소멸파의 영향이 포함되지 않았다. 한편, Suh *et al.*(1997)은 Green 공식법(Green's formula method)과 Lagrangian formulation을 이용하여 고차의 저면 효과항을 포함하는 2개의 동일한 시간의존형 확장형 환경사방정식을 유도하였다. 이 식은 단조파(monochromatic wave)에 대해서는 Chamberlain and Porter(1995)의 수정 환경사방정식으로 변환된다. Massel(1993), Chamberlain and Porter(1995) 및 Suh *et al.*(1997)의 식들은 소멸파의 영향을 무시하면 단조파에 대해서는 서로 동일하게 되며, 본 연구에서는 편의상 보다 정리된 형태로 제시된 Suh *et al.*(1997)의 확장형 환경사방정식을 사용하였다.

본 연구에서는 수치해석방법으로 유한요소법을 채용하였다. 유한요소법에 의한 해석 기법은 무한 경계면에서의 방사조건의 모형화 기법에 따라 크게 다음의 두 가지로 구분할 수 있다. 즉, 파동장을 두 개로 분리하여 내부 영역은 유한요소로 모형화하고 외부 영역은 해석적 고유함수의 급수해로 나타내어 두 영역의 정합면에서 정합조건을 도입하여 문제를 해결하는 방법(Chen and Mei, 1974; Chen, 1984; Chandrasekera and Cheung, 1997)과 외부 영역을 무한요소로 모형화하는 방법(Bettess and Zienkiewicz, 1977; Chen, 1990; Park *et al.*, 1994)을 들 수 있다.

Chen and Mei(1974)가 내부와 외부 영역의 공통 경계에서 외부 영역에서의 고유함수 해를 정합시키는 유한요소 근사를 사용하는 수치 기법을 제시한 이래 유한요소법은 항만부진동에 대한 강력한 수치해석 방법이 되어왔다. 그 후 Chen(1984, 1986)은 지배방정식으로 환경사방정식을 사용하여 모형을 확장하였으며 이는 여러 연구자들에 의해 다양하게 시험되고 실제 항만에 적용되었다(예를 들면, Crawford and Chen, 1988; Briggs *et al.*, 1992; Thompson *et al.*, 1996). Jeong *et al.*(1996)은 Chen(1986)의 모형을 항입구 손실을 고려할 수 있도록 확장하여 Lepelletier(1980)의 수리모형실험 결과와 비교하여 양호한 결과를 얻었다. 한편, 이러한 해석해를 사용하는 복합요소 모형 대신 Chen

(1990), Park *et al.*(1994)은 무한요소를 사용하여 방사조건을 처리하는 수치모형을 개발하였다. 이 모형은 Chen(1986)의 모형과는 달리 항외의 양측 해안선을 x 축과 평행하게 일직선으로 가정할 필요가 없으므로 실제 항만을 보다 효율적으로 모형화할 수 있는 장점을 지니고 있다.

본 연구에서는 지배방정식으로 확장형 환경사방정식을 채택하고 Park *et al.*(1994)의 경우와 같이 무한요소를 이용하여 방사조건을 처리하는 Galerkin 유한요소 모형을 수립하였다. 수립된 모형을 검증하기 위하여 수리모형실험 결과가 제시되어 있는 완전 개방 직사각형 모형항만에서의 항만 공진과 급경사를 가진 원형 천뢰(shoal)상의 파랑 변형에 대한 수치해석을 실시하였다. 수리 및 수치모형실험 결과의 비교를 통하여 본 수치모형이 상당히 양호한 결과를 제시함을 확인하였다. 또한, Chandrasekera and Cheung(1997)이 제안한 2가지 원형 천뢰에 대해 수치실험을 실시하고 그들의 수치계산 결과와 비교하였다. 마지막으로 항입구를 통과하는 파고를 감소시키기 위한 방파제의 대체 수단으로 Chandrasekera and Cheung(1997)의 단면과 동일한 형태의 concave well을 설정하고 이를 지나는 파의 변형 특성을 검토하였다.

2. 유한요소 수치모형

2.1 수학적 모형

본 연구에서는 경계치 문제를 수식화하기 위해 Fig. 1에 제시한 바와 같이 직교좌표계(x, y)와 원통좌표계(r, θ)를 사용하였다. 또한, 경계치 문제를 효율적으로 수식화하기 위하여 대상 영역을 항내를 포함하는 내부 영역 Ω_1 과 이를 둘러싼 외부 영역 Ω_2 로 분리하였다. 영역 Ω_1 에서는 임의의 수심을, 그리고 영역 Ω_2 에서는 일정 수심을 가정하였다. 영역 Ω_1 과 Ω_2 에서의 속도포텐셜은 입사파 속도포텐셜 ϕ_1 과 산란파 속도포텐셜 ϕ_2 로 나타낼 수 있는데 영역 Ω_1 에서는 이 속도포텐셜들이 명백하게(explicitly) 제시되지 않으므로 그들의 합인 $\phi_1 = \phi_1 + \phi_2$ 를 미지수로 하였다. 영역 Ω_2 에서는 입사파 속도포텐셜 ϕ_1 를 알고 있는 것으로 하여 $\phi_2 = \phi_2$ 를 미지수로 하였다.

파동장은 기존의 Berkhoff(1972)의 환경사방정식에 고차의 수심변화항이 추가된 다음의 확장형 환경사방정식(Massel, 1993; Suh *et al.*, 1997)을 사용하여 나타

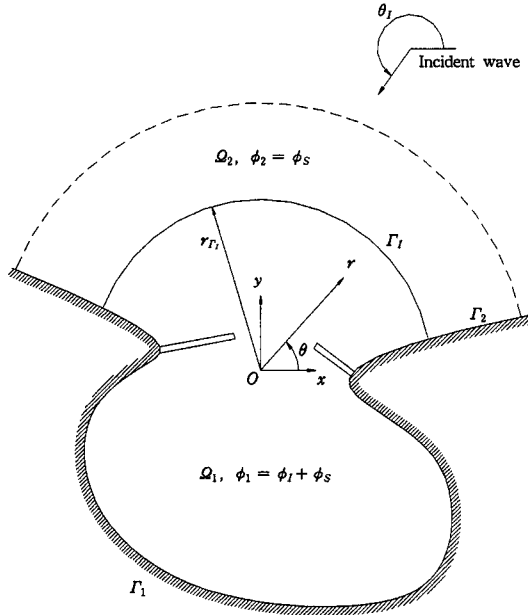


Fig. 1. Definition sketch for the boundary value problem.

내었다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi_i) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi_i - \omega^2 \{R_1 (\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h\} \phi_i = 0 \quad (1)$$

여기서, $\nabla = (\partial/\partial x)\hat{i} + (\partial/\partial y)\hat{j}$, \hat{i} , \hat{j} 는 x , y 방향 단위 벡터, ϕ_i 는 2차원 공간 속도포텐셜로 $i=1$ 은 내부 영역을, $i=2$ 는 외부 영역을 나타낸다. 또, C 는 파속, C_g 는 군속도, ω 는 각주파수를 나타내며, R_1 과 R_2 는 각각 해저면 경사의 제곱과 곡률에 관련하는 계수로 다음과 같이 파수와 수심의 함수로 주어진다(Suh et al., 1997).

$$R_1 = \frac{1}{\cosh^2 kh} \cdot (W_1 I_1 + W_2 I_2 + W_3 I_3 + W_4 I_4 + W_5 I_5 + W_6) \quad (2)$$

$$R_2 = \frac{1}{\cosh^2 kh} (U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3) \quad (3)$$

여기서, I_i 는 적분 형태의 식이며 W_i 와 U_i 는 각각 R_1 과 R_2 에서 I_i 에 대응되는 계수로서 이에 대한 표현은 Suh et al.(1997)에 자세하게 제시되어 있다. 식 (1)에서 R_1 과 R_2 에 관계되는 세 번째 항은 과거에는 수식 전개 복잡성 때문에 무시하였으며 이 경우 기존의 Berkhoff (1972)의 환경사방정식으로 변환된다. 한편, 파속 C 와 군속도 C_g 는 다음 식으로 주어진다.

$$C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \quad (4)$$

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (5)$$

여기서, $h(x, y)$ 는 수심, k 는 파수를 각각 나타낸다. 경사진 해안선이나 방파제 등과 같은 해안 경계는 일반적으로 파 에너지 흡수체(wave energy absorber)로서 작용한다. 파 에너지 흡수 효과를 고려하기 위하여 고체 경계면을 따라서 Mei and Chen(1975)이 제시한 부분반사 경계조건을 도입하였다. 즉, 영역 Ω_1 과 Ω_2 의 고체 경계면 Γ_1 과 Γ_2 를 따르는 다음과 같은 부분반사 경계조건을 사용하였다.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \alpha \phi_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (6a)$$

$$\frac{\partial(\phi_2 + \phi_I)}{\partial n} = \alpha(\phi_2 + \phi_I) \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (6b)$$

여기서, n 은 고체 경계면에 대한 외향 법선 벡터이며, α 는 다음 식으로 주어진다.

$$\alpha = ik \cos \theta_i \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \quad (7)$$

여기서, K_r 은 고체 경계면에서의 경험적 반사 계수이며 일반적으로 파의 주파수와 진폭 및 고체 경계면의 특성에 의존된다. θ_i 은 고체 경계면으로 입사하는 파의 법선 방향으로부터의 각을 의미하는 데 일반적으로 대상 영역 내에서는 다중 반사가 일어나므로 어떤 일정한 값으로 정의하기가 어렵다. 통상적으로 θ_i 을 0° 로 하여 계산하는 경우가 많다.

내부 영역 Ω_1 과 외부 영역 Ω_2 의 원호 경계면 Γ_I 를 따르는 다음과 같은 정합조건을 만족해야 한다.

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_I \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = - \frac{\partial(\phi_2 + \phi_I)}{\partial n} \quad (8b)$$

여기서, ϕ_1 은 내부 영역에서의 전체 속도포텐셜을 나타내며, ϕ_2 는 외부 영역 내의 속도포텐셜로 입사파의 속도포텐셜 ϕ_I 를 제외한 산란파의 속도포텐셜을 나타낸다.

한편, ϕ_2 는 무한 원방에서 다음의 방사 경계조건을 만족하여야 한다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{kr} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} - ik \phi_2 \right) = 0 \quad (9)$$

입사파가 θ_i 의 각도로 진입할 경우의 속도포텐셜 ϕ_n 는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_i = -\frac{iga_0}{\omega} e^{ikr \cos(\theta - \theta_i)} \quad (10)$$

여기서, a_0 는 입사파의 진폭을 의미한다.

2.2 유한요소 모형

2.2.1 경계치 문제의 이산화

통상적인 유한요소 해석 방법으로 유체 영역을 이산화하기 위해서는 해석 영역을 적당한 유한요소로 나타내고 각 요소 내의 미지 속도포텐셜, ϕ_i 를 요소(e)의 절점 포텐셜 벡터, $\{\phi_i^e\}$ 와 미리 규정한 보간 함수 벡터, $\{N\}$ 으로 근사하는 것이 필요하다. 즉,

$$\phi_i = \{N\}^T \{\phi_i^e\} \quad (11)$$

Galerkin의 방법을 이용하면 상기 경계치 문제는 적분 형태로 표시되는 약형(weak form)으로 치환하여 근사해를 구할 수 있다. 즉, 요소의 보간 함수 $\{N\}$ 을 가중 함수로 사용하여 다음과 같이 각 요소의 잔차(residual)를 정의한 후

$$\{R^e\} = -\int_{\Omega_1^e} \{N\} [\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi_i) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi_i - \omega^2 \{R_1(\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h\} \phi_i] d\Omega_1^e \quad (12)$$

Green의 제 2 정리를 이용하고 경계조건들을 도입하여 각 요소의 시스템 행렬을 조합한 후, 잔차를 0으로 취하면 전체 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$\sum_e^n \{([K_{\Omega_1}^e] + [K_{\Gamma_1}^e])\{\phi_i^e\} + \{F_{\Gamma_1}^e\} + \{F_{\Omega_1}^e\}\} = \{0\} \quad (13)$$

여기서, 각 요소의 시스템 행렬, $[K_{\Omega_1}^e]$, $[K_{\Gamma_1}^e]$, $\{F_{\Gamma_1}^e\}$, $\{F_{\Omega_1}^e\}$ 는 다음과 같이 각 영역에 대해서 주어진다.

- 내부 영역(Ω_1):

$$[K_{\Omega_1}^e] = \int_{\Omega_1^e} CC_g \left[\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}^T \right]$$

$$- \omega^2 \left(\frac{C_g}{C} - \{R_1(\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h\} \right) \{N\} \{N\}^T d\Omega_1^e \quad (14a)$$

$$[K_{\Gamma_1}^e] = \int_{\Gamma_1^e} CC_g \alpha \{N\} \{N\}^T d\Gamma_1^e \quad (14b)$$

$$\{F_{\Gamma_1}^e\} = \{0\} \quad (14c)$$

$$\{F_{\Omega_1}^e\} = - \int_{\Omega_1^e} CC_g \frac{\partial(\phi_2 + \phi_1)}{\partial n} \{N\} d\Gamma_1^e \quad (14d)$$

- 외부 영역(Ω_2):

$$[K_{\Omega_2}^e] =$$

$$\int_{\Omega_2^e} CC_g \left[\left\{ \frac{\partial N}{\partial r} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial r} \right\}^T + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \theta} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \theta} \right\}^T \right] - \omega^2 \left(\frac{C_g}{C} - \{R_1(\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h\} \right) \{N\} \{N\}^T d\Omega_2^e \quad (15a)$$

$$[K_{\Gamma_2}^e] = \int_{\Gamma_2^e} CC_g \alpha \{N\} \{N\}^T d\Gamma_2^e \quad (15b)$$

$$[F_{\Gamma_2}^e] = \int_{\Gamma_2^e} CC_g \left(\alpha \phi_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) \{N\} d\Gamma_2^e \quad (15c)$$

$$\{F_{\Omega_2}^e\} = - \int_{\Omega_2^e} CC_g \frac{\partial(\phi_1 - \phi_i)}{\partial n} \{N\} d\Gamma_2^e \quad (15d)$$

내부 영역은 3절점 삼각형 요소로 분할하였으며 수치 계산상의 편의를 위해 각 유한요소 내의 수심 h , 수심 경사의 제곱 $(\nabla h)^2$, 곡률 $\nabla^2 h$ 는 일정한 값을 취하였다.

2.2.2 무한 요소

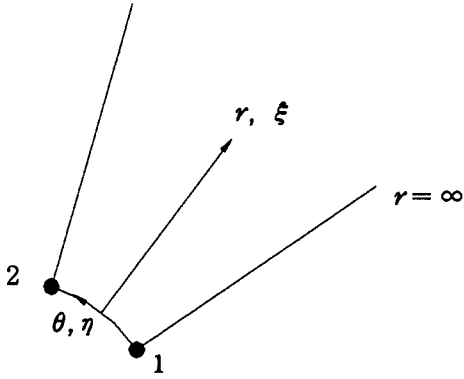
무한 원방에서의 방사조건을 효율적으로 모형화하고 외부 영역(Ω_2)의 해안선을 따른 파 에너지 흡수를 적절하게 고려하기 위하여 두 가지 무한요소를 사용하였다. Fig. 2에는 사용된 2절점 무한요소와 1절점 무한요소를 제시하였다. 2절점 무한요소는 외부 유체 영역의 이산화에 사용되며, 1절점 무한요소는 외부 영역의 해안선을 따른 에너지 흡수 효과를 모형화하는 데 사용된다.

무한요소의 형상함수는 다음 식으로 주어진다.

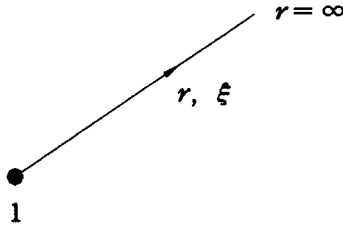
$$\{N\} = N_r(\xi) \{N_d(\eta)\} \quad \text{for } 0 \leq \xi \leq \infty, -1 \leq \eta \leq 1 \quad (16a)$$

$$\{N\} = N_r(\xi) \quad \text{for } 0 \leq \xi \leq \infty \quad (16b)$$

여기서, $\{N_d(\eta)\}$ 는 일반적인 Lagrange 형상 함수이며, $N_r(\xi)$ 는 다음 식으로 주어지는 방사상 방향의 형상 함수



(a) Two nodes infinite element.



(b) One node infinite element.

Fig. 2. Coordinate systems for infinite elements.

수이다.

$$N_r(\xi) = \frac{\sqrt{r_{\Gamma_1}}}{\sqrt{\xi + r_{\Gamma_1}}} e^{i(k - \epsilon)\xi} \quad (17)$$

여기서, ϵ 은 인위적인 감쇠 계수(artificial damping parameter)이며($\epsilon < k$), r_{Γ_1} 는 Fig. 1에 제시된 것처럼 원점으로부터 무한요소까지의 거리를 나타낸다. 인위적 감쇠 계수, ϵ 은 식 (15a)에서 방사상 방향으로의 적분을 위해 도입되었다.

인위적 감쇠 계수, ϵ 을 제외한 방사상 방향의 형상 함수 $N_r(\xi)$ 는 다음과 같이 해석적 경계 급수해에서의 제1종 Hankel 함수에 대한 점근적 표현(asymptotic expression)으로부터 유도되었다.

$$\phi_s \propto \frac{1}{\sqrt{r}} e^{ikr} \quad (18)$$

유도된 형상 함수는 무한 원방에서 방사 조건을 만족한다. Fig. 3에는 식 (16a)로 주어진 2절점 무한요소의 형상 함수를 실 좌표계(real coordinate system)에서 제

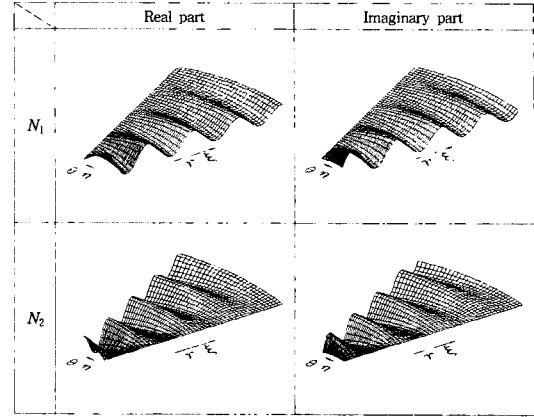


Fig. 3. Shape function of the two nodes infinite element.

시하였다.

식 (15)로 주어지는 무한요소의 시스템 행렬은 다음과 같이 해석적으로 구성할 수 있다.

$$[K_{\Omega}^e] = A_1[K_{\theta\theta}] + A_2[K_{\theta',\theta'}] - A_3[\bar{K}_{\theta\theta}] \quad (19)$$

$$[K_{\Gamma}^e] = A_4 CC_g \quad (20)$$

$$\{F_{\Gamma}^e\} = A_5 CC_g \frac{iga_0}{\omega} [ik(n_x \cos \theta_1 + n_y \sin \theta_1) - \alpha] \quad (21)$$

여기서, n_x 와 n_y 는 각각 경계 Γ_2 에 대한 외향 법선 벡터의 x 및 y 성분이며, $A_i(i=1\sim5)$ 는 식 (15)를 무한 방향으로 적분함으로써 나타나는 복소 계수들로 다음과 같이 주어진다.

$$A_1 = \frac{1}{4} - \frac{ikr_{\Gamma_1}}{2} [1 - e^{-2ikr_{\Gamma_1}} \{c_i(2kr_{\Gamma_1}) + is_i(2kr_{\Gamma_1})\}] \quad (22)$$

$$A_2 = 1 - 2ikr_{\Gamma_1} e^{-ikr_{\Gamma_1}} \{c_i(2kr_{\Gamma_1}) + is_i(2kr_{\Gamma_1})\} \quad (23)$$

$$A_3 = \frac{ir_{\Gamma_1}}{2k} \quad (24)$$

$$A_4 = -r_{\Gamma_1} e^{-2ikr_{\Gamma_1}} \{c_i(2kr_{\Gamma_1}) + is_i(2kr_{\Gamma_1})\} \quad (25)$$

$$A_5 = \sqrt{r_{\Gamma_1}} e^{-ikr_{\Gamma_1}} \sqrt{-\frac{\pi}{ik\{1 + \cos(\theta - \theta_1)\}}} \cdot [1 - E\{\sqrt{-ikr_{\Gamma_1}(1 + \cos(\theta - \theta_1))}\}] \quad (26)$$

여기서, $c_i(\cdot)$ 와 $s_i(\cdot)$ 는 다음 식으로 정의되는 cosine과 sine 적분 함수이며(Gradshteyn and Ryzhik, 1980),

$$c_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = r + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt \quad (27)$$

$$s_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (28)$$

$E(\cdot)$ 는 error function으로 다음과 같이 정의된다.

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (29)$$

그리고, γ 는 Euler 상수(=0.577216...), $\ln(\cdot)$ 는 natural logarithm이다.

한편, $[K_{\theta\theta}]$, $[\bar{K}_{\theta\theta}]$, $[K_{\theta\psi}]$ 는 각각 다음 식들로 정의된다.

$$[K_{\theta\theta}] = \int_{\theta'} CC_g \{N_{\theta}\} \{N_{\theta}\}^T d\theta' = CC_g \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\theta'}{6} \quad (30)$$

$$[\bar{K}_{\theta\theta}] = \int_{\theta'} \frac{C_g}{C} \omega^2 \{N_{\theta}\} \{N_{\theta}\}^T d\theta' = \frac{C_g}{C} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\theta'}{6} \quad (31)$$

$$[\bar{K}_{\theta\psi}] = \int_{\theta'} CC_g \left\{ \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} \right\} \left\{ \frac{\partial N_{\psi}}{\partial \theta} \right\}^T d\theta' = \frac{CC_g}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서, θ' 는 요소의 각을 나타낸다.

2.2.3 내부 및 외부 영역의 정함

내부 영역에서는 전체 속도 포텐셜이, 그리고 외부 영역에서는 산란파 속도 포텐셜이 미지수가 된다. 따라서, 내부 영역과 외부 영역의 미지 속도 포텐셜을 정함시키는 것이 필요하다. 식 (8a)의 정함 경계조건을 사용하면 전체 시스템 행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$\sum_{\epsilon}^n \{ ([K_{\Omega}^{\epsilon}] + [K_{\Gamma}^{\epsilon}]) \{\phi_{\epsilon}^{\epsilon}\} + \{F_{\Gamma}^{\epsilon}\} + \{F_{\Omega}^{\epsilon}\} \} = \{0\} \quad (33)$$

여기서,

$$[K_{\Omega}^{\epsilon}] = [K_{\Omega}^{\epsilon}], [K_{\Gamma}^{\epsilon}] \quad (34)$$

$$[K_{\Gamma}^{\epsilon}] = [K_{\Gamma}^{\epsilon}], [K_{\Omega}^{\epsilon}] \quad (35)$$

$$\{F_{\Gamma}^{\epsilon}\} = \{F_{\Gamma}^{\epsilon}\} \quad (36)$$

$$\{F_{\Omega}^{\epsilon}\} = -\int_{\Gamma} CC_g \frac{\partial \phi_I}{\partial n} \{N\} d\Gamma - ([K_{\Omega}^{\epsilon}] + [K_{\Gamma}^{\epsilon}]) \{\phi_{\epsilon}^{\epsilon}\} \quad (37)$$

여기서, $\{\phi_{\epsilon}^{\epsilon}\}$ 는 절점에 해당되는 입사파 속도 포텐셜의 벡터를 나타낸다.

3. 수치모형의 타당성 및 적용성 검토

3.1 완전 개방 직사각형 모형 항만에 대한 적용

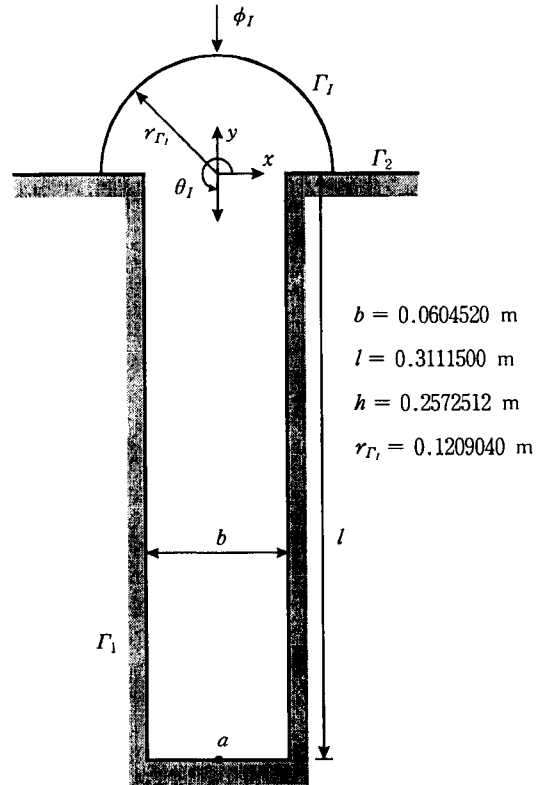


Fig. 4. Definition sketch for a fully open rectangular harbor.

본 수치모형의 무한요소를 사용한 방사조건 처리와 고체 경계면에서의 부분 반사 경계조건 처리의 타당성을 검증하기 위하여, Ippen and Goda(1963), Lee (1969)의 수리모형실험 결과가 제시되어 있는 완전히 개방된 일정 수심의 직사각형 항만에 입사하는 장주기 파의 항내 증폭 문제에 대해 적용하였다. 수심이 일정한 경우에는 기존의 환경사방정식이나 확장형 환경사방정식이 모두 동일한 결과를 제시하지만 전술한 목적 외에 프로그래밍의 오류를 찾는 목적도 포함되었다. 국내의 여러 연구자들에 의해 수치모형의 타당성 검토에 사용된 바 있는 이 모형 항만은 Fig. 4에 제시된 것처럼 폭 0.060452 m, 길이 0.31115 m이며 수심은 내부와 외부 영역 모두 0.2572512 m로 일정하다.

항입구의 중앙에 설정된 원점으로부터 외부 영역까지의 거리 r_{Γ} 로는 $2b$ 를 사용하였다. 유한요소망도는 수치계산에서 고려한 가장 짧은 주기인 약 0.4초의 파의 파장에 약 24개의 요소가 포함되도록 구성하였다. 그 결과 내부 영역은 567개의 절점과 994개의 요소로 구성되었으며 외부 영역은 42개의 2절점 무한요소와

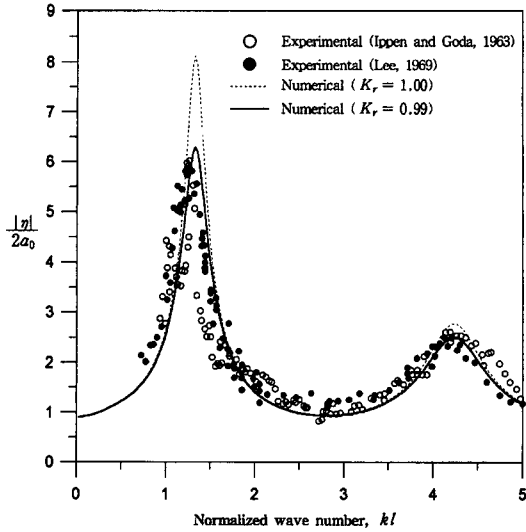


Fig. 5. Comparison of response curves between experimental and numerical results.

2개의 1절점 무한요소로 구성되었다.

항입구에 대해 수직으로 입사(x 축에 대해 반시계방향으로 270°)하는 파에 대해 항의 가장 내측 중앙점 a ($0.0, -0.31115$)에서의 증폭비를 재현하여 수리모형실험 결과와 비교하였다. Fig. 5에는 항의 내측 중앙점(a)에서의 증폭비에 대한 수리모형실험 및 수치모형실험 결과를 비교한 것이다. 그림에서 횡축은 파수 k 에 항의 길이 l 을 곱한 무차원 파수 kl 이며, 종축은 수면 변위폭 $|\eta|$ 를 증폭파의 진폭($2a_0$)으로 나눈 증폭비 $|\eta|/(2a_0)$ 를 나타낸다. 수치계산은 무차원 파수 $kl=0.025\sim 5$ 까지 0.025의 간격으로 실시되었다. Fig. 5를 살펴보면 공진이 출현하는 주파수나 증폭비에 대한 수리 및 수치모형실험 결과가 잘 일치하여 본 연구에서 사용한 무한요소에 의한 방사조건의 처리가 적절함을 알 수 있다. 또한, 고체 경계면에서의 반사율 K 로 1.0과 0.99을 사용한 수치실험 결과 $K=0.99$ 의 경우가 수리모형실험 결과에 보다 접근하였다.

3.2 Sharp(1968)의 원형 천뢰에의 적용

확장형 환경사방정식을 사용한 본 수치모형의 적용성을 검토하기 위하여 수리모형실험 결과가 제시되어 있는 원형 천뢰(circular shoal)상의 파랑 전파 문제에 적용하였다. Sharp(1968)는 원형 천뢰상의 파랑 전파에 대한 수리모형실험 결과를 제시하였으며, Williams *et al.*(1980)은 이 결과와 환경사방정식을 사용한 수치

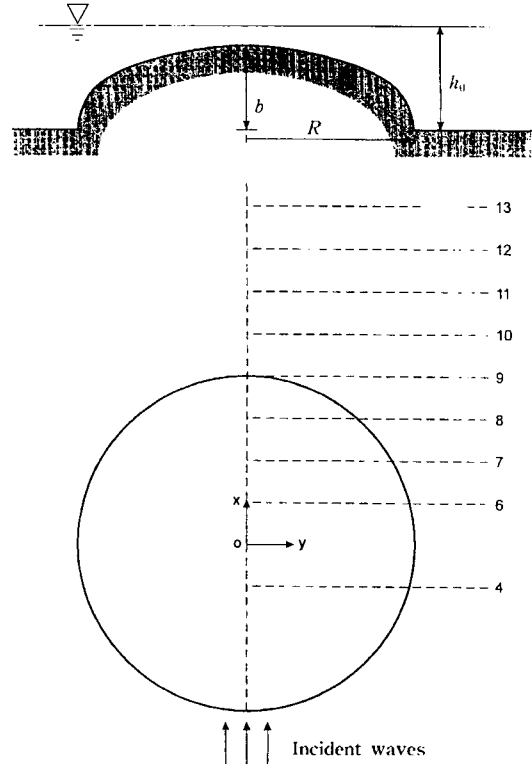


Fig. 6. Schematic sketch of experimental set up of Sharp (1968).

모형실험 결과를 비교하였다. 천뢰의 형태는 Fig. 6에 제시한 바와 같으며 이 그림에 표시된 4, 6~13의 측정 단면들은 $R/4$ 의 등간격으로 설정되었다. 한편, 천뢰상의 파장, L 과 천뢰 주변의 일정 수심 $h_0(=0.3048\text{ m})$ 에 대한 파장, L_0 사이에는 다음 관계식이 성립한다 (Chandrasekera and Cheung, 1997).

$$\frac{L}{L_0} = 0.3 \frac{r}{R} + 0.698585 \quad (38)$$

여기서, R 은 천뢰의 반경, r 은 천뢰의 중심으로부터의 거리를 각각 나타낸다. Fig. 6에서 $b(=0.245872\text{ m})$ 는 천뢰의 높이를 나타낸다. Sharp(1968)는 $kh_0=3.093066(T=0.63\text{ s}$ 로 고정)에 해당되는 입사파 조건에 대해 수리실험을 실시하였다. 수리실험에 사용된 입사파고는 파랑 경사가 $0.0041\sim 0.0205$ 로 아주 완만한 경우였다.

천뢰를 중심으로 반경이 $3R$ 인 원형 영역을 유한요소 영역으로 설정하고 유한요소망은 가장 천수심에서 주기 0.63초인 파의 파장에 대해 10개 이상의 요소가 포함되도록 구성하였다. 그 결과, 내부 영역은 7,742개

의 절점과 15,165개의 유한요소로 구성되었으며 외부 영역은 317개의 2절점 무한요소로 구성되었다.

천뢰상의 종단방향 중심 단면을 따른 무차원 입사파 진폭을 Fig. 7(a)에, 그리고 횡단방향 단면 X4, X9 및 X11에 대한 무차원 입사파 진폭을 Fig. 7(b)~(d)에 각각 제시하였다. 각 그림에서 ●은 Sharp(1968)의 실험 결과, 점선은 환경사방정식을 사용한 수치계산 결과, 그리고 실선은 확장형 환경사방정식에 의한 결과를 각각 나타낸다.

먼저, 종축을 따른 파고비 변화에 대한 Fig. 7(a)를 살펴보면 파고비의 최대치가 나타나는 천뢰가 끝나는 지점을 전후하여 환경사방정식과 확장형 환경사방정식에 의한 결과가 서로 다른 경향을 보임을 알 수 있다. 천뢰 상에서는 양자의 결과가 모두 수리모형실험 결과와 비슷하지만 천뢰를 지난 후에는 확장형 환경사방정식에 의한 결과가 보다 수리모형실험 결과에 근접함을 알 수 있다. 천뢰의 정점보다 앞에 위치한 단면

X4에서의 파고비 분포를 제시한 Fig. 7(b)의 경우에도 환경사방정식과 확장형 환경사방정식에 의한 결과는 서로 차이를 나타내었다. 수리모형실험 결과와 비교해보면, 천뢰 상에서는 후자가, 그리고 그 외측에서는 전자가 보다 수리모형실험 결과에 근접하였다. Fig. 7(c)에는 천뢰가 끝나는 지점에 설정된 단면 X9에서의 파고비 분포를 제시하였는데 이를 살펴보면, 종축 주변에서는 확장형 환경사방정식에 의한 결과가 실험 결과에 가까우나 0.4R을 지나서는 환경사방정식에 의한 결과가 더 양호하다. 이러한 경향은 section X11에서의 파고비 분포를 제시한 Fig. 7(d)의 경우에도 유사하게 나타난다.

환경사방정식에 의한 결과가 확장형 환경사방정식에 의한 결과보다 부분적으로 실험치에 근접하게 나타난 현상에 대한 설명은 현재로서는 명확하게 제시하기가 어렵다. 다만, 통상적으로 수리모형실험에 수반되는 오차(측정 및 분석, 모형 제작, 수심 재현, 측면 경

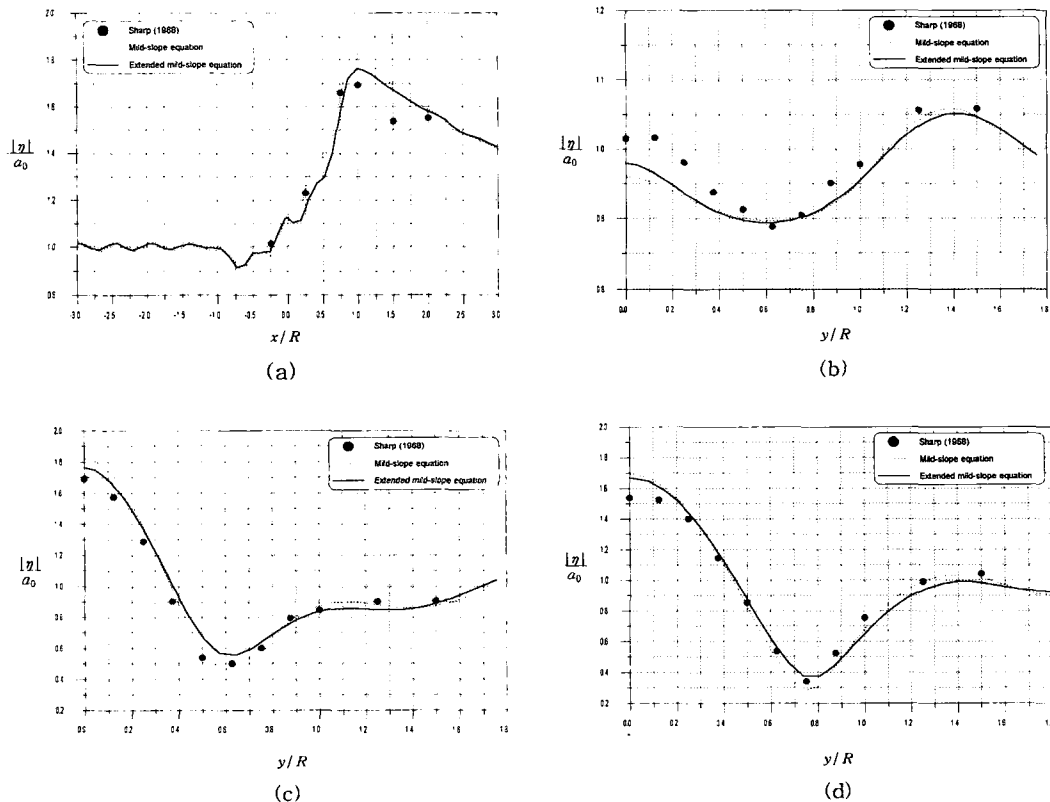


Fig. 7. Comparison of computed wave amplitudes with experimental results of Sharp(1968) and numerical results by mild slope equation and extended mild-slope equation for $kh_0=3.0$: (a) Longitudinal section; (b) Section 4; (c) Section 9 (d) Section 11.

계조건 등에서 야기되는 오차)에 의한 영향을 받았을 것이라는 점과 소멸파를 제외한 확장형 환경사방정식을 사용한 점 등이 중요한 역할을 하였을 것으로 추측할 수 있다. 확장형 환경사방정식을 복합요소법으로 풀 Chandrasekera and Cheung(1977)의 결과에서도 이러한 경향을 찾아볼 수 있다.

한편, 이 수리모형실험 결과는 Panchang *et al.*(1990)이 그들의 EVP 모형의 검증에 사용한 바 있다. 최대 파고비를 비교해보면 Panchang *et al.*(1990)이 1.89, Chandrasekera and Cheung(1997)이 1.77, 그리고 본 수치모형이 1.76을 제시하여 확장형 환경사방정식을 사용한 계산치가 실험치인 1.7에 보다 근접하였다.

3.3 Chandrasekera and Cheung(1997)의 원형 천뢰에 대한 적용

Chandrasekera and Cheung(1997)은 확장형 환경사방정식에서 고차항의 상대적인 효과와 중요성을 보다 자세하게 검토하기 위하여 다음과 같이 수심이 표현되는 새로운 모형 천뢰를 도입하였다.

$$h = h_0 - b \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \quad (39)$$

여기서, b 는 천뢰의 높이, r 은 천뢰의 중심으로부터의 거리, R 은 천뢰의 반경을 각각 나타낸다. 천뢰상의 수심을 2차식으로 정의하였기 때문에 곡률은 $\nabla^2 h = 4b/R^2$ 로 일정하며 경사의 제곱항(∇h)²은 $r=0$ 에서의 0에서 $r=R$ 에서의 $4b^2/R^2$ 사이에서 분포한다. 천뢰의 형태는 Chandrasekera and Cheung(1997)과 동일하게 2가지를 고려하였으며 Fig. 8에 그 단면을 제시하였다. Fig. 8에서 점선으로 표시한 것이 앞에서 실험한 Sharp(1968)의 천뢰 단면이며 굵은 실선이 Chandrasekera and

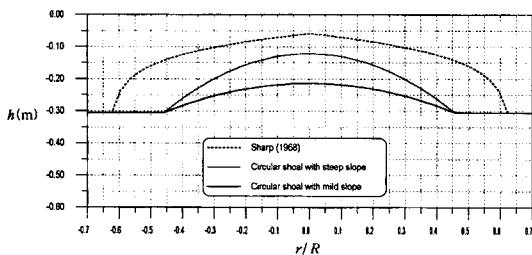


Fig. 8. Cross-section of circular shoals suggested by Sharp (1968), Chandrasekera and Cheung (1997).

Cheung(1997)의 경사가 완만한 천뢰, 그리고 가는 실선이 경사가 급한 천뢰의 단면을 각각 나타낸다. 경사가 완만한 천뢰의 경우 $b/R=0.2$ 와 $b/h_0=0.3$ 이, 그리고 경사가 급한 천뢰의 경우 $b/R=0.4$ 와 $b/h_0=0.6$ 이 각각 사용되었다.

이 경우에도 천뢰를 중심으로 반경이 3R인 원형 영역을 유한요소 영역으로 설정하고 3절점 삼각형 유한요소를 사용하되 경사가 급한 천뢰의 가장 천수심에서 주기 0.64114초($b/R=0.4$, $b/h_0=0.6$ 및 $kh_0=3.0$ 인 경우에 해당됨)인 파의 파장에 대해 14개 이상의 요소가 포함되도록 하였다. 내부 영역은 4,385개의 절점과 8,530개의 유한요소로 구성되었으며 외부 영역은 238개의 2절점 무한요소로 구성되었다.

천뢰상을 전파하는 파고의 변형을 환경사방정식과 확장형 환경사방정식에 의한 모형으로 계산하고 확장형 환경사방정식을 복합요소법으로 풀 Chandrasekera and Cheung(1997)의 결과와 비교하였다. 입사파의 주

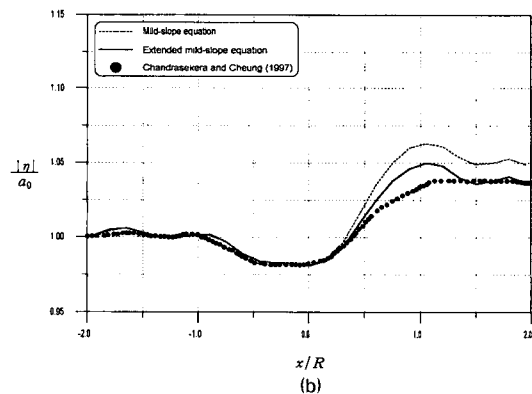
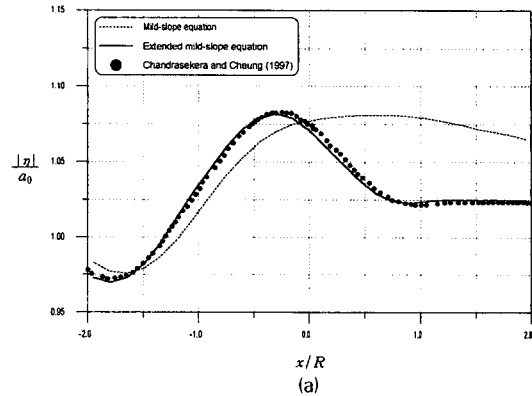


Fig. 9. Wave amplitudes over a circular shoal with mild slope calculated by mild-slope equation and extended mild-slope equation: (a) $kh_0=1.0$; (b) $kh_0=3.0$.

기로는 $kh_0=1.0$ 과 3.0 에 해당되는 2가지 조건을 고려하였다. 전술한 2개 단면의 천뢰에 대해 입사파의 입사 방향으로 천뢰의 중심선을 따라 계산된 진폭과 입사파 진폭과의 비를 결과로서 제시하였다.

Fig. 9는 경사가 완만한 천뢰($b/R=0.2, b/h_0=0.3$)에 대한 결과를 제시한 것으로서 9(a)는 $kh_0=1.0$ 인 경우, 그리고 9(b)는 $kh_0=3.0$ 인 경우를 각각 나타낸다. 이 천뢰의 높이는 수심에 비해 상대적으로 낮아서 계산된 파고 변화도 고려한 주기에 관계없이 상당히 작음을 알 수 있다. 그러나, 확장형 완경사방정식에 의한 경우 천뢰 후면의 파고비가 완경사방정식에 의한 경우와 매우 다르게 나타나며 이러한 경향은 주기가 보다 긴($kh_0=1.0$) 경우가 보다 분명하였다. 한편, 그림에서 알 수 있듯이 $kh_0=1.0$ 로 주기가 긴 경우에는 본 모형과 Chandrasekera and Cheung(1997)의 모형에 의한 결과에 거

의 차이가 없었으나 $kh_0=3.0$ 인 경우에는 천뢰의 가장자리 부근에서 약간의 차이를 보였다.

복합요소법에 의한 모형과 유한요소를 사용한 수치 모형은 본 수치실험들과 같이 천뢰를 제외한 영역에서는 수심이 일정한 경우에는 결과가 거의 동일하여야 한다. 따라서, 이러한 차이는 사용한 요소의 크기, 복합요소법에서 사용한 무한급수항의 수(장주기파의 경우에는 8개로 충분하나 본 연구와 같은 단주기파의 경우에는 크게 증가하며 Chandrasekera and Cheung(1997)이 $kh_0=3.0$ 의 경우에도 $kh_0=1.0$ 인 경우와 동일한 개수의 무한급수를 사용하였을 가능성이 있음. Thompson *et al.*, 1996 참조) 등에서 기인되었을 가능성이 크다.

Fig. 10은 보다 경사가 급한 천뢰($b/R=0.4, b/h_0=0.6$)에 대한 결과를 제시한 것으로서 10(a)는 $kh_0=1.0$ 인 경우, 그리고 10(b)는 $kh_0=3.0$ 인 경우에 대해 계산된 파고비를 각각 나타낸다. 이 경우는 기대한 바와 같이 경사가 완만한 천뢰의 경우보다 파의 변형이 보다 심하게 나타난다. 한편, 경사가 완만한 천뢰의 경우와 비슷하게 확장형 완경사방정식과 완경사방정식에 의한 경우의 천뢰 후면의 파고비가 서로 매우 다르게 나타나며 역시 주기가 긴 경우에 이러한 경향이 보다 분명하였다. 또한, 이 경우에도 $kh_0=1.0$ 로 주기가 긴 경우에는 본 모형과 Chandrasekera and Cheung(1997)의 모형에 의한 결과에 거의 차이가 없었으나 $kh_0=3.0$ 인 경우에는 천뢰의 가장자리 부근에서 약간의 차이를 보였다.

수치계산 결과를 검토해보면 전반적으로 확장형 완경사방정식에 의한 경우가 완경사방정식에 의한 경우보다 천뢰 후면에서의 파고가 감소한다. 이러한 경향은 Fig. 7에 제시된 수리모형실험 및 수치실험 결과와도 일치하며 확장형 완경사방정식에 포함된 수심 고차항이 파의 굴절에 영향을 미쳐서 발생된 것으로 판단된다.

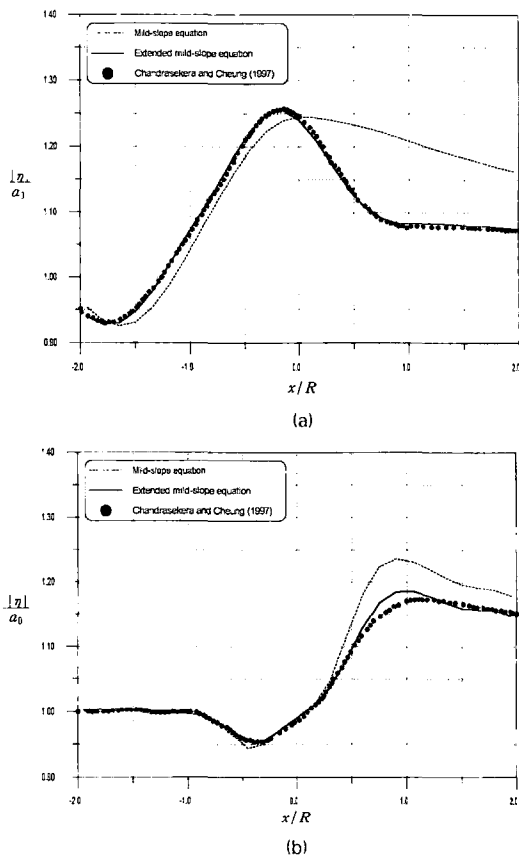


Fig. 10. Wave amplitudes over a circular shoal with steep slope calculated by mild-slope equation and extended mild-slope equation: (a) $kh_0=1.0$; (b) $kh_0=3.0$.

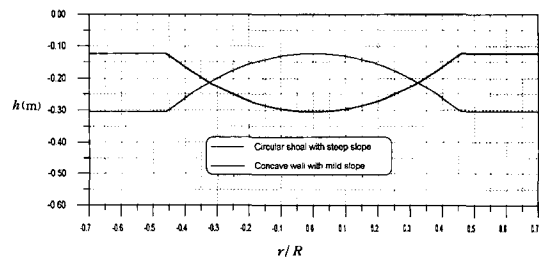


Fig. 11. Cross-section of circular shoal and concave well.

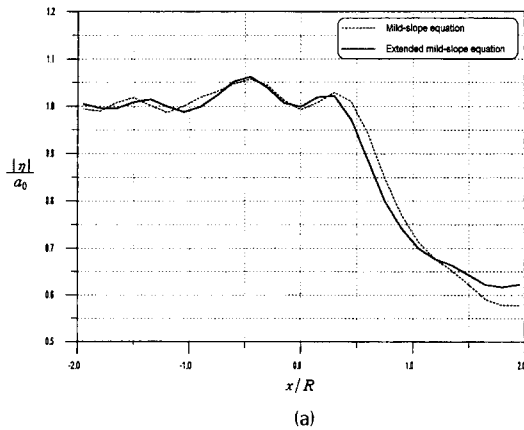


Fig. 12. Wave amplitudes over a circular concave well with steep slope calculated by mild-slope equation and extended mild-slope equation for waves of $kh_0=3.0$.

3.4 Circular Concave Well에 대한 적용

천뢰 후면의 파고가 증대되는 점을 감안하면 해저 우물(concave well) 후면에서는 파고의 감쇠를 기대할 수 있다. 방파제 건설비가 매우 고가이며 경우에 따라서는 방파제의 연장 또는 신설이 곤란한 점을 감안하면 이러한 concave well 또는 trench를 이용한 파고 감쇠의 대책안(countermeasure)도 고려해볼 수 있다. 본 연구에서는 Fig. 11에 제시한 것처럼 Chandrasekera and Cheung(1997)의 경사가 급한 천뢰와 동일한 형태의 concave well을 가정하고 이를 지나는 파의 변형을

검토하였다. 사용한 요소망도는 Chandrasekera and Cheung(1997)의 천뢰의 경우와 동일하며 입사파의 주기는 보다 큰 파고 감쇠가 예상되는 $kh_0=3.0$ 인 경우를 고려하였다.

Fig. 12는 $kh_0=3.0$ 인 경우에 대해 입사파의 입사 방향으로 concave well의 중심선을 따라 계산된 파고비를 나타낸다. 예상한 대로 concave well을 지난 지점에서 파고비가 0.6 부근으로 감소하며 확장형 환경사방정식에 의한 경우의 파고비가 약간 더 크게 나타났다. Fig. 10(b)에 보인 원형 천뢰의 경우와 비교해보면 반대의 현상이 발생되었음을 알 수 있다. 이는 고차항의 영향이 원형 천뢰의 경우와는 반대 방향으로 작용하였음을 의미하는 것으로 볼 수 있다. 또, 간접적으로 부호가 항상 양인 $(\nabla h)^2$ 보다는 부호가 변하는 $\nabla^2 h$ 가 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

Fig. 13에는 파고비 등치선도를 제시하였는데 여기서 점선은 concave well의 가장자리를 나타낸다. 이 그림을 살펴보면 concave well의 바로 후면에서는 파고비가 0.6~0.65인 지역이, 그 좌우에는 파고비가 1.2 정도인 지역이 나타나고 있다. 비록 파고비가 낮은 지역이 concave well의 폭에 비해 좁기는 하지만(파고비가 0.7인 지역의 폭이 well 폭의 40% 정도) 경우에 따라서는 방파제의 대체 수단으로 사용이 가능할 것으로 생각된다.

4. 결론 및 토의

본 연구에서는 확장형 환경사방정식을 지배방정식으로 사용하고 무한요소를 이용하여 방사조건을 처리하는 Galerkin 유한요소 모형을 수립하였다. 수립된 모형을 사용하여 수리모형실험 결과가 존재하는 모형항만과 천뢰에 대한 수치실험을 실시, 양자를 비교함으로써 본 수치모형의 타당성을 검증하였다. 본 연구를 통해 얻어진 주요 결론 및 토의 사항을 아래에 정리하였다.

- Ippen and Goda(1963) 및 Lee(1969)가 수리모형실험을 실시한 완전개방 직사각형 모형항만에 적용하여 양자간의 양호한 일치를 확인함으로써 무한요소를 사용한 부분반사 경계조건 및 방사조건 처리에 대한 본 수치모형의 타당성을 검증하였다.

- Sharp(1968)의 원형 천뢰에 대한 수리모형실험 결과와의 비교를 통하여 확장형 환경사방정식의 환경사

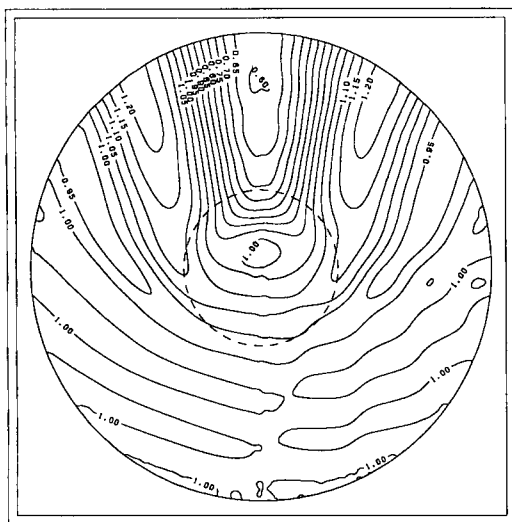


Fig. 13. Wave amplitude ratio contours around circular concave well.

방정식에 대한 상대적인 정확성을 확인하였다. 한편, 부분적으로 환경사방정식에 의한 결과가 수리모형실험 결과에 더 근접하였다. 그 원인으로는 Sharp(1968)가 실시한 수리모형실험에 내재된 오차와 확장형 환경사방정식에서 무시한 소멸파의 영향 등을 들 수 있지만 보다 명확한 원인 규명이 요구된다.

- Chandrasekera and Cheung(1997)이 제안한 2가지 형태의 원형 천뢰에 대해 2가지 주기를 사용한 수치실험을 실시한 결과 확장형 환경사방정식과 환경사방정식에 의한 경우의 천뢰 후면의 파고비가 매우 다르게 나타나며 이러한 경향은 주기가 보다 긴 경우가 보다 분명하였다.

- Concave well에 대한 수치실험을 통하여 경우에 따라서는 이의 설치가 방파제의 대체 수단이 될 수 있음을 확인하였다. 단, concave well 후면에 파고가 감쇠되는 지역의 폭이 좁으므로 이의 적용은 포항신항과 같이 파향이 연중 일정한 지역으로 제한될 것으로 사료된다. 또한, 실제 해역을 대상으로 하는 경우 여러 가지 주기와 concave well의 형태에 대한 다양한 수치실험과 매몰 방지에 대한 대책도 요구된다.

사 사

본 연구는 한국해양연구소의 기관고유사업인 “연안방재 구조물의 설계기술 개발” 연구사업의 수행 결과의 일부임을 밝힙니다.

참고문헌

- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. 13th Coastal Engrg. Conf.*, ASCE, pp. 471-490.
- Bettes, P. and Zienkiewicz, O.C., 1977. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, *Int. J. Numerical Methods in Engrg.*, **11**, pp. 1271-1290.
- Booij, N., 1983. A note on the accuracy of the mild-slope equation, *Coastal Engrg.*, **7**, pp. 191-203.
- Briggs, M.J., Lillycrop, L.S. and McGehee, D.D., 1992. Comparison of model and field results for Barbers Point Harbor, *Proc. Coastal Engrg. Practice 92*, ASCE, Long Beach, CA., pp. 387-399.
- Chamberlain, P.G. and Porter, D., 1995. The modified mild-slope equation, *J. Fluid Mech.*, **291**, pp. 393-407.
- Chandrasekera, C.N. and Cheung, K.F., 1997. Extended linear refraction-diffraction model, *J. Waterways, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, **123**(5), pp. 280-296.
- Chen, H.S., 1984. Hybrid element modeling of harbor resonance, *4th Int. Conf. on Applied Numerical Modeling*, pp. 312-316.
- Chen, H.S., 1986. Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering, *Applied Ocean Res.*, **8**(2), pp. 99-104.
- Chen, H.S., 1990. Infinite elements for water wave radiation and scattering, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, **11**, pp. 555-569.
- Chen, H.S. and Mei, C.C., 1974. Oscillations and wave forces on an offshore harbor, *Report 190*, R.M. Parsons Lab. for Water Resources and Hydrodynamics, MIT, Cambridge, MA.
- Crawford, P.L. and Chen, H.S., 1988. Comparison of numerical and physical models of wave response in a harbor, *Miscellaneous Paper CERC-88-11*, U.S. Army Engrg. Waterway Experiment Station, Vicksburg, MS.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., 1980. *Table of integral, series, and products*, Academic Press, New York.
- Ippen, A.T. and Goda, Y., 1963. Wave induced oscillations in harbor: The solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, *Report 59*, Hydrodynamic Laboratory, MIT.
- Jeong, W.M., Chae, J.W., Park, W.S. and Jung, K.T., 1996. Field measurements and numerical modeling of harbor oscillations during storm waves, *Proc. 25th Coastal Engrg. Conf.*, ASCE, Orlando, FL., pp. 1268-1278.
- Kirby, J.T., 1986. A general wave equation for waves over rippled bed, *J. Fluid Mech.*, **162**, pp. 171-186.
- Lee, J.J., 1969. Wave induced oscillations in harbors of arbitrary shape, *Report KH-R-20*, W.M. Keck Lab. of Hydrodynamics and Water Resources, California Institute of Technology, Terminal Island, CA., 266p.
- Lepelletier, T.G., 1980. Tsunamis - Harbor oscillations induced by nonlinear transient long waves, *Report No. KH-R-41*, W.M. Keck Lab. of Hydrodynamics and Water Resources, California Institute of Technology.
- Massel, S.R., 1993. Extended refraction-diffraction equation for surface waves, *Coastal Engrg.*, **19**, pp. 97-126.

- Mei, C.C. and Chen, H.S., 1975. Hybrid-element method for water wave, *Proc. Symp. on Modeling Techniques*, San Francisco, CA.
- Panchang, V.G., Wei, G., Pearce, B.R. and Briggs, M.J., 1990. Numerical simulation of irregular wave propagation over shoal, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, **116**(3), pp. 324-340.
- Park, W.S., Chun, I.S. and Jeong, W.M., 1994. Infinite element for the analysis of harbor resonances, *J. Korean Soc. of Coastal and Ocean Engrs.*, **6**(2), pp. 139-149.
- Sharp, W.A., 1968. Water wave refraction over a submerged shoal, MEng. Thesis, University of Liverpool.
- Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S., 1997. Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography, *Coastal Engrg.*, **32**, pp. 91-117.
- Thompson, E.F., Chen, H.S. and Hadley, L.L., 1996. Validation of numerical model for wind waves and swell in harbors, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, **122**(5), pp. 245-257.
- Williams, R.G., Darbyshire, J. and Holmes, P., 1980. Wave refraction and diffraction in a caustic region: a numerical solution and experimental validation, *Proc. Inst. Civ. Engrs.*, Part 2, **69**, pp. 635-649.