

☒ 응용논문

**초기공정에서 개별관측치를 이용한
EWM-MR 관리도
EWM-MR chart for individual
measurements in start-up process**

지 선 수¹⁾
Ji, seon su

Abstract

In start-up process control applications it may be necessary to limit the sample size to one measurement. A control chart for individual measurements is used whenever it is desirable to examine each individual value from the process immediately. A possible option would be to use an exponential weighted moving(EWM), using modifying statistics with individual measurement, chart for monitoring the process center, and using a moving range (MR) chart for monitoring process variability. In this paper it is shown that there is scheme in using the EWM procedure based on average run length. An expression for the ARL is given in terms of an integral equation, approximated using numerical quadrature. In this case, where it is reasonable to assume normality and negligible autocorrelation in the observations, provide graphs that simplify the design of EWM-MR chart and taking method of exponential smoothing constant(λ) and constant(K) are suggested. The charts suggested above evaluate using the conditional probability.

1. 서 론

현재의 산업생산에 있어서 제품 생산주기가 짧아지고 소량생산을 하는 생산체제로 변모하므로 초기 공정관리문제가 중요하게 되었다. 주어진 시간에 주어진 조건을 나타내는 제품의 수가 하나밖에 얻을 수 없거나 제품생산에서 공정진행속도가 너무 느려 많은 양의 관측치를 얻는 것이 불가능할 때도 있다. 따라서 생산공정의 작업환경이 공정모수를 추정하기 위해 소량의 관련자료를 얻을 수 밖에 없으며 공정모수를 추정하기 위한 사전정보가 충분하든/충분하지않든 공정평균과 분산을 위한 관리도가 공정의 시작으로부터 다루어져야만 한다. 공정의 출발때부터 실시간 관리도를 적용하는 것에 의해 이상원인을 감지하고 제거하는 일을 해야만 공정이 초창기에 정상상태로 되어지고 전반적인 품질개선이 이루어질 것이다.

각 표본점에서 하나 이상의 측정치를 얻는 것이 적당하지 않는 경우 개별관측치를 고려한 공정관리 연구가 많은 학자에 의해 진행되었다. Duncan(1974), Wadsworth et al.(1986),

1) 원주전문대학 조교수

Wheeler, Chambers(1986), Montgomery(1991), Wetherill, Brown(1991) 등은 실질적으로 공정 중심과 변동을 조사하기 위해 개별관측치를 가지고 X 관리도와 MR 관리도를 각각 제안하였다. Rigdon et al.(1994)은 평균과 분산에서 여러변화에 대한 X 관리도와 조합된 X-MR 관리도의 평균 런의 길이를 비교 연구하였다. 즉, 분산변화에 있어서 X 관리도와 조합된 X-MR 관리도가 비슷한 효과가 나타남을 확인하였다. Nelson(1990)은 모든 정보가 관측치 X에 내제되어 있어 이상상태를 지적하는 도구로 X 관리도를 이용하는 것만으로도 충분하며, MR 관리도에 표시된 모든 점은 해석이 어렵고 또한 상관되어 있기 때문에 X와 MR 관리도를 동시에 사용할 때 많은 문제점이 따른다는 것을 지적하였다. Roes et al.(1993)와 Adke, Hong(1994)은 마지막 두 개의 표본점에서 X 관리도에서는 이상원인을 지적하지 못하는데 MR 관리도에서는 신호를 주는 조건부 확률을 계산하였다. Adke, Hong은 공정분산에서의 유용한 정보를 활용하기 위해서는 MR 관리도를 사용할 필요가 있다는 결론을 내었다. Amin, Ethridge(1998)는 개별관측치의 공정중심과 변동을 지적하기 위해 조합된 X-MR 관리도를 제안하여 공정변화를 효과적으로 분석할 수 있다는 것을 보여 주었다. Crowder(1987)는 조합된 X-MR 관리도의 ARL을 계산하기 위해 수치해석적 적분방정식을 이용하여 정확한 ARL 식을 표현하였다.

X 관리도와 MR 관리도를 동시에 사용하는 것은 여러학자들에 찬반된 주장이 나왔지만 최근에는 공정중심(process center)과 공정변동(process variability)을 조사하기 위해서는 X 관리도에 MR 관리도를 추가하여 이용하는 관리도 기법 연구가 활발히 진행되는 추세이다. 비록 개별관측치를 이용한 관리도가 $\bar{X}-R$ 관리도보다 민감도면에서 떨어지는 것은 사실이나, 개별관측치에 관련된 관리도는 정보의 가장 빠른 피드백을 제공하기 때문에 초기공정을 관리해야 하는 현재의 공정관리체계에서 적합하다.

대량생산시스템에서 통계량을 구할 때 임의 시점에서 4 내지 8개 정도의 표본자료를 선택한 후 얻은 자료에 가중치를 갈게하여 평균과 분산을 구하여 사용하여왔다. 임의의 시점에서 자료를 선택할 때 확률적으로 동일조건하에 자료를 동시에 택한다는 가정을 한 상태에서 출발하였다. 그러나 단기 소량생산라인에서는 작은 크기의 표본을 얻는 것조차도 매우 어렵기 때문에 기존의 방법과는 다른 방법으로 통계량을 구할 필요가 있다. 연속적으로 생산된 공정으로부터 다음과 같은 측정자료가 있다고 가정하자.

$$x_t = \mu + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, \dots$$

여기에서 ε_t 는 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 확률 표본오차이다. 관측값 x_t 는 t 번째 시점에서 얻은 것으로 공정평균이 μ 이고 공정분산이 σ^2 인 공정분포로부터 선택되어진다고 가정한다. 각 시점에서 하나의 관측치만을 얻었으며 이웃 관측치와의 상관관계는 없다고 가정한다.

$$x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots$$

이 논문에서는 각각의 시점에서 얻은 개별 관측자료의 가중치를 다르게 하는 지수적 가중이동(exponentially weighted moving:EWM) 통계량을 기본으로하여 개별관측치와 이동범위(moving range:MR)를 구하여 공정중심과 공정변동을 조사하기 위한 EWM-MR 관리도를 설계하는 방법을 제시하며, 타당성을 검토하기 위해 EWM 관리도에서 이상신호를 감지하지 못한상태에서 MR 관리도를 적용할 때 이상신호를 감지할 조건부 확률을 계산한다. X, X-MR, EWM, EWM-MR 관리도에서의 이상신호를 감지할 확률을 비교하여 각각의 관리도 효율성을 평가한다.

2. 개별관측치를 이용한 EWM-MR 관리도 설계

다음과 같은 개별관측치에 지수적으로 가중치(smoothing coefficient)를 주는 지수가중 이동

통계량을 이용한다. 즉 t 시점에서 계산된 통계량은 t 시점에서 택해진 관측치 x_t 에 관련된 정보가 가장 영향력을 많이 받고 t 시점 이전에 얻어진 자료는 과거로 갈수록 그 영향력이 작아지도록 한다. 따라서 다음과 같은 수정된 새로운 지수적 가중 이동 통계량(EWM)은 다음식에 의해 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_t^* &= \lambda \cdot (x_t - x_{t-1}^*) + x_{t-1}^*, \quad t=2, 3, \dots \\ r_t &= |x_t - x_{t-1}|, \quad t=2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 $0 < \lambda \leq 1$ 이고 수정된 공식에 의해 계산된 통계량 x_t^* 는 가장 최근 값의 정보로부터 과거의 정보로 갈수록 그 가중치를 작게 주는 지수적 가중 이동통계량이다. 또한 개별관측치를 공정으로부터 직접 얻어서 사용할 때는 x_t 와 같은 기존의 통계량보다 EWM 통계량이 과거의 정보를 포함하기 때문에 그만큼 정보의 손실이 작다는 것이다.

대부분의 생산공정에서 초기공정에서 미세한 공정변화를 가능한 빨리 감지하여 생산라인을 멈추고 이상원인을 제거하는 조치를 취해야한다. 초기공정에서 작은 변화에 민감하고 정보손실이 적은 통계량을 이용하여 공정을 조사하고 관리하는 것이 중요하다.

통계량 x_t^* 와 r_t 의 평균과 분산은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(x_t^*) &= \mu_0, \quad E(r_t) = 0 \\ \text{Var}(x_t^*) &= \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \cdot \sigma^2, \quad \text{Var}(r_t) = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2)$$

μ_0 는 공정이 통계적으로 안정되어 있을 때 계산된 관리값(control value)이다. EWM 관리도의 관리한계선은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{UCL}_{\text{EWM}} &= \mu_0 + K \cdot \sqrt{\lambda/(2-\lambda)} \cdot \sigma \\ \text{LCL}_{\text{EWM}} &= \mu_0 - K \cdot \sqrt{\lambda/(2-\lambda)} \cdot \sigma \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 K는 임의의 상수이다. MR 관리도를 위한 관리한계선은 다음과 같이 계산된다.

$$\text{UCL}_{\text{MR}} = R \cdot \sigma \quad (4)$$

일반적으로 MR 관리도에서의 관리하한은 0으로하여 공정관리를 수행한다. 즉, EWM 관리도는 양과 음의 방향에서의 공정중심의 변화를 조사하는데 사용하고 MR 관리도는 공정의 양의 변화에서 공정편차를 조사하는데 사용한다.

정규분포에서 $\mu_0 = 0$, $\sigma = 1$ 에서 택해진 공정평균과 표준편차를 관리하고자 한다면 개별 관측치 x_t^* 와 r_t 를 관리도에 표시한다. 즉, t 시점에서 $|x_t^*| > K\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}$ 이면 공정은 이상상태로 판단되어 공정을 중지시키고 필요한 조치를 취한다. 그리고 $|x_t^*| < K\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}$ 인 경우 $r_t > R$ 이면 공정변동이 있음을 판단한다. $|x_t^*| > K\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}$ 이거나 $r_t > R$ 이면 t시점에서 이상상태로 판단하고 필요한 조치를 강구한다. 상수 (λ , K, R)은 EWM-MR 관리도에서 공정이 통계적으로 안정되어 있는 경우 평균 런의 길이를 구할 때 선택할 수 있다.

3. ARL 계산 및 공정모수 결정방법

효율적인 관리도는 관리상태에서는 가능한 오래 공정을 지속시키고 이상상태에서는 가능한 빨리 공정을 중지시킨 후에 이상상태가 발생한 원인을 찾아서 제거해야한다. 공정의 변화가 일어난 후부터 최초로 공정을 중지시킬 때까지 관측된 관측치의 수를 런의 길이(run length)라 하고, 런 길이의 기대값을 평균 런의 길이(average run length:ARL)라 한다. 평균 런의 길이를 고려할 때 공정이 관리값(공정중심:taret value) 근처에서 작동되면 평균 런의 길이는 길다. 반면에 받아들일 수 없는 만큼의 변화가 발생할 때, 즉 이상원인이 발생할 경우 평균 런의 길이는 가능한 짧게 설계된 관리도가 좋다. 일반적으로 관리도의 효율성을 평가할 때 평균런의 길이를 많이 이용한다.

$L(u)$ 를, 가장 최근의 관측치를 u 로 줄 때, 다음 이상신호를 줄 때까지의 평균시간이라고 하자. 다음 관측치 x^* 가 $K\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}$ 보다 크거나 u 와의 차이가 R 이상이면 이상상태로 판단한다.

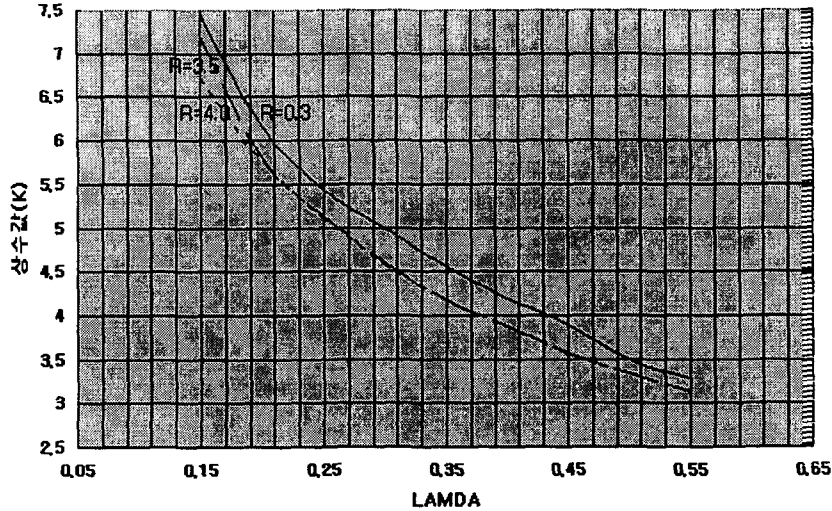
$$\begin{aligned}
 L(u) &= 1 \cdot P(|x^* - u| > R \text{ 혹은 } |x^*| > K \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}) \\
 &\quad + \int_{(y: |y-u| \leq R \text{ 그리고 } |y| \leq K \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}})} [1 + L((1-\lambda)u + \lambda y)] f(y) dy \\
 &= 1 + \frac{1}{\lambda} \int_{\max(-K\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}, u-R)}^{\min(K\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}, u+R)} L(y) f\left(\frac{y-(1-\lambda)u}{\lambda}\right) dy \tag{5}
 \end{aligned}$$

여기에서 $f(x)$ 는 평균이 μ 이고 분산이 σ^2 인 정규밀도함수이다. K 는 임의의 상수이다. T 는 x_2^* 이 주어진 조건에서 런의 길이를 나타낸다면 평균 런의 길이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 ARL &= E[E(T|x_2^*)] \\
 &= E[E(T|x_2^*), \text{여기에서 } |x_2^*| > K\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}] \\
 &\quad + E[E(T|x_2^*), \text{여기에서 } |x_2^*| \leq K\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}] \\
 &= 1 + \frac{1}{\lambda} \int_{-K\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}}^{K\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}} L(y) f\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy \tag{6}
 \end{aligned}$$

(6) 식에서 $L(y)$ 는 모르는 값이며 (5) 식을 참고로하여 근사적인 평균 런의 길이를 구하기위해 구간 $(-K\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}, K\sqrt{\lambda/(2-\lambda)})$ 에서 $L(y)$ 값을 (6) 식에 대입하여 1차 근사화한 다음, Fredholm 적분방정식을 이용한 수치해석적 방법으로 해결할 수 있다. 여기에서는 Crowder가 계산한 방법을 참고로 한다.

공정변화($(\mu - \mu_0)/\sigma$)가 없을 때 $ARL=18.04$ 를 기준으로 R 값에 따라 가중치(λ)와 상수값(K)의 변화를 그래프로 그리면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.



R 값이 주어진 상태에서 가중치(λ)와 K 값의 그래프를 참고로 EWM-MR 관리도 설계를 단순한 방법으로 제안할 수 있다. 예를들어 정상상태에서 $ARL=18.04$ 인 공정에서 EWM-MR 관리도를 설계하기 위해서 그래프에서 $R=3.0$ 인 곡선을 참고로 관리모수(λ, K)를 정할 수 있다.

[형태 1] $R=3.0, \lambda=0.25, K=5.38$

[형태 2] $R=3.0, \lambda=0.30, K=4.99$

가중치(λ)를 정하여 주는 논리적인 이론은 없으며, 경험적으로 작은 변화의 공정을 위해 $0.25 \leq \lambda \leq 0.35$ 에서 정하여 준다.

EWM-MR 관리도 설계는 다음의 방법으로 진행할 수 있다.

- [1 단계] ARL 곡선을 참고로 EWM 관리도와 MR 관리도의 관리한계선을 계산한다. 관리모수 (λ, K, R) 조합을 기본으로 그래프에서 적당한 관리모수를 선택한다.
- [2 단계] 첫 번째로 t 시점에서 얻은 통계량 r_t 를 MR 관리도에 표시하여 공정편차를 조사한다. 두 번째로 t 시점에서 얻은 통계량 x_t^* 를 EWM 관리도에 표시하여 공정중심을 조사한다.

4. EWM-MR 관리도 평가

공정에서의 변화가 발생했을 경우 X 관리도만을 이용할 때 이상신호를 감지하여 신호를 줄 확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_x = P(x_t < LCL_x \text{ 이거나 } x_t > UCL_x) \tag{7}$$

여기에서 x_t, x_{t-1} 은 모두 평균이 0이고 분산이 1인 표준정규분포를 따른다고 가정한다.

공정에서의 변화가 발생했을 경우 X 관리도에서는 이상원인을 감지하지 못하였는데 MR

관리도에서 이상원인을 감지하여 신호를 줄 확률은 (8) 식을 이용하여 Rose, Does, Schurink(1993) 등에 의해 조건부 확률이 계산되었다.

$$P_{MRIX} = P(r_t < LCL_{MR} \text{ 이거나 } r_t > UCL_{MR} | LCL_x \leq x_t, x_{t-1} \leq UCL_x) \tag{8}$$

공정에서의 변화가 발생했을 경우 EWM 관리도만을 이용할 때 이상신호를 감지하여 신호를 줄 확률은 다음과 같이 구할 수 있다. Crowder가 계산한 방법을 참고로 한다.

$$P_{EWM} = P(x_t^* < LCL_{EWM} \text{ 이거나 } x_t^* > UCL_{EWM}) \tag{9}$$

공정에서의 변화가 발생했을 경우 EWM 관리도에서는 이상원인을 감지하지 못하였는데 MR 관리도에서 이상원인을 감지하여 신호를 줄 조건부 확률은 (10) 식에 의해 계산할 수 있다.

$$P_{MRIEWM} = P(r_t < LCL_{MR} \text{ 이거나 } r_t > UCL_{MR} | LCL_{EWM} \leq x_t^* \leq UCL_{EWM}) \tag{10}$$

$r_t < LCL_{MR}$ 인 경우의 확률이 매우 작아서 여기에서는 무시한다.

두 관측치 사이의 이동범위 r_t 에 관련된 분포가 알려져 있지 않기 때문에 일반적으로 Pearson, Hartley(1942)에 의해 제안된 $w_t = r_t / \sigma$ 의 분포함수를 이용한 복잡한 수식을 이용하거나 근사적인 수치해석적 방법에 의한 복잡한 과정으로 계산한다. 여기에서는 Pearson, Hartley가 제안한 방법을 이용한다.

$$P(w) = \left(\int_{-\frac{1}{2}w}^{+\frac{1}{2}w} \phi(x) dx \right)^n + 2n \int_{\frac{1}{2}w}^{\infty} \left(\int_{u-w}^u \phi(x) dx \right)^{n-1} du \tag{11}$$

여기에서 $\phi(x)$ 는 표준 정규밀도함수를 나타낸다.

(7), (8), (9), (10) 식을 이용하여 각각의 관리도에서의 확률을 구한 결과를 다음 <표>에 요약하였다.

<표> 공정변화에 따라 X와 EWM 관리도가 이상원인을 감지할 확률과 공정변화에 따라 X 관리도와 EWM 관리도가 이상원인을 감지하지 못한 경우에 각각의 MR 관리도에서 이상원인을 감지할 조건부 확률

공정변화	P_x	P_{MRIX} (Roes et al(1993))	P_{EWM}	P_{MRIEWM}
0.0	0.0020	0.00058	0.0020	0.002094
0.5	0.0050	0.00098	0.0207	0.006347
1.0	0.0183	0.00228	0.0900	0.016239
1.5	0.0559	0.00467	0.1831	0.035615
2.0	0.1378	0.00811	0.2777	0.069755
2.5	0.2775	0.01224	0.3649	0.121194
3.0	0.4641	0.01659	0.4424	0.189466

5. 결론 및 향후 연구방향

공정변화가 작을 때 EWM 통계량을 이용하여 EWM 관리도만을 이용하는 것이 X 관리도만을 이용할 때 보다 이상원인을 감지하는 능력이 향상됨을 알 수 있다. 변화의 크기가 클 때는 오히려 X 관리도의 감지력이 조금 높다는 것을 알 수 있다. 공정변화가 작을 때 EWM 관리도를 이용하여 이상원인을 감지하지 못한 상태에서 MR 관리도에 의해 이상원인을 감지할 조건부 확률이 X 관리도를 이용하여 이상원인을 감지하지 못한 상태에서 MR 관리도에 의해 이상원인을 감지할 조건부 확률보다 크다는 것을 확인할 수 있다. 따라서 X-MR 관리도보다 EWM-MR 관리도가 공정변화의 감지력이 뛰어난을 확인하였다.

개별관측치를 이용하여 초기공정에서 작은 변화를 조사하는데 두 개의 관리도를 동시에 적용하는 즉, EWM 관리도와 MR 관리도를 함께 운영하는 것이 심리적 효과 및 매우 엄격한 공정을 관리하고자 할 때 효과적일 수 있으며 이때 단순한 관리도 설계를 위해 그래프를 이용한 모수선택 방법을 사용하는 것이 관리도 사용의 유용한 정보를 제공한다.

공정평균과 분산이 동시에 변한 공정에서의 EWM-MR 관리도의 타당성에 대해서는 좀 더 깊은 연구가 진행되어야 한다.

참고문헌

- [1] Adke S.R. and Hong X., "A supplementary test based on the control chart for individuals", *Journal of Quality Technology*, Vol 29, No 1, pp 16-20, 1997.
- [2] Amin R.W. and Ethridge R.A., "A note on individual and moving range control charts", *Journal of Quality Technology*, Vol 30, No 1, pp 70-74, 1998.
- [3] Crowder S.V., "Computation of ARL for combined individual measurement and moving range charts", *Journal of Quality Technology*, Vol 19, No 4, pp 98-102, 1987.
- [4] Crowder S.V., "A program for the computation of ARL for combined individual measurement and moving range charts", *Journal of Quality Technology*, Vol 19, No 4, pp 103-106, 1987.
- [5] Crowder S.V., "A simple method for studying RL distribution of EWMA charts", *Technometrics*, Vol 29, No 4, 1987.
- [6] Duncan, A.J., "Quality control and industrial statistics", R. D. Irwin Inc., Homewood, IL, 1974.
- [7] IMSL, inc, "IMSL user's math/stat manual" 1989
- [8] Montgomery, D.C., "Introduction to statistical quality control", 2nd ed., John wiley & Sons, NY, 1991.
- [9] Nelson L.S., "Control charts for individual measurements", *Journal of Quality Technology*, Vol 14, No 3, pp 172-173, 1982.
- [10] Nelson L.S., "The shewhart control chart-test for special causes", *Journal of Quality Technology*, Vol 16, pp 237-239, 1984.
- [11] Nelson L.S., "Monitoring Reduction in Variation with a range chart", *Journal of Quality Technology*, Vol 22, No 2, pp 163-165, 1990.
- [12] Park C.S. and Ji S.S., "An economic design of \bar{X} -R Chart with variable sampling size scheme", Ph. D. thesis, *Chung-Ang University, Korea*, 1993.

- [13] Person E.S. and Hartley H.O, "The probability integral of range in samples of n observations from a normal population", *Biometrika*, Vol. 34, pp 301- 310, 1942.
- [14] Roberts S.M, "Control chart tests based on geometrics moving average" *Technometrics*, Vol 31, No 3, 1989.
- [15] Kit C.B. Rose and Ronald J.M.M Does and Yvonne Schurink, "Shewhart-type control charts for individual observations", *Journal of Quality Technology*, Vol 25, No 3, pp 188-198, 1993.
- [16] Wadsworth, H.M. , Stephens, K.S. and Godfery, A. B., "Modern methods for quality control and improvement", John wiley & Sons, NY, 1986.
- [17] Wetherill, G.B. and Brown, D.W., "Statistical process control:theory and practice", Chapman & Hall, Lonon, GB, 1991.
- [18] 지선수,이희춘, "초기공정에서 지수가중 이동통계량을 이용한 SPC 관리도, 공업경영학회지, 제20권 41집, pp 157-166, 1997.