

타원접촉의 탄성유체윤활 제1보-윤활유의 유입방향이 Hertz 접촉타원의 장축방향인 경우

박태조 · 현준수*

경상대학교 기계공학과, 항공기부품 기술연구센터
*FAG한화베어링

An Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts Part I: Direction of Lubricant Entrainment Coincident with the Major Axis of the Hertzian Contact Ellipse

Tae-Jo Park and Jun-Soo Hyun*

Department of Mechanical Engineering and ReCAPT Gyeongsang National University
*FAG Hanwha Bearings Corporation

Abstract—This paper presents a study of the elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts where lubricant entrainment coincides with the major axis of the Hertzian contact ellipse. A finite difference method and the Newton-Raphson method are applied to analyze the problem. Film contours and pressure distributions are compared with the results for lubricant entrainment coincides with the minor axis. Variations of the minimum and central film thicknesses with the radius ratio are also examined. The results showed that the present numerical scheme can be used generally in the analysis of the EHL of elliptical contacts where the lubricant entraining vector did not coincide with either of the principal axis of the conjunction.

Key words—EHL, elliptical contacts, major axis entrainment, numerical analysis, FDM, Newton-Raphson method.

1. 서 론

기계를 구성하는 필수부품인 구름베어링(rolling bearing), 기어, 캠(cam) 등의 운전중 파손은 대부분이 부적절한 윤활에 기인한다. 따라서, 이러한 기계요소가 오랜 시간 동안에 성공적으로 운전되기 위해서는 적절한 윤활설계와 함께 윤활기구에 대한 정확한 이해가 필수적이다. 탄성유체윤활(elastohydrodynamic lubrication : EHL)이라고 알려져 있는 집중하중을 받는 기계요소에서의 윤활에 대한 이해와 연구는 트라이볼로지 분야에서 20세기에 이룩한 가장 큰 발전중의 하나이다. EHL의 특징은 유막내에서 발생하는 아주 높은 압력에 의하여 윤활유의 점도가 급격하게 증

가함과 동시에 윤활면이 탄성변형되는 점이다. 이러한 복합적인 작용의 결과로서 집중하중상태로 상대운동을 하는 기계요소의 두 면이 아주 얇은 유막으로서로 분리될 수 있는 것이다.

Dowson과 Higginson[1]에 의하여 선접촉의 EHL 문제에 대한 최초의 수치해석결과가 제시된 이후, 지난 30여년 동안 이 분야에 대한 집중적인 연구가 수행되었다. 특히, 타원접촉의 EHL 문제는 볼베어링, 구형(spherical) 로울러베어링 및 대부분의 기어 등에서와 같이 실제로 많이 발생하지만 지배방정식의 차원 증가에 따른 수치해석상의 어려움 때문에 1970년대 중반이후에야 해석이 가능하게 되었다. Hamrock과 Dowson[2]은 반복법(iteration method)을 사용하여 윤

활유가 Hertz 접촉타원의 단축(minor axis)방향으로 유입되는 EHL 문제의 수치해석을 성공적으로 수행함과 아울러 실제조건에서 적용할 수 있는 유막두께식을 제시하였다. Park과 Kim[3]은 동일한 문제를 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하여 수치해석한 결과, 참고문헌[2]의 경우와는 달리 수치해석과정이 완전히 체계적일 뿐만 아니라 압력분포와 유막형상이 물리적으로도 타당함을 보였다. 특히, 참고문헌[4]에서는 접촉중앙부의 유막두께는 정확도가 떨어지는 유막두께자료를 사용한 참고문헌[2]의 결과와 상당한 차이가 있음을 밝히고 일반적인 타원접촉 EHL 문제에 적용할 수 있는 정확한 유막두께식을 구하기 위해서는 추가적인 연구의 필요성을 제기하였다.

한편, 각종 로울러베어링의 로울러와 리브(rib) 사이, 헬리칼(helical) 및 스파이럴 베벨(spiral bevel) 기어, 거칠기(asperity)가 길이방향으로 배열된 micro-EHL 문제 등에서는 Hertz 접촉타원의 장축(major axis)방향으로 윤활유가 유입된다. Chittenden 등[5]은 참고문헌[2]의 방법을 사용하여 윤활유의 유입방향이 접촉타원의 장축방향인 경우와 함께 임의방향인 경우에 대해서도 수치해석하였다. 그러나, 이들이 제시한 EHL 유막두께식으로 예측한 유막두께와 일부조건에 대한 실험결과[6]와의 상당한 차이는 수치해석결과의 정확성에도 상당한 원인이 있을 것으로 추정되므로 이에 대한 연구가 요구되었다.

따라서, 본 논문에서는 일반적인 조건의 타원접촉 EHL 문제에 적용할 수 있는 정확한 유막두께식을 구하기 위한 연구의 일부으로서 윤활유가 접촉타원의 장축방향으로 유입되는 경우의 EHL 문제를 우선적으로 수치해석하고자 한다. 이를 위하여 지금까지 3차원 EHL 문제의 해석에 적용된 수치해석방법중에서 해석과정이 가장 체계적이며 결과가 물리적으로 타당하다고 알려져 있는 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법[3-4,7-8]을 적용하고 해석결과를 기존의 연구결과와 비교하고자 한다.

2. 지배방정식

Fig. 1과 같이 윤활유가 Hertz 접촉타원의 장축방향으로 유입되는 경우에 대한 레이놀즈 방정식은 다음식과 같다.

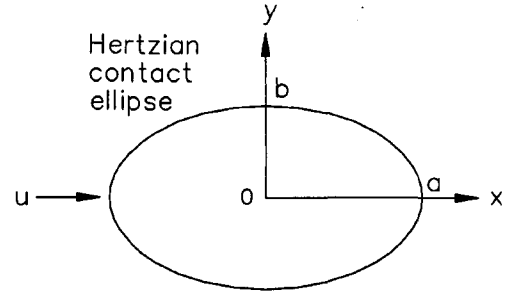


Fig. 1. Contact ellipse and coordinate system.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial(\bar{\rho} h)}{\partial x} \quad (1)$$

여기서, u 는 타원체의 구름방향 평균속도이다.

EHL 상태에서 윤활유의 점도와 밀도는 다음의 식(2)와 식(3)으로 각각 표현된다[1].

$$\bar{\eta} = \eta_o \exp\{[\ln(\eta_o) + 9.67] \{-1 + (1 + 5.1 \times 10^{-9} p)^2\}\} \quad (2)$$

$$\bar{\rho} = \rho_o \left[1 + \frac{0.58 \times 10^{-9} p}{1 + 1.68 \times 10^{-9} p} \right] \quad (3)$$

여기서, p 와 η_o 의 단위는 각각 [Pa], [Pa·s]이다.

한편, EHL 상태에서의 유막두께는 다음식과 같이 정의할 수 있다.

$$h = h_o + h_g + h_d \quad (4)$$

여기서, h_o 는 상수이고, h_g 는 주곡률반경이 R_x, R_y 인 타원체의 형상에 의한 유막으로서 다음의 식(5)와 같이 표현되며 발생압력에 의한 탄성변형량인 h_d 는 참고문헌[3-4,7-8]에서와 동일한 방법으로 구할 수 있다.

$$h_g = \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \quad (5)$$

유막내에서 발생하는 유체압력의 합은 타원체에 작용하는 하중과 일치하므로 다음식과 같이 나타내어진다.

$$w = \iint p \, dx \, dy \quad (6)$$

3. 무차원화

간편한 수치해석과 효율적인 결과정리를 위하여 다음과 같은 무차원변수들을 도입한다.

$$\begin{aligned} X &= x/a, Y = y/b, H = h/R_x, P = p/E, \rho = \bar{\rho}/\rho_0, \\ \eta &= \bar{\eta}/\eta_0, k = a/b, U = \eta_0 u/ER_x, W = w/ER_x^2, \\ G &= \alpha E \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, 유효탄성계수 E 의 단위는 [GPa]이다.

한편, 주곡률반경이 R_x, R_y ($R_x > R_y$)인 타원체에서 Hertz 접촉타원의 타원비 k 는 다음식을 사용하여 구한다[5].

$$\frac{R_y}{R_x} = k^{-1.5} \quad (8)$$

따라서, 식 (1)-식 (4), 식 (6)을 무차원화하여 정리 하면 다음식들과 같이 나타내어진다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + k^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \frac{a}{R_x} \frac{\partial(\rho H)}{\partial X} \quad (9)$$

$$\eta = \exp\{\{\ln(\eta_0) + 9.67\}\{-1 + (1 + 5.1EP)^\gamma\}\} \quad (10)$$

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1 + 1.68EP} \quad (11)$$

$$H = H_0 + \frac{a^2}{2R_x^2} \left\{ X^2 + \frac{R_x}{k^2 R_y} Y^2 \right\} + H_d \quad (12)$$

$$W = \frac{a^2}{kR_x^2} \iint P \, dX \, dY \quad (13)$$

한편, 구름방향 출구부에는 다음식과 같은 레이놀즈의 경계조건을 적용한다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (14)$$

4. 수치해석

본 논문에서는 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하여 Hertz 접촉타원의 장축방향으로 윤활유가 유입되는 경우의 타원접촉 EHL 문제를 수치해석하고자 한다. 이 방법은 윤활유가 단축방향으로 유입되는 타원접촉문제[3-4] 및 유한한 길이의 선접촉문제[7-8]와 같은 3차원 EHL 문제의 해석에 적용된 결과, 지금까지 제시된 수치해석방법중에서 해석과정이 가장 체계적임과 동시에 해석결과도 정확함이 입증되었다.

불균일한 격자계에 대한 식 (9)의 유한차분형태는 참고문헌[3-4]에서와 거의 동일하게 다음식과 같이

표현된다.

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3 (P_{i+1,j} - P_{i,j})}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} \\ &\quad - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3 (P_{i,j} - P_{i-1,j})}{\Delta X_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} \\ &\quad + \frac{k^2 (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left\{ \frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3 (P_{i,j+1} - P_{i,j})}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3 (P_{i,j} - P_{i,j-1})}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} \right\} \\ &\quad - 12U \frac{a}{R_x} (\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, M_j 는 식 (14)의 레이놀즈 경계조건을 만족시키는 X방향 격자의 수이고 N 은 Y방향으로의 격자의 수이다[3-4,7-8].

식 (15)에서 미지수 $P_{i,j}$ 와 H_0 를 구하기 위하여 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하면 다음식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} \right)^n (P_{k,l}^{n+1} - P_{k,l}^n) + \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_0} \right)^n (H_0^{n+1} - H_0^n) \\ + f_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

한편, 식 (13)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \sum_{i=2}^{M_j} \sum_{j=2}^{N-1} P_{i,j} \Delta A_{i,j} \quad (17)$$

여기서, $\Delta A_{i,j} = \frac{a^2}{4kR_x^2} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)$ 이다.

식 (16)-식 (17)에서 미지수와 식의 수가 서로 일치하므로 해석이 가능하며 보다 상세한 수치해석과정은 참고문헌[3-4]에 제시되어있다.

5. 결과 및 고찰

본 논문에서는 수치해석결과의 타당성을 검증하기 위하여 Chittenden 등[5]의 경우와 계산조건을 동일하게 두었다.

타원비 $k=1.667$ 인 조건에 대하여 윤활유가 접촉타원의 장축방향으로 유입되는 경우의 유막형상은 Fig.

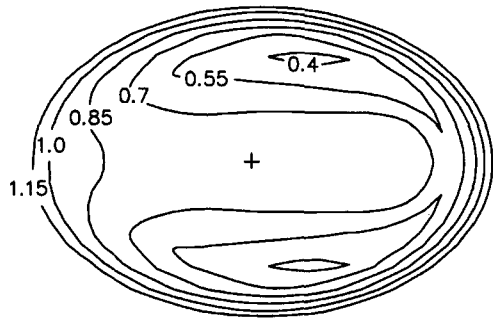


Fig. 2. Film thickness contours with lubricant entrainment along the major axis. ($H \times 10^6$): $k=1.667$, $G=4522$, $U=0.935 \times 10^{-13}$, $W=0.91 \times 10^{-8}$.

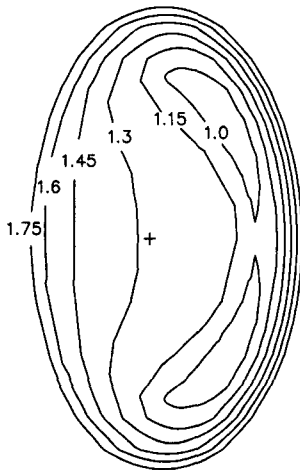


Fig. 3. Film thickness contours with lubricant entrainment along the minor axis. ($H \times 10^6$): $k=1.667$, $G=4522$, $U=0.935 \times 10^{-13}$, $W=0.91 \times 10^{-8}$.

2에, 단축방향으로 유입되는 경우에 대한 결과는 Fig. 3에 각각 나타내었다. 이들 그림에서 + 표시는 Hertz 접촉타원의 중심($X=0$, $Y=0$)을 나타낸다. 윤활유 유입 방향의 차이에도 불구하고 타원접촉문제에서는 과도한 측면누설(side leakage)을 억제하기 위하여 EHL의 특징중에 하나인 Side lobe가 모두 형성되어 있다. 이와같은 형상의 유막이 형성되기 때문에 타원접촉형태의 기계요소가 큰 하중을 지지하면서도 유체윤활상태로 운전될 수 있는 것이다. 그러나, 윤활유의 유입방향에 따라서 전체적인 유막형상과 크기는 아주 큰 차이를 보이고 있다. 특히, 장축방향의 유입인 경우에는 단축방향인 경우에 비하여 측면(Y 방향)으로 누설이 용이하기 때문에 유막의 크기는 상대적으로 작게 된

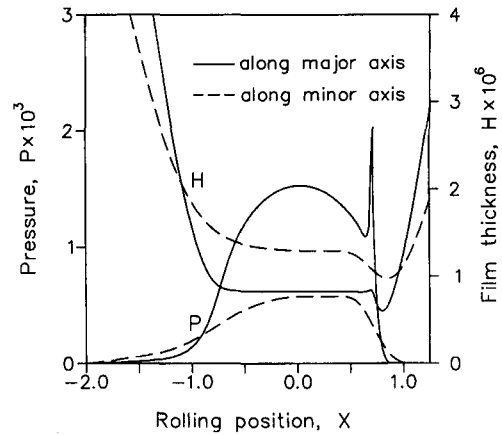


Fig. 4. Pressure profiles and film shapes in the rolling direction centerline. $k=1.667$, $G=4522$, $U=0.935 \times 10^{-13}$, $W=0.91 \times 10^{-8}$.

다. 따라서, 타원접촉문제에서는 타원비가 동일한 형상일지라도 윤활유가 장축방향으로 유입되는 경우의 윤활조건이 한층 가혹하게 됨을 알 수 있다.

Fig. 4는 윤활유의 유입중심부($Y=0$)에서 유입방향에 따른 압력분포와 유막형상을 비교하여 나타낸 그림이다. 윤활유가 장축방향으로 유입되는 경우에는 EHL의 대표적인 특징들인 구름방향 출구측에서의 압력 Spike와 접촉중양부에서의 평행한 유막형상 및 출구부에서의 유막수축(fluid film constriction)이 선명하게 나타나고 있다. 그러나, 동일한 계산조건임에도 불구하고 단축방향의 유입인 경우에는 전체적인 압력의 크기가 장축방향인 경우에 비하여 작기 때문에 압력 Spike는 나타나지 않지만 접촉중양부에서의 압력발생을 위하여 출구부에서의 유막수축은 발생하고 있다. 한편, Fig. 2와 Fig. 3에서 알 수 있는 것과 같이 장축방향의 유입은 측면누설이 쉽게 발생할 수 있는 접촉형상이기 때문에 단축방향인 경우에 비하여 유체압력이 발생하는 영역은 크게 축소된다. 그렇지만 이러한 경우에도 하중을 지지하기 위해서는 다음과 같은 형태의 유막이 형성되어야 함을 Fig. 2~Fig. 4의 결과로부터 쉽게 확인할 수 있다. 즉, 유막두께가 상대적으로 작아지면 측면과 출구부로의 누설유량은 급격히 줄어들게 되므로 접촉중양부 영역에서 고압이 발생하게 된다.

Fig. 5에는 타원체의 주곡률반경비 R_y/R_x 에 대한 최소유막두께 H_m 및 접촉중양부 유막두께 H_c 의 변화를 Chittenden 등[5]의 결과와 비교하여 나타내었다. R_y/R_x

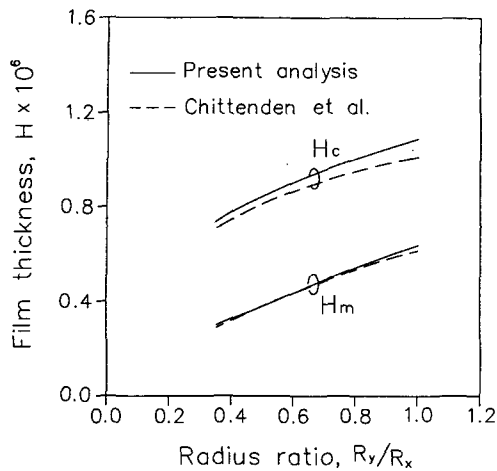


Fig. 5. Variation of central and minimum film thicknesses with contact radius ratio. $G=4522$, $U=0.935 \times 10^{-13}$, $W=0.91 \times 10^{-8}$.

가 작아질(타원비 k 는 크게될)수록 유막두께는 감소하며 이러한 결과는 Fig. 2~Fig. 4에서의 고찰과 같이 윤활유의 측면누설에 기인하고 있다. 참고적으로 윤활유가 단축방향으로 유입되는 경우에는 이와 반대로 타원비가 증가함에 따라서 유막두께도 증가한다[2-4]. 본 논문과 참고문헌[5]의 결과는 H_m 에서는 거의 일치하는 반면에 H_c 에서는 상당한 차이를 보이고 있다. 한편, 참고문헌[4]에서는 Hamrock과 Dowson[2]의 접촉 중앙부에서의 부정확한 해석으로 인하여 H_c 에서의 차이가 있음을 밝히고 추가연구의 필요성을 제기하였다. 따라서, H_c 에서의 이러한 차이도 동일한 원인일 것으로 추정되며, 특히, 참고문헌[5]의 수치해석과정이 경험적인 방법에 의존할 뿐만 아니라 수렴판정조건을 크게 완화시켰기 때문에 수치해석적으로 완전하게 수렴된 결과인지는 불확실한 실정이다. 더구나, 윤활유가 접촉타원에 대하여 입의방향으로 유입되는 경우의 EHL 유막두께식[5]은 참고문헌[2]의 결과도 함께 사용하였기 때문에 정확성이 더욱 뒤떨어질 것으로 예상된다.

이상의 결과, 일반적인 조건의 타원접촉 EHL 문제에 적용할 수 있는 정확한 유막두께식을 구하기 위해서는 본 논문에서 제시한 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하는 수치해석방법의 채용과 함께 다양한 조건에 대한 수치해석결과가 필수적으로 요구됨을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 윤활유가 접촉타원의 장축방향으로 유입되는 경우의 타원접촉 EHL 문제를 수치해석하였다. 이를 위하여 지금까지 3차원 EHL 문제의 수치해석에 사용된 수치해석방법중에서 해석과정이 가장 체계적이며 결과가 물리적으로 타당하다고 알려져 있는 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하였다. 윤활유의 유입방향에 따라서 EHL 특성은 아주 큰 차이를 보였으며, 특히, 장축방향으로 유입되는 경우의 윤활조건이 한층 가혹하였다. 또한, 동일한 문제에 대한 기존연구와의 비교결과는 본 논문에서 사용한 수치해석방법이 타원접촉 EHL 문제의 수치해석에 가장 적합함을 입증하였다. 따라서, 본 논문의 수치해석방법을 사용하여 추가적인 연구를 수행하면 일반적인 조건의 타원접촉 EHL 문제에 적용할 수 있는 정확한 유막두께식을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 1997년도 통상산업부에서 시행한 공업기반기술개발사업의 기술개발연구의 일부입니다.

기 호 설 명

a	: Hertz 접촉타원의 장반경
b	: Hertz 접촉타원의 단반경
E	: $2/E = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$
G	: 무차원재료변수, αE
h	: 유막두께
H	: 무차원유막두께, h/R_x
H_c	: 접촉중심부에서의 무차원유막두께
H_m	: 무차원최소유막두께
k	: Hertz 접촉타원의 타원비, a/b
n	: 반복계산횟수
p	: 압력
P	: 무차원압력, p/E
R_x	: 타원체의 x방향 곡률반경
R_y	: 타원체의 y방향 곡률반경
u	: 타원체의 구름방향 평균속도
U	: 무차원속도변수, $\eta_0 u/ER_x$

x, y : 좌표계
 X, Y : 무차원좌표계, $x/a, y/b$
 w : 하중
 W : 무차원하중변수, w/ER_x^2
 Z : 윤활유의 Roelands 계수
 α : 윤활유의 압력-점도지수
 η_0 : 대기압상태에서의 윤활유점도
 ρ_0 : 대기압상태에서의 윤활유밀도

참 고 문 헌

1. Dowson, D. and Higginson, G. R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, SI ed., Pergamon Press, 1977.
2. Hamrock, B.J. and Dowson, D., "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part 1: Theoretical Formulation," *J. of Lub. Tech.*, Vol.98, pp. 223-229, 1976. "Part 2: Ellipticity Parameter Results," Vol.98, pp.375-383., "Part 3: Fully Flooded Results," Vol.99, pp.264-276, 1977.
3. Park, T. J. and Kim, K. K., "A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts," *Wear*, Vol.136, pp.299-312, 1990.
4. 박태조, "Hamrock & Dowson의 EHL 유막두께식에 대한 평가," *한국윤활학회지*, Vol.12, No.3, pp.115-122, 1996.
5. Chittenden, R. J., Dowson, D., Dunn, J. F. and Taylor, C. M., "A Theoretical Analysis of the Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Concentrated Contacts," *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol.387, pp.245-269, 1985.
6. Chittenden, R. J., Dowson, D. and Taylor, C. M., "Elastohydrodynamic Film Thickness in Concentrated Contacts," *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol.200, pp.207-226, 1986.
7. Park, T. J. and Kim, K. K., "The Elastohydrodynamic Lubrication of Profiled Cylindrical Roller," *Proc. of the Int. Tribology Conf.*, Vol.2, pp.1043-1048, 1995.
8. Park, T. J. and Kim, K. K., "Elastohydrodynamic Lubrication of a Finite Line Contact," *Wear*, Vol.223, No.1-2, pp.102-109, 1998.