

☒ 응용논문

ISM과 FSM을 이용한 이론적 구조모형화에 대한 연구  
- A Study on the Theoretical Structure Modeling using ISM & FSM -

조성훈\*

Cho, Seong-Hoon

정민용\*\*

Chung, Min-Yong

Abstract

A lot of difficulties exist in analyzing the structure of a system owing to the complex and organic relations in the systems we face in reality. Focuses have been put on the research of optimal solution in a defined structure, however, on the assumption that the structure of the system has been already defined.

With the grasping of the structure as the most prior condition, ISM(Interpretive Structural Modeling) and FSM(Fuzzy Structural Modeling) are suggested as solutions in this paper. ISM uses the systematic application of some elementary notions of graph theory and boolean algebra, FSM uses Fuzzy conception for representing relationship between elements. In FSM, the entries in the relation matrix are taken to value on the interval [0, 1] by virtue of a fuzzy binary relation.

Numeric examples are used as the actual application as follows.

1. 서론

대상 시스템을 연구하기 위해서는 무엇보다도 대상을 통찰하고 대상의 구조모형을 체계적으로 분석할 수 있는 방법이 요구된다고 할 수 있다. 특히, 산업공학 분야에서 다루고 있는 의사결정 기법은 대부분이 시스템내의 구조가 확정되어 있다는 가정하에, 최적화된 의사결정을 하거나, 각 변수간의 관계지수를 구하거나, 시스템 구조의 계층성을 파악하는 연구에 그 초점을 맞추고 있다고 할 수 있다. 그러나 시스템내의 변수가 많고 그 변화가 다양하여 구조가 분명하게 드러나지 않는 경우에는 시스템내의 구조모형화가 매우 어렵기 때문에, 시스템 구조를 개괄적으로 파악하는 것이 대상문제의 연구과정에서 가장 선결되어야 할 문제라고 할 수 있다.

특히 분석자가 대상 시스템의 관계성을 확정적으로 부여할 수 없는 경우, 구조탐색의 필요성이 더욱 두드러진다. 이러한 경우에는 구조모형화의 도구로서 통계적인 방법을 이용한 탐색적 방법이 많이 사용되는데, 이는 과거의 연구나 선행적 연구에 의하여 초기 모형을 결정한 후에, 이를 기본으로 하여 관측된 자료의 부합정도에 의거하여 시스템의 구조모형을 결정하는 방

\* 건국대학교 대학원 산업공학과 박사과정

\*\* 건국대학교 산업공학과

법이다. 실제로 통계적 모형화 방법인 구조방정식(Structural Equation Modeling), 인자분석(Factor Analysis) 등은 초기의 시스템 구조를 분석자가 결정하고, 탐색적 절차를 거쳐 최종해를 결정한다.

결국 확정적인 관계성을 부여할 수 없는 시스템의 경우에는 이론적 가설(초기해)과 가설에 대한 자료 검정(자료 부합성)의 절차를 반복하는 순환적 과정속에서 최종적인 구조모형을 수립한다고 할 수 있다[10]. 이 두가지 절차중에서 자료를 통한 가설 검정은 통계학적 방법을 이용하면 해결할 수 있지만, 이론적 가설로서 시스템의 구조를 모형화하는 것은 과거의 연구결과나 분석자의 선형적인 지식으로서 주관적으로 결정하게 되므로 다분히 정성적인 요소가 강한 부분이라 할 수 있다.

이에 본 연구에서는 이론적 가설 차원에서 대상 시스템의 구조를 파악하는 도구로서 ISM을 소개한다. ISM은 Harary, Warfield에 의하여 연구된 대규모의 개량경제 모델을 단위화하는 방법으로서, 이러한 방법은 계량경제 모델이외에도 다른 분야에서도 이용될 수 있을 것이다[8]. 실제로 ISM은 분석자의 판단을 통하여 요소간에 관계성을 부여하고, 이를 그래프로 나타내는 개괄적 모형구축 방법이다. 본 연구에서는 시스템의 구조를 고찰하는 도구로서 기존의 ISM과 FSM이 가지는 효용성을 입증하고, 다양한 역치 변화를 통하여 시스템의 구조를 탐색할 수 있는 개선된 FSM의 절차를 제시하고자 한다. 본 연구에서 제시되는 ISM(Interpretive Structural Modeling)은 요소의 관련성을 부울대수(Boolean Algebra)로서 표현하는 방법이며, FSM(Fuzzy Structural Modeling)은 요소의 관련성을 퍼지(Fuzzy)로서 표현하는 방법이라고 할 수 있다.

## 2. 구조모형화의 개요

대부분의 시스템들은 다수개의 선형방정식으로 구성하여 이를 모형화할 수 있다. 만일 비선형의 경향을 갖는 경우라면, 적절한 변환을 통하여 선형으로 변환시킬 수 있다[17]. 일반적인 선형시스템은 다음과 같은 일련의 선형방정식군으로 표현가능하다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\mu} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x}$ 는 경영활동과 관련된 변수들을 나타내는  $n$ 차원 벡터이며,  $\boldsymbol{\mu}$ 는 입력요소에 해당하는  $n$ 차원 상수벡터이며, 그리고  $\mathbf{A}$ 는  $\mathbf{x}$ 들간의 관계에 따른  $n \times n$ 차원 계수행렬이다.

식(1)에서  $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ 이 정칙이라면  $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ 의 역행렬이 존재하므로, 식(1)의 해는 식(2)와 같이 유일하게 된다.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (2)$$

그리고 행렬  $\mathbf{A}$ 의 각각의 모수  $a_{ij}$ 가 변화(disturbance)한다면 해당 모수행렬  $\mathbf{A}$ 는 다음의 식(3)과 같이 변화한다.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} \quad (3)$$

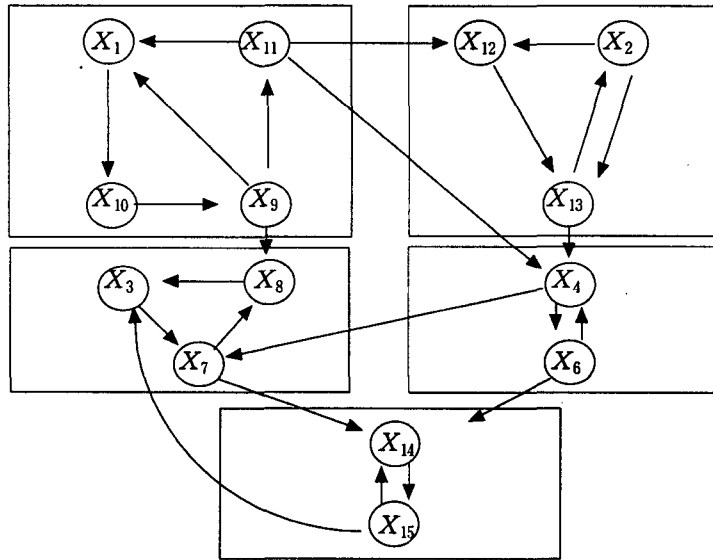
모수행렬  $\mathbf{A}$ 의 변화로서 식(2)의 해도 식(4)와 같이 변화된다.

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{I}-\mathbf{A}')^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \quad (4)$$

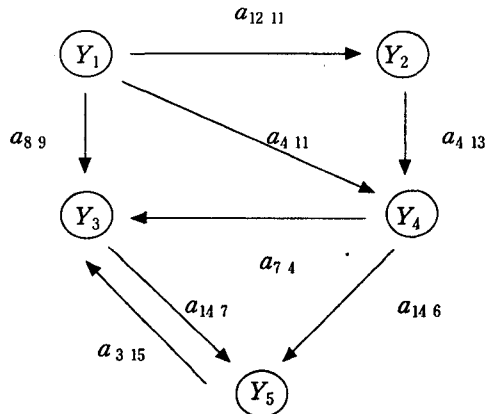
식(4)를 통하여 우리가 알고 싶은 것은 (1) 어떤 변수가  $x$ 를 변화시켰으며, 얼마나 변화시켰는가? (2) 시스템의 내부 구조에 따라 그 영향력이 얼마만큼 변화하는가? 등이다. 이는 시스템이 가지는 흐름 변화를 파악함으로써 의사결정을 바람직한 방향으로 설계하고 실행할 수 있기 때문이다.

하지만 시스템을 정의하는 관련 요소(변수)가 다양할수록, 이를 구조화하여 시스템의 변동을 파악하는 것이 그리 용이하지 않다. 그러나 전체의 시스템을 적은 수의 시스템구조로 분할하여 계층화 또는 네트워크화를 할 수 있다면, 시스템의 변화를 더욱 용이하게 파악할 수 있다. <그림 1>에서는 전체시스템을 구조 모형화함으로써 더욱 간략한 시스템 구조로 변환하는 과정을 보여주고 있다.

<그림 1>의 a와 같은 관계 그래프는 그 계층의 복잡성 때문에 전체적인 관계성을 파악하기가 무척 어렵다고 할 수 있다. 하지만 이를 <그림 1>의 b 형태로 변환하면, 전체의 시스템은 5개의 개별시스템으로 분할된다.



a. 전체시스템



b. 개별시스템화

<그림 1> 전체시스템의 개별시스템화

위의 그림에서 전체시스템은 5개의 개별단위로 분할될 수 있으며, 이는 I - X1, X9, X10, X11 : II - X2, X12, X13 : III - X3, X7, X8 : IV - X4, X6 : V - X5, X14와 같다.

<그림 1>에서  $x_i$ 가 변동하면, 그 자신의 변동뿐만 아니라 정점  $i$ 와 연결되어 있는 모든 정점에 대응되는 변수를 동시에 변동시킨다. 이는 분리불가능한 상태에 있는 개별 단위시스템내의 변수가 다른 변수들과 서로 연결되어 있기 때문이다.

<그림 1>의 b에서와 같이 간략화된 구조를 대상으로 변수간의 영향력을 분석하여 보면, 다른 변수의 변동에 영향을 받지 않는 상위시스템과 상위시스템내의 변수 변동에 의하여 영향을 받는 하위시스템으로 구분할 수 있다. 따라서 상위시스템내의 변수변동은 하위시스템에는 영향을 미치지 않지만, 더 상위에 있는 시스템으로는 전달되지 않는다고 가정한다. 그러므로 다음과 같은 변동 전달에 대한 가정을 세울 수 있다.

- 분리불가능한 상태에서, 상위시스템내의 변수변동은 하위시스템에서의 모든 해를 변동시킨다.
- 변수의 변동은 하위시스템에서 상위시스템으로 전달되지는 않는다.

위와 같은 2가지 가정을 통하여 분석자는 복잡한 시스템을 좀 더 간편하게 다룰 수 있으며, 그 관계성도 더욱 명확하게 파악할 수 있다. 따라서 <그림 1>과 같이 시스템의 구조모형화가 이루어진 후에는 의사결정을 위한 여러 가지 기법을 적용하기가 더욱 용이해진다고 할 수 있다.

이에 본 연구에서는 시스템 구조 탐색의 필요성에 대하여 인식하고, 그 방법론에 대하여 논한다. 시스템을 구성하는 요소간에 존재하는 관계를 파악하는 방법에는 Deductive Logic, Causal Observation, Empirical Data, Brainstorming, Combination of These Sources 등이 있으나[6], 본 연구에서는 그 방법론으로서 ISM과 FSM을 제시한다. 이는 ISM과 FSM에서는 분석자가 변수간의 관계성을 쌍대형식으로 비교하며, 또한 그 결과에 대하여 그래프 형태로 표현할 수 있으므로 그 유용성이 매우 뛰어나기 때문이다.

### 3. 구조모형화 방법으로서의 ISM

#### 3.1 ISM의 개요

ISM에서는 최종적으로 시스템의 도달가능행렬(Reachability Matrix)을 구성함으로써, 전체의 모델내에 존재하는 계층적 또는 네트워크적 관계를 파악하고 이를 통하여 시스템의 구조를 결정한다.

ISM에서는 시스템의 관계를 표현하기 위하여 이진행렬(Binary Matrix)과 유향그래프(Directed Graph or Network)를 이용한다. ISM에서는 이진행렬을 구성하기 위하여 분석자가 선형적인 지식을 이용하여 관계의 여부를 0과 1의 이진수로 표현한다.

#### 정의 1 이진행렬

이진행렬은 0과 1의 두 가지 요소로 구성된다. 0은 두 개의 요소간의 관계가 존재하지 않는 것이며, 1은 두 요소간의 관계가 존재하는 것이다. 따라서 다음의 두가지로 표현된다.

$$b_{ij} = 1, \text{ 요소 } i \text{가 요소 } j \text{에 영향을 준다.}$$

$$= 0, \text{ 요소 } i \text{가 요소 } j \text{에 영향을 주지 않는다.}$$

만일  $b_{12} = 1$ 이면 요소 1이 요소 2에 영향을 주는 구조로서 이를 그래프로 표현하면  $1 \rightarrow 2$ 가 된다.

정의 2 이행성 검증

이진행렬을 기본으로 하여  $B+I$ 을 부울멱승(Boolean Power)함으로서 이행성(Transitivity)에 대한 검증을 한다. 실제로 아주 작은 정수의 범위에서 아래의 식이 만족된다면 행렬 B는 수렴된다고 할 수 있으며, 곧 관계성은 검증되었다고 할 수 있다[7].

$$(B+I)^{k-1} \leq (B+I)^k = (B+I)^{k+1} \tag{5}$$

3.2 ISM의 절차

단계 1 시스템의 특성을 파악한다.

단계 2 시스템내의 요소(변수)를 파악한다.

언제나 하나의 시스템은 상호간에 관련을 맺고 있는 다수개의 요소의 결합이라고 할 수 있다. 그러므로 시스템을 분석하기 위해서는 시스템 요소, 상호작용 그리고 관련성이 반드시 확인되어야 한다. ISM은 적절한 전후관계하에 있는 요소간의 관계성을 파악하는 방법이다. 요소의 집합을  $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ 이라 한다.

단계 3 관계행렬(Adjacency Matrix) A를 결정한다.

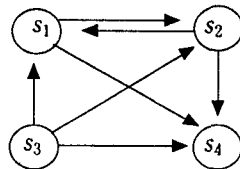
이진행렬 B에 단위행렬 I를 더함으로서 관계행렬 A를 만든다. 결과적으로  $A = B + I$ 라고 할 수 있다.

단계 4 도달가능행렬 R을 결정한다.

행렬 A의 이행성을 판별하기 위하여, 정의 2에 따라 부울멱승을 취하면 도달가능행렬을 얻을 수 있다. 이를 예를 보이면 다음과 같다.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = B + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

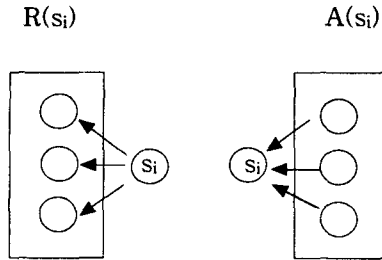
위의 관계행렬을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



<그림 2> 관계 행렬의 그래프 표현

단계 5 도달가능행렬에서 계층을 구성한다.

도달가능행렬의 유용성은 시스템을 계층적으로 분해할 수 있다는 데 있다. 이것은 Reachability Set( $R(s_i)$ )와 Antecedent Set( $A(s_i)$ )를 비교함으로서 구할 수 있다.  $R(s_i)$ 는 요소  $s_i$ 에서 출발하여 도착할 수 있는 모든 요소의 집합을 의미한다. 이에 반해  $A(s_i)$ 는 요소  $s_i$ 를 향하여 오는 모든 화살표에 연결되어 있는 요소의 집합을 의미한다.



<그림 3> Reachability Set( $R(s_i)$ )와 Antecedent Set( $A(s_i)$ )의 비교

도달가능행렬로부터 이에 합당한 계층 또는 네트워크를 작성하는 방법은 아래의 순서를 따른다.

- (1) 도달가능행렬을 이용하여 table entry를 만든다.

<표 1> 계층구성을 위한 표

$s_i$	$R(s_i)$	$A(s_i)$	$A(s_i) \cap R(s_i)$

- (2)  $A(s_i) = A(s_i) \cap R(s_i)$ 를 만족하는 요소를 찾는다. 이에 해당하는 요소는 다른 변수에 영향을 받지 않는 요소가 되며 따라서 first level이 된다고 할 수 있다[7].
- (3) 해당 요소를 제외하고 다시 실시한다.

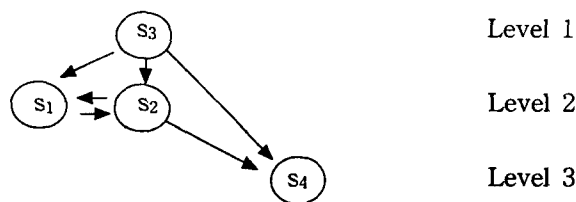
위의 예제에서의 first level을 구하면 요소 3이 된다.

<표 3> 그림 2에서의 계층구성 표

$s_i$	$R(s_i)$	$A(s_i)$	$A(s_i) \cap R(s_i)$
1	1,2,4	1,2,3	1,2
2	1,2,4	1,2,3	1,2
3	1,2,3,4	3	3
4	4	1,2,3,4	4

단계 6 유향그래프를 작성한다.

이와 같은 과정을 반복한 결과, 계층은 3가지로 구분되며  $s_3 : s_1, s_2 : s_4$ 가 된다. 이를 그림으로 보이면 다음과 같다.



<그림 4> 계층이 구성된 시스템의 구조

### 3.3 ISM의 한계

#### 3.3.1 주관적 관계의 수학적 표현

분석자가 표현하는 관계는 주관적 관계로서 그 자체의 상황에 의하여 여러가지 특성을 가지고 있다. 분석자가 표현하는 주관적인 문맥적 관계내에 존재하는 특성을 서술하면 다음과 같다[14].

- 재귀적(reflexive), 비재귀적(ir-), 반재귀적(meso-)
- 대칭적(symmetric), 비대칭적(a-), 반대칭적(meso-)
- 전이적(transitive), 비전이적(in-), 반전이적(meso-)

만일 분석자가 세가지를 순차적으로 비교하는 경우에, 비교되는 특성이 모두 동일한 것이라서 a가 b보다 중요하고, b가 c보다 중요하면 a는 c보다 중요하다고 할 수 있다. 이는 분석자의 주관적인 판단도 전이적이었고, 수학적 표현도 전이적이었다고 할 수 있다. 하지만 분석자가 상황 a와 b를 비교할 때는 비용을 기준으로 하고, b와 c를 비교할 때는 품질을 기준으로 하였다면, 이 두가지 만으로 a와 c를 비교하는 것을 불가능한 일이 된다. 하지만 수학적 표현으로는, 전이적인 특성까지 포함하여 분석자의 의도를 정확하게 나타낼 수 없다는 것이다. 사실 이러한 특징은 AHP(Analytic Hierarchy Process)에서도 나타나는 한계점으로서 비교대상이 되는 요소간에는 모두 동질성을 지닌다는 가정이 성립되어야 한다.

#### 3.3.2 관계의 이진성

ISM이 가지는 또 하나의 문제점은 관계 부여의 정직성이다. ISM에서는 관계의 여부를 0과 1로서 부여함으로써 확정적인 구조를 모형화한다. 하지만 우리가 대상으로 하는 시스템은 그 구조를 파악하기가 어렵고 복잡하기 때문에, 가능하면 탐색적인 과정을 갖는 것이 바람직하다고 할 수 있다.

본 연구에서는 ISM의 두 번째 한계점에 연구의 초점을 둔다. 이를 극복하기 위하여 관계의 이진성을 퍼지로 표현하는 FSM을 소개하고, 계층적 구조와 함께 네트워크적 구조를 분석할 수 있는 개선된 FSM을 논하고, 이를 통하여 시스템에서의 다양한 구조를 탐색하는 절차를 제시한다.

## 4. 구조모형화 방법으로서의 FSM

실제로 의사결정의 대상이 되는 현실 시스템은 매우 가변적(Variables)이며, 때로는 커다란 불확실성(Uncertainty)의 상황에 놓여 있는 경우가 대부분이다. 이러한 불확실성을 설정한 시스템의 내부안에서 모두 해결할 수는 없다.

이에 본 연구에서는 분석자의 판단에 따른 관계성 부여의 불확실성을 인정하고, 불확실성의 정량화를 위하여 퍼지개념을 도입한 FSM을 소개하고, 이를 네트워크 체계에 적합하도록 수정한다. 기존의 FSM연구에서는 시스템을 계층적으로 분석하기 위하여 관계 행렬내에서 비대칭적(Asymmetric)인 특성을 가진 경우에만 분석을 실시하였다. 하지만 본 연구에서는 시스템이 계층적인 경우만으로 제한하지 않고, 네트워크적인 경우도 대상으로 하였다. 여기서 의미하는 퍼지개념이란 하나의 요소가 다른 요소와 어떠한 정도의 관계를 가지는가에 대한 문제를 단순한 이진(Binary) 판단으로 다루는 것이 아니라, 보다 현실적인 개념을 반영할 수 있도록 0부터 1까지의 중간수를 부여하는 방법이라고 할 수 있다.

#### 4.1 FSM의 개요

퍼지집합의 개념은 반드시 0과 1이라는 엄격한 구분을 하지 않는다는 특성 때문에 단순한 이진성의 한계를 극복할 수 있는 수학적 토대가 된다. Ragade는 ISM의 연구를 개량하여 전문가가 판단하는 관련성을 0과 1이 아닌 퍼지수로 설정하고, 재귀성과 전이성이라는 가정하에서 퍼지합성을 이용하는 방법을 제시하였다. 이후에 Tazaki는 전이성의 가정을 완화하여, 반(meso)전이성을 정의하고, 이때의 구조를 파악할 수 있는 방법을 제시하였다[16].

본 연구에서는 퍼지관계행렬을 이용하여 퍼지도달가능행렬을 구성한다. 행렬내의 각 값들은 0과 1의 이진수가 아닌 0과 1 사이의 퍼지수를 사용한다. 이렇게 구성된 퍼지 행렬을 이용하여 각 요소간의 문맥적 의미를 파악하고, 이를 그래프의 형태로 전환한다.

#### 4.2 개선된 FSM의 절차

우리가 대상으로 하는 시스템 S의 구성요소를  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 라고 하자. 퍼지관계행렬 A는 S 내의 각 요소가 가진 관계의 정도를 나타낸다고 하자. 이를 표현하면 식(6)과 같다.

$$A = [a_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

여기서 A는  $n \times n$ 의 정방행렬이고, A의 요소  $a_{ij}$ 는 퍼지관계를 나타낸다. 이를 표현하면 식(7)과 같다.

$$a_{ij} = \mu_A(s_i, s_j), \quad 0 \leq a_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

이것은  $s_i$ 가  $s_j$ 를 얼마나 종속하고 있는가를 나타내는 정도이다.

퍼지도달가능행렬을 얻기 위하여 본 연구에서는 Max-Min, Min-Max, Max-star 등과 같은 퍼지합성기법 중 Max-Min퍼지합성을 이용한다. 퍼지합성을 정의하면 다음과 같다.

##### 정의 3 퍼지합성

R과 S의 합성은  $R \circ S$ 로서 표현하며, R은  $X \times Y$ 상의 관계이고, S는  $Y \times Z$ 상의 관계이다. 여기에서 X, Y, Z는 각각 X와 Y, Y와 Z간의 관계 R과 S를 가지는 집합이다. 그리고  $X \times Y$ 는 X, Y의 각 원소의 순서쌍  $(x, y)$ 의 모든 집합을 의미하며, 퍼지이론에서는 이를 직적(Product)이라고 한다.  $R \circ S$ 는 식(8)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} R \circ S &\equiv \mu_{R \circ S}(x, z) = \text{Max}_y [\text{Min}(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))] \\ &= \bigvee_y \{(\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z))\} \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)에서 사용된 Max는 퍼지합집합이며, Min은 퍼지교집합을 의미한다.

본 연구에서 사용하는 퍼지합성은 동일한 행렬 A에 대하여 적용되는 경우라고 할 수 있으므로 R과 S가 동일한 경우라고 할 수 있다. 따라서 식(8)은 식(9)와 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} A \circ A &\equiv \mu_{A \circ A}(s_i, s_k) = \text{Max}_j [\text{Min}(\mu_A(s_i, s_j), \mu_A(s_j, s_k))] \\ &= \bigvee_j \{(\mu_A(s_i, s_j) \wedge \mu_A(s_j, s_k))\} \end{aligned} \quad (9)$$

다양한 퍼지합성법중에서 Max-Min을 사용하는 이유를 살펴보기 위하여 다음과 같은 관계행렬 A를 가정한다.



$$B+I=A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

A를 합성한다. 이는 A · A와 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & a_{14}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* & a_{24}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* & a_{34}^* \\ a_{41}^* & a_{42}^* & a_{43}^* & a_{44}^* \end{bmatrix}$$

최적해  $a_{23}^*$ 을 구하는 과정을 살펴보자.

$$\begin{aligned} \text{MIN} \{s_2 \rightarrow s_1 : a_{21} \quad s_1 \rightarrow s_3 : a_{13}\} &= \text{MIN}\{a_{21}, a_{13}\} \\ \text{MIN} \{s_2 \rightarrow s_2 : a_{22} \quad s_2 \rightarrow s_3 : a_{23}\} &= \text{MIN}\{a_{22}, a_{23}\} \\ \text{MIN} \{s_2 \rightarrow s_3 : a_{23} \quad s_3 \rightarrow s_3 : a_{33}\} &= \text{MIN}\{a_{23}, a_{33}\} \\ \text{MIN} \{s_2 \rightarrow s_4 : a_{24} \quad s_4 \rightarrow s_3 : a_{43}\} &= \text{MIN}\{a_{24}, a_{43}\} \end{aligned}$$

위의 4 경우는 요소  $s_j(j=1,2,3,4)$ 를 경유한  $s_i(i=2)$ 와  $s_k(k=3)$ 의 관련성의 정도를 퍼지수로서 표현한 것이다. 전술한 바와 같이 퍼지수는 가능성을 의미하는 것이며,  $s_i \rightarrow s_j$  가능성과  $s_j \rightarrow s_k$  가능성이 동시에 만족되어야  $s_i \rightarrow s_k$ 가 발생하는 경우이므로 둘 중에서 작은 값을 택하게 된다. 하지만  $j$ 개(시스템에 포함된 요소의 수)만큼의 가능경로가 존재하므로 이들  $j$ 개의 가능성중에서 가장 큰 것이 실질적인  $s_i \rightarrow s_k$ 의 가능성을 의미한다고 할 수 있다.

이를 표현하면 식(10)과 같으며 이는 Max-Min 퍼지합성과 동일하다는 것을 알 수 있다.

$$\text{MAX}[\text{MIN}\{a_{21}, a_{13}\}, \text{MIN}\{a_{22}, a_{23}\}, \text{MIN}\{a_{23}, a_{33}\}, \text{MIN}\{a_{24}, a_{43}\}] \quad (10)$$

FSM에서는 식(9)에서 정의한 Max-Min 퍼지합성을 반복하여 퍼지도달가능행렬을 구한다.

$$(B+I)^{k-1} \leq (B+I)^k = (B+I)^{k+1} \quad (11)$$

본 연구에서는 관계성의 크기를 판정하기 위하여 역치  $p$ 를 도입한다. 이는 분석자가 결정하는 것으로서 (0, 1]사이의 범위를 갖는다. 분석자는 역치  $p$ 를 다양하게 변화시킴으로서 구조의 변화를 파악할 수 있으며, 시스템의 구조분석에 신중을 기할 수 있게 된다.

역치를 결정한 후에, 퍼지 도달가능행렬을 중심으로 시스템의 구조를 모형화한다.

**정의 4** 시스템내에서의 계층

도달가능행렬에서의 각 요소값을  $a_{ik}^*$ 라고 할 때, 최상위(Top)수준집합  $L_i(s)$ , 중간(Intermediate)수준집합  $L_i(s)$ , 최하위(Bottom)수준집합  $L_b(s)$  그리고 독립(Isolate)수준집합  $L_{is}(s)$ 라고 정의한다. 이는 각각 식(12)~식(15)와 같이 구할 수 있다.

$$L_i(s) = \{s_i | \bigvee_{k=1}^n a_{ik}^* \geq p\} \quad (12)$$

$$L_b(s) = \{s_i | \bigvee_{k=1}^n a_{ik}^* \geq p, \bigvee_{k=1}^n a_{ki}^* \geq p\} \quad (13)$$

$$L_b(s) = \{s_i | \bigvee_{k=1}^n a_{ik}^* < p \leq \bigvee_{k=1}^n a_{ki}^*\} \tag{14}$$

$$L_{is}(s) = \{s_i | \bigvee_{k=1}^n a_{ik}^* < p, \bigvee_{k=1}^n a_{ki}^* < p\} \tag{15}$$

여기서  $s_i$ 는 퍼지관계를 갖는 집합내의 개별 요소를 의미하고,  $a_{ik}^*$ 는 요소  $s_i$ 에 대한 Reachability Set이며,  $a_{ki}^*$ 는 요소  $s_i$ 에 대한 Antecedent Set이다.

위의 방법으로서 각 요소간에 존재하는 계층이나 네트워크관계를 파악할 수 있으며, 여기에는 2장에서 전술한 변동전달의 기본 가정이 적용될 수 있다. 이와 같이 변동전달 규칙을 적용함으로써 복잡한 시스템의 구조를 좀 더 명확하게 파악할 수 있게 된다.

구체적인 계층을 구성하기 위해서는 전술한 ISM에서의 절차를 응용한다. 이와 같은 절차를 정리하면 다음과 같다.

단계 1 시스템의 특성을 파악한다.

단계 2 시스템내의 요소(변수)를 파악한다.

단계 3 관계행렬 A를 결정한다.

ISM과는 달리 퍼지수를 도입하여 관계성을 부여한다.

단계 4 퍼지 도달가능행렬 R을 결정한다.

ISM과는 달리 부울역순을 하지 않고 Max-Min 퍼지합성을 이용한다.

단계 5 적절한 역치 p를 결정한다.

단계 6 도달가능행렬에서 계층 또는 네트워크를 구성한다.

단계 7 유향그래프를 작성한다.

## 5. 사례연구

### 5.1 ISM 사례연구

관계성을 나타내는 이진행렬을 다음과 같이 가정한다. 사례에서  $A^n$ 은 Matlab 3.0을 이용하여 계산하였다.

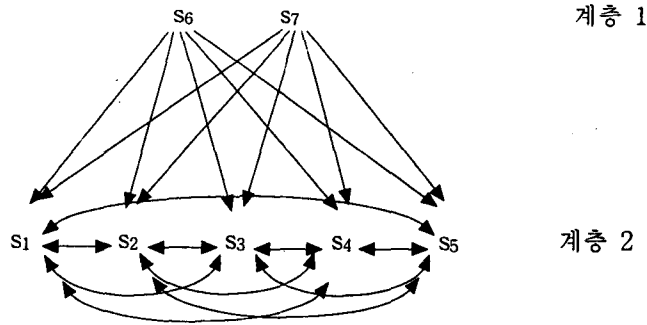
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = I + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3장에서 제시한 계층분석의 방법을 이용하여 계층화하면 다음과 같다.

<표 4> ISM 사례연구의 계층구성을 위한 표

$s_i$	$R(s_i)$	$A(s_i)$	$A(s_i) \cap R(s_i)$
1	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
2	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
3	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
4	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
5	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
6	1, 2, 3, 4, 5, 6	6	6
7	1, 2, 3, 4, 5, 7	7	7

<표 4>에 의하여 위의 사례는 첫 번째 수준이 2개인 경우, 즉 하나의 시스템에 2개의 계층을 포함되는 것을 알 수 있다. 이를 도시하면 <그림 5>와 같다.



<그림 5> ISM을 이용한 시스템 구조분석

전술한 바와 같이 <그림 5>에서는 두 개의 계층이 혼합되어 있으므로, 두 개의 상위시스템군으로 구분할 수 있으며, 하위시스템간에는 모두 관계성이 존재한다는 것을 알 수 있다.

5.2 FSM 사례연구

관계성을 나타내는 퍼지행렬을 다음과 같이 가정한다. 사례에서  $A^n$ 은 EXCEL 97 Macro를 이용하여 계산하였다.

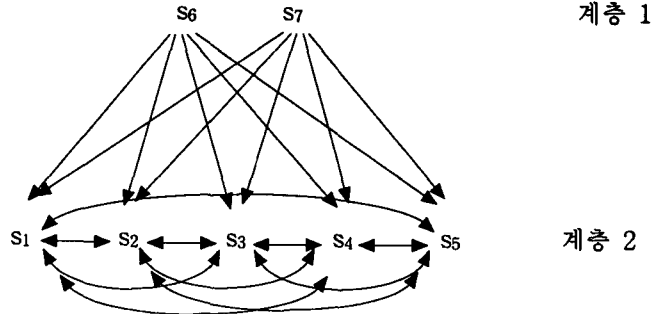
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.7 & 0.0 & 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 0.0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.1 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix}, A=I+B = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0.6 & 1.0 & 0.0 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.3 & 0.1 & 1.0 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.2 & 1.0 & 0.2 \\ 0.1 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.2 & 1.0 \end{bmatrix}, A^n = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 1.0 & 0.8 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 1.0 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.8 & 1.0 & 0.5 \\ 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

역치 p를 0.7로 정하고 이에 대한 시스템 구조를 구성한다. 0.7을 기준으로 위의 시스템의 계층성을 파악하기 위하여 3장에서 제시한 계층분석의 방법을 도입한다.

<표 5> 0.7을 기준으로 한 FSM 사례연구의 계층구성을 위한 표

$s_i$	$R(s_i)$	$A(s_i)$	$A(s_i) \cap R(s_i)$
1	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
2	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
3	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
4	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
5	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5
6	1, 2, 3, 4, 5, 6	6	6
7	1, 2, 3, 4, 5, 7	7	7

<표 5>에 의하여 위의 사례도 첫 번째 수준이 2개인 경우, 즉 하나의 시스템에 2개의 계층을 포함한다는 것을 알 수 있다. 이것을 도시하면 <그림 6>와 같으며, 이는 ISM 사례연구와 동일한 결과를 갖는다는 것을 알 수 있다.



<그림 6> FSM을 이용한 시스템 구조분석

위의 결과에서 보이는 바와 같이, 역치를 사전에 결정하고 FSM에서의 퍼지관계행렬 B를 대상으로 역치 p보다 큰 경우에는 1로 p보다 적은 경우에는 0으로 변환하면, ISM에서의 관계행렬 B와 동일하다. 결국 FSM에 p를 기준으로 이진성을 부여하면 ISM과 동일한 결과를 산출한다는 것을 알 수 있다. 실제 사례연구에서 ISM과 FSM은 동일한 결과를 발생시키므로, 이는 본 논문에서 제시한 개선된 FSM의 타당성을 증명하는 것이라 하겠다.

실제로 FSM 사례연구는 시스템내에 2개의 계층을 가지고 있으므로 퍼지도달가능행렬은 다음과 같이 두 개의 행렬로 분리가능하다.

$$A1^n = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.5 \\ 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 1.0 & 0.8 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 1.0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad A2^n = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.5 \\ 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 1.0 & 0.8 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 1.0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.5 \\ 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix}$$

여기서 A1은 s7을 제외한 퍼지도달가능행렬이며, A2는 s6을 제외한 퍼지도달가능행렬이다. 위의 두 퍼지도달가능행렬을 이용하여 정의 4를 증명한다. 식(12) ~ 식(15)까지를 사례에 맞게 적용하면 식(16)과 같다.

$$L_i(s) = \{s_i | \bigvee_{k=1}^6 a_{ik}^* \geq 0.7\}, L_b(s) = \{s_i | \bigvee_{k=1}^6 a_{ik}^* < 0.7 \leq \bigvee_{k=1}^6 a_{ki}^*\} \quad (16)$$

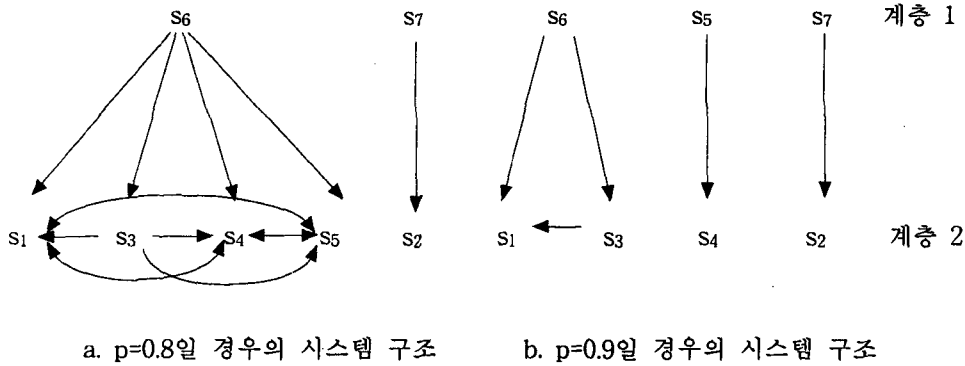
식(16)에 따라 최상위 수준과 최하위수준을 찾아낼 수 있다. p를 0.7로 정한 경우에는 두 개의 계층만이 존재하므로  $L_i(s)$ 와  $L_b(s)$ 는 존재하지 않는다.

<표 6> 정의 4에 따른 각 요소의 수준 파악

수준 \ 행렬	A1	A2
$L_i(s)$	6	7
$L_b(s)$	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5

또한 역치 p를 변환하면서 다양한 구조를 탐색함으로써 시스템의 구조를 좀 더 명확하게 판단할 수 있을 것이라 판단된다. 본 사례연구에서는 역치 p를 0.8과 0.9로 하여 분석한다. 역

치를 높게 하였으므로 관계성 부여를 엄격하게 제한한 경우라고 할 수 있다. 역치가 0.8과 0.9 일 경우의 구조는 <그림 7>과 같다.



<그림 7> 역치를 변경한 경우의 시스템 구조분석

위의 같은 결과를 정리해보면 다양한 시스템 구조속에서도 변수  $S_6$ 이  $S_1, S_3$ 에 미치는 영향이나  $S_5$ 가  $S_4, S_7$ 이  $S_2$ 에 미치는 영향은 매우 분명함을 알 수 있으며, 기준 역치가 높은 상태에서도 관계성이 부여된 요소간에는 다른 요소보다는 관계의 정도가 더욱 확실하다고 판단할 수 있다.

### 6. 결론

실제 현상적으로 존재하는 시스템은 그 구조가 매우 복잡하고 상호 유기적인 관계를 가지고 있기 때문에 그 명확성을 파악하기가 무척 어렵다고 할 수 있다. 하지만 산업공학이나 경영학에서 다루는 대부분의 기법은 시스템의 구조를 사전에 가정하고 이에 대한 분석이나 최적화에 그 연구의 초점을 맞추어왔다. 본 연구에서는 이와 같은 문제점을 인식하고, 문제 해결을 위하여 시스템의 구조 파악을 선결과제로 지적하였으며, 이에 대한 이론적 모형화의 도구로서 ISM과 FSM을 소개하였다.

ISM은 계층적, 네트워크적인 시스템을 분석하는 경우에 모두 적용할 수 있는 방법이지만, 그 관련성을 0과 1의 이진수로 부여함으로써 불확실성이 존재하는 시스템을 다루는 과정에서는 그 한계가 드러난다고 할 수 있다. 이에 본 연구에서는 퍼지수를 도입한 FSM을 소개하였다. 기존의 FSM연구에서는 시스템을 계층적으로 분석하기 위하여 관계 행렬내에서 비대칭적 (Asymmetric)인 특성을 가진 경우에만 분석을 실시하였다. 하지만 본 연구에서는 시스템이 계층적인 경우만으로 제한하지 않고, 네트워크적인 경우도 대상으로 하기 때문에, 분석자가 관계 행렬 A를 구성하는 과정에서 가정을 세우지 않고, 단순 Max-Min 퍼지 합성만을 취함으로써 도달가능행렬을 구할 수 있는 개선된 FSM을 제시하였다. 또한 분석자가 결정할 수 있는 역치 p에 따른 탐색적 구조를 제시함으로써 불확실성이 존재하는 시스템을 다양한 각도에서 파악할 수 있는 방법을 제시하였다.

이와 같은 탐색적 절차에 의하여 이론적 모형이 세워지면, 분석자는 실제자료를 통한 자료 부합성의 검증절차를 거치면서 구체적인 시스템 모형을 확립하게 된다. 차후의 연구과제로서는 네트워크 구조에 적합한 통계적 모형화 기법인 구조방정식과 FSM과의 관계를 고찰하여, 모형에 대한 이론적 가설 수립과 자료의 부합성 검증이 순환되는 체계를 구축함으로써 불확정성이

존재하는 시스템도 포괄할 수 있는 일반화된 구조모형화의 절차를 제시하는 것이라 할 수 있다.

## 7. 참고문헌

- [1] 강석천, 「자동생산시스템의 분석과 설계」, 영지문화사, 1995.
- [2] 유동성 · 이교원, 「알기쉬운 퍼지입문」, 교우사, 1996.
- [3] 이광형 · 오길록, 「퍼지이론 및 응용 II 권 : 응용」, 홍릉과학출판사, 1991.
- [4] Didier Dubois & Henri Prade, 「Fuzzy Sets and Systems」, Academic Press, Inc. 1980.
- [5] J. Galbraith, 「Organization Design. Reading」, PA:Addison-Wesley, 1977.
- [6] Eiichiro Tazaki & Micnio amagasa, "Structural Modeling in a Class of Systmes using Fuzzy Sets Theory", *Fuzzy Sets and systems*, Vol.2, 1979, pp.87-103.
- [7] Thomas L. Saaty, 「The Analytic Hierarchy Process」, 1980, pp.199-222.
- [8] A. M. El-mokadem & j. N. Warfield, "Modularization of Large Econometric Models : An Application of Structural Modeling", *IEEE conf, on Decision and Control*, 1974, pp.683-692.
- [9] Chie-Bein Chen & Cerry M. Klein, "Fuzzy Ranking Methods and Multi-Attribute Decision Making", *IEEE International Conference on Syst., Man., and Cyber.*, 1994, pp.475-481.
- [10] George E. P. Box, "Science and Statistics", *Journal of the American Statistical Association*, December, Vol.71, No.356, 1976, pp.791-799.
- [11] John N. Warfield, "Modeling Management", *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cyber.*, Vol.SMC-10, No.4, 1980, p.197.
- [12] John N. Warfield, "Priority structures", *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cyber.*, Vol.SMC-10, No.10, 1980, pp.642-645.
- [13] Robert J. Waller, "The Synthesis of Hierarchical Structures : Technique and Applications", *Decision Sciences*, Vol.7, 1976, pp.657-674.
- [14] Robert J. Waller, "Comparing and Combining Structural Models of Complex Systems", *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cyber.*, Vol.SMC-9, No.9, 1979, pp.580-586.
- [15] Robert J. Waller, "Contextual Relations and Mathematical Relations in Interpretive Structural Modeling", *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cyber.*, Vol.SMC-10, No.3, 1980, pp.143-145.
- [16] Taturori Matsui & Makoto Taketa, "Structural Analysis Method for Fuzzy Rating Scale Data Using Fuzzy Integration", *IEEE International Conference on Syst., Man., and Cyber.*, 1994, pp.493-500.
- [17] Tomasz M. Romanowicz, "Structural Sensitivity Analysis in a Certain Class of Linear Systems", *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cyber.*, Vol.SMC-13, No.3, 1983, pp.413-417.
- [18] Toshiyuki Inagaki & David M. Himmelblau, "Hierarchical Determination of Precedence Order and Representation of Digraphs" *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cyber.*, Vol.SMC-13, No.3, 1983, pp.406-413.