工業經營學會誌 第 21卷 第 45輯 1998年 2月 291

一般下限制約을 갖는 一般連續 多重選擇 線型背囊問題의 解法研究
- The Generalized Continuous Multiple-Choice Linear Knapsack Problem with Generalized Lower Bound Constraints -

원 중 연 *

Won, Joong Yeon

Abstract

We present a variant for the generalized continuous multiple-choice knapsack problem[1], which additionally has the well-known generalized lower bound constraints. The presented problem is characterized by some variables which only belong to the simple upper bound constraints and the others which are partitioned into both the continuous multiple-choice constraints and the generalized lower bound constraints. By exploiting some extended structural properties, an efficient algorithm of order $O(n^2 \log n)$ is developed, where n is the total number of variables. A numerical example is presented.

1. 序 論

기업체들이 직면하고 있는 생산관리, 자원배분, 스케쥴링, 작업할당, 경로선정등의 여러 문제들은 정수계획 문제들로 모형화되고 있다. 정수계획의 여러 문제들 중에서 정수배낭문제는 가장 중요한 문제중의 하나이다. 정수배낭문제는 실질적으로 많이 활용되고 있으며, 좀 더 복잡한 문제들을 풀고 분석하기 위한 부문제로서 자주 응용되고 있다.[4]

정수계획문제들에 빈번히 나타나는 제약구조에는 다중선택구조, 용량제한구조, 고정비용구조등이 있으며 특히 다중선택 제약식은 전체 제약식의 상당한 부분을 차지하고 있다.[8] 다중선택 제약에는 여러 변형된 형태들이 존재하며 이에는 내재반복 다중선택제약[3], 연속 다중선택제약[6,7], 일반연속 다중선택제약[1]등이 있다.

일반연속 다중선택제약을 갖는 정수배낭문제(K)는 최근에 논문[1]에서 연구된 바 있다. 문제(K)는 NP-complete[1,5]에 속하므로 최적해를 구하기 위해서 분지한계해법을 적용할 수 있다. 대부분의 상용 컴퓨터 소프트웨어에서 사용되고 있는 분지한계해법은 한계전략으로서 선형계획 완화(relaxation)를 사용하고 있으며, 분지한계해법의 효율성은 분지한계해법 적용시 발생되는 선형계획 완화문제의 최적해를 얼마나 신속하게 찾느냐에 따라 달라지고 있다. 논문[1]

* 경기대학교 산업공학과

에서는 문제 (K)에 분지한계해법 적용시 발생되고 있는 일반연속 다중선택 선형배낭문제 (L)의 최적해를 신속하게 구하는 해법에 대해 연구하였다. 문제 (L)은 연속 다중선택 제약구조 및 단순상한 제약구조를 지니고 있다.

본 연구에서는 문제 (L)의 제약구조에 일반하한제약(generalized lower bound)들이 부가된 새로운 제약구조의 선형계획문제 (P)를 고려하고 최적해를 구하는 신속한 해법에 대해 연구한다. 일반하한제약은 일반상한제약(generalized upper bound)과 함께 현실에서 자주 발생하고 있는 제약들 중의 하나이다.[2] 문제 (P)를 풀기 위하여 본 연구에서 개발된 최적해법의 계산 복잡도는 문제 (L)에 대한 해법[1]과 동일하게 최악상황하에서 $O(n^2\log n)$으로 나타난다. 여기서, n은 총 변수의 수를 나타낸다.

2. 問題 및 解法

본 연구에서 고려된 문제 (P)는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{(P)}\quad \text{Maximize}\quad \Sigma_{i\in I\cup\{0\}}\ \Sigma_{j\in G_i}\ c_{ij}x_{ij} \tag{2.1}$$

$$\text{subject to}\quad \Sigma_{i\in I\cup\{0\}}\ \Sigma_{j\in G_i}\ a_{ij}x_{ij} \le b, \tag{2.2}$$

$$\Sigma_{j\in G_i}\ x_{ij} \le u_i,\ \ i\in I=\{1,\dots m\}, \tag{2.3}$$

$$\Sigma_{j\in G_i}\ x_{ij} \ge l_i,\ \ i\in I=\{1,\dots m\}, \tag{2.4}$$

$$0\le x_{ij} \le 1,\ \ j\in G_i,\ \ i\in I\cup\{0\}. \tag{2.5}$$

여기서, c_{ij}, a_{ij}, $b>0$이다. u_i는 $|G_i|$보다 작은 양의 정수이고 l_i는 $0\le l_i \le u_i$를 만족하는 양의 정수이다. 선택집합 G_i들은 서로 중복되지 않는다. 문제 (P)는 단지 상한제약만을 갖는 변수들 x_{0j} $(j\in G_0)$와 일반연속 다중선택 제약식 (2.3) 및 일반하한 제약식 (2.4)를 갖는 변수들 x_{ij} $(j\in G_i,\ i\in I)$로 구성되어 있다. 각 집합 G_i, $i\in I\cup\{0\}$, 에 속한 지수들은 j_1, j_2가 $j_1<j_2$이면 $a_{ij_1}\le a_{ij_2}$가 성립하도록 해당변수들이 재배열된 것으로 가정한다.

문제 (P)는 문제 (L)에 일반하한 제약식 (2.4)가 추가된 형태이므로 해법의 기본방향으로서 우변상수 b에 대한 모수분석을 활용한다는 점은 동일하다. 그러나 다음과 같은 면에서 해법상 차이점이 발생하고 있다.

문제 (L)에서의 초기가능해는 $x=0$으로 쉽게 선정가능하였으나[1], 문제 (P)에서는 제약식 (2.4)를 만족시키는 초기가능해의 설정이 필요하다. 다음으로 우변상수 b가 증가함에 따라 발생하는 기저가능해의 변화형태는 문제 (L)보다 복잡한 양상을 나타낸다. 즉, 추가된 제약식 (2.4)를 기저가능해가 등식 또는 부등식으로 만족하는가의 여부에 따라 최적기저변수를 찾아내는 기준이 달라지고 있다. 이러한 변화특성은 다음 제시될 정리 1에 구체적으로 밝힌다.

우선 각 변수들 x_{ij}에 대응되는 비율 $\theta_i(0,j)$ 및 두 변수 x_{ij_1}, x_{ij_2}에 대응되는 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$를 다음과 같이 정의한다. 여기서, $a_{ij_1}=a_{ij_2}$이면 $\theta_i(j_1,j_2)\equiv-\infty$로 정의한다.

$$\theta_i(0,j)=c_{ij}/a_{ij},\ \ j\in G_i,\ \ i\in I\cup\{0\},$$

$$\theta_i(j_1,j_2)=(c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1}),\ \ j_1<j_2,\ \ j_1,j_2\in G_i,\ \ i\in I.$$

한 기저가능해에서 각 집합 G_i에 속한 지수들 중 1의 값을 갖는 변수들의 지수집합을 J_i, $i \in I \cup \{0\}$,라 하자. 각 집합 G_i, $i \in I$, 마다 계산된 비율 $\theta_i(0,j)$들 중 가장 큰 l_i개의 변수들을 선정하고 해당하는 지수 j들의 집합을 J_i^0라 하자. 그러면, $|J_i^0| = l_i$, $i \in I$, 이다. 본 연구에서는 초기가능해로서 다음과 같이 쉽게 설정가능한 해 x^0를 사용한다.

$$x_{ij}^0 = 1,\ j \in J_i^0,\ i \in I,\quad x_{ij}^0 = 0,\ j \notin J_i^0,\ i \in I.$$

초기가능해 x^0의 우변상수값은 $b^0 = \Sigma_{i \in I \cup \{0\}} \Sigma_{j \in J_i^0} a_{ij}$가 된다. 따라서, $b^0 \geq b$이면 해 x^0는 문제 (P)의 최적해이다. 그러나, $b^0 < b$일 경우는 다음 정리 1을 반복적용하므로써 우변상수가 b가 되는 최적해가 구해질 때까지 여러 기저가능해들의 발생을 추적한다. 기저가능해들은 우변상수가 증가함에 따라 분수값을 취하게 된다.

정리 1 우변상수 b가 증가하면서 분수값을 갖는 기저변수의 지수 f_1, f_2 및 이들 지수가 속한 지수집합 q는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta_q(f_1, f_2) = \max[\ \max_{j \in G_0 \setminus J_0}\{\theta_0(0,j)\},\ \max_{i \in I_1}[\max_{j_1 \in J_i}\ \max_{j_2 \in G_i \setminus J_i,\, j_1 < j_2}\{\theta_i(j_1, j_2)\},\ \max_{j \in G_i \setminus J_i}\{\theta_0(0,j)\}\ ],$$

$$\max_{i \in I_2}[\max_{j_1 \in J_i}\ \max_{j_2 \in G_i \setminus J_i,\, j_1 < j_2}\{\theta_i(j_1, j_2)\}]\ \ ]$$

여기서, $I_1 = \{i \in I \mid u_i > l_i,\ l_i \leq |J_i| < u_i\}$, $I_2 = \{i \in I \mid u_i \geq l_i,\ |J_i| = u_i\}$이다.

(증명) 우변상수가 b^0일 때의 최적해에서 1의 값을 취하고 있는 변수들의 지수집합은 J_i, $i \in I \cup \{0\}$,이다. 우변상수의 증가에 따라 기저변수가 G_0 또는 G_i ($i \in I$)에서 발생하는가에 따라, 또는 한 G_i ($i \in I$)에 해당되는 $|J_i|$가 u_i보다 작은가 또는 같은가에 따라 기저변화의 형태가 달라지므로 다음과 같은 세가지 경우를 고려한다.

1) b^0가 α만큼 증가할 때 기저변수의 변화가 임의의 집합 G_i, $i \in I_2$,에서 발생한다고 하자. $|J_i| = u_i$ ($i \in I_2$)이므로 $|J_i|$값은 더 이상 증가할 수 없다. 따라서 증가된 α를 충족시키기 위하여는 J_i에 속한 하나의 변수 x_{ij_1}이 현재의 값 1에서 감소하고 J_i에 속하지 않는 다른 변수 x_{ij_2} ($j_2 > j_1$)가 현재의 0에서 양의 값으로 증가하여야 한다. 이때 문제 (P)의 목적함수치 z의 증가비율은 다음 식에서와 같이 $\theta_i(j_1, j_2)$이다.

$$z(b^0 + \alpha) = z(b^0) + \alpha\,\theta_i(j_1, j_2)$$

따라서 선택집합 G_i, $i \in I_2$,들 중에서 우변상수의 증가에 따라 목적함수치가 최대로 증가되는 비율은 다음과 같이 계산된다.

$$\max_{i \in I_2}\ [\ \max_{j_1 \in J_i}\ \max_{j_2 \in G_i \setminus J_i,\ j_1 < j_2}\{\theta_i(j_1, j_2)\}\ ] \tag{2.6}$$

2) b^0가 α만큼 증가할 때 기저변수의 변화가 임의의 한 집합 G_i, $i \in I_1$,에서 발생한다고 하자. 이때 $|J_i|$는 $l_i \leq |J_i| < u_i$를 만족하며 우변상수의 변화에 따라 $|J_i|$의 값은 l_i값을 그대로 가지거나 l_i보다 커질 수 있다. i) $|J_i| = l_i$가 유지되는 경우에는 위의 1)과 같은 경우가 되므로 목적함수치가 최대로 증가되는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\max_{j_1 \in J_i}\ \max_{j_2 \in G_i \setminus J_i,\ j_1 < j_2}\{\theta_i(j_1, j_2)\}$$

ii) $|J_i|$ 가 l_i보다 커지는 경우(단, u_i보다는 작음) 증가된 α를 충족시키기 위하여는 현재 0인 한 변수 x_{ij_2}가 증가하여 양의 분수값을 갖는 기저변수가 된다. 이외의 현재 1을 취하고 있는 변수들에는 변동이 없다. 이때 문제 (P)의 목적함수치 z의 변화는 다음과 같다.

$$z(b^0+\alpha)=z(b^0)+\alpha\theta_i(0,j_2) \tag{2.7}$$

따라서, 목적함수치가 최대로 증가하는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\max_{j\in G_i\setminus J_i}\{\theta_i(0,j)\}$$

이상의 i), ii)로부터 선택집합 G_i, $i\in I_1$,들 중에서 우변상수 증가에 따른 목적함수치의 최대 증가비율은 다음과 같이 계산된다.

$$\max_{i\in I_1}\ [\ \max_{j_1\in J_i}\ \max_{j_2\in G_i\setminus J_i,\, j_1<j_2}\{\theta_i(j_1,j_2)\},\ \ \max_{j\in G_i\setminus J_i}\{\theta_i(0,j)\}\ \ ] \tag{2.8}$$

3) b^0가 α만큼 증가할 때 기저변수의 변화가 집합 G_0에서 발생한다고 하자. $j_1\in J_0$, $j_2\in G_0\setminus J_0$, $j_1<j_2$ 인 j_1, j_2에 대해서 $\theta_0(0,j_1)>\theta_0(0,j_2)$이면 항상 $\theta_0(0,j_2)>\theta_0(j_1,j_2)$가 성립한다. 아울러, $|J_0|$에는 제한이 없으므로, 증가된 α를 충족시키기 위하여는 현재 0인 한 변수 x_{ij_2}가 증가하여 양의 분수값을 갖는 기저변수가 된다. 이외의 현재 1을 취하고 있는 변수들에는 변동이 없다. 따라서 문제 (P)의 목적함수치 z의 변화는 위의 식 (2.7)과 동일하므로, 선택집합 G_0에서 목적함수치가 최대로 증가하는 비율은 다음과 같이 계산된다.

$$\max_{j\in G_0\setminus J_0}\{\theta_0(0,j)\} \tag{2.9}$$

이상의 세가지 경우로부터 b^0가 α만큼 증가할 때 모든 선택집합 G_i, $i\in I\cup\{0\}$,에 대해서 목적함수치가 최대로 증가하는 비율은 식 (2.6), (2.8), (2.9)의 비율들중 가장 큰 비율로 결정된다. 따라서 정리가 성립된다. □

정리 1에서 결정된 기저가 최적으로 유지되는 b^0의 증가분은 $f_1=0$일 경우는 a_{qf_2}가 되며 이때 해당집합 J_q에는 지수 f_2가 추가포함된다. $f_1\neq 0$일 경우는 $a_{qf_2}-a_{qf_1}$가 되며 이때 집합 J_q에는 f_1이 탈락되고 f_2가 교체포함된다. 따라서 우변상수가 b인 최적해는 설정된 초기해 x^0로부터 정리 1을 반복적용하므로써 구해진다. 이때 발생되는 해들은 각 해당되는 비율들에 대응되므로 다음 제시하는 최대비율 탐색해법에서는 해들 대신에 대응되는 비율들을 추적하고 이들의 집합인 비율목록 L을 생성한다.

최대비율 탐색해법

0. $L\leftarrow\phi$, $J_i\leftarrow\phi$, $J_i^0\leftarrow\phi$, $CL_i\leftarrow\phi$, $i\in I$.
1. 각 지수 $j\in G_i$, $i\in I\cup\{0\}$에 대해 다음 비율들을 계산한다.

   $$\theta_i(0,j)=c_{ij}/a_{ij},\ j\in G_i,\ i\in I\cup\{0\}.$$

   집합 G_0에 대해 계산된 비율 $\theta_0(0,j)$들을 비율목록 L에 넣는다. 각 집합 G_i, $i\in I$,별로 계산된 비율들 중 가장 큰 u_i개를 찾아서 후보비율목록 CL_i에 넣는다. 또한 이 비율들 중 가장 큰 l_i개를 선택해서 해당된 지수 j들의 지수집합을 J_i^0, $i\in I$,라 한다. 다음으로 집합 J_i^0의 원소들을 비감소하는 순으로 배열한다.

2. 각 지수 j_1, j_2에 대해 다음과 같은 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$를 계산한다.

$$\theta_i(j_1, j_2) = (c_{ij_2} - c_{ij_1}) / (a_{ij_2} - a_{ij_1}),\ j_1 < j_2,\ j_1, j_2 \in G_i,\ i \in I.$$

   각 G_i ($i \in I$)에 대해 계산된 비율들 $\theta_i(j_1, j_2)$를 비증가하는 순으로 CL_i에 넣는다. 단, 음의 비율들은 제거한다.
3. $CL_i \neq \phi$, $i \in I$,인 CL_i를 선택한다. 모든 $CL_i = \phi$, $i \in I$,이면 과정을 끝낸다.
4. 선택된 목록 CL_i에 해당하는 $|J_i|$가 $|J_i| = u_i$이거나 $u_i = l_i$이면 단계 5로 간다. 아니면, 목록 CL_i에서 첫번째 위치한 최대비율 $\theta_i(j_1, j_2)$를 선택한다. $j_1 = 0$이면 단계 4.2로 간다.
   4.1 $j_1 \in J_i$, $j_2 \notin J_i$이면 $L \leftarrow L \cup \{\theta_i(j_1, j_2)\}$, $J_i \leftarrow J_i \setminus \{j_1\} \cup \{j_2\}$라 한다. J_i에 j_1을 삭제하고 j_2를 비감소순으로 추가시킬 때 이진탐색법을 적용한다. 단계 4.3으로 간다.
   $j_1 \notin J_i$이거나, $j_1 \in J_i$이고 $j_2 \in J_i$이면 단계 4.3으로 간다.
   4.2 $j_2 \notin J_i$이면, $L \leftarrow L \cup \{\theta_i(j_1, j_2)\}$, $J_i \leftarrow J_i \cup \{j_2\}$라 하고, j_2를 비감소순으로 J_i에 추가한다. 추가할 때 이진탐색법을 적용한다.
   4.3 $CL_i \leftarrow CL_i \setminus \{\theta_i(j_1, j_2)\}$이라 한다. $CL_i = \phi$이면 단계 3으로, 아니면 단계 4로 간다.
5. 목록 CL_i에서 첫번째 위치한 최대비율 $\theta_i(j_1, j_2)$를 선택한다.
   5.1 $j_1 \in J_i$, $j_2 \notin J_i$이면 $L \leftarrow L \cup \{\theta_i(j_1, j_2)\}$, $J_i \leftarrow J_i \setminus \{j_1\} \cup \{j_2\}$라 한다. J_i에 j_1을 삭제하고 j_2를 비감소순으로 추가시킬 때 이진탐색법을 적용한다. 단계 5.2으로 간다.
   $j_1 \notin J_i$이거나, $j_1 \in J_i$이고 $j_2 \in J_i$이면 단계 5.2으로 간다.
   5.2 $CL_i \leftarrow CL_i \setminus \{\theta_i(j_1, j_2)\}$이라 한다. $CL_i = \phi$이면 단계 3으로, 아니면 단계 4로 간다.

정리 2 최대비율 탐색해법의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다.

(증명) 단계 1에서 각 비율들 계산에 $O(n)$이 소요된다. 각 지수집합 J_i, $i \in I$,를 구하는데 $O(u_i n_i)$, J_i의 각 원소들을 비감소순으로 배열하는데 $O(u_i \log u_i) \leq O(u_i \log n_i)$의 계산이 필요하다. $n_i = |G_i|$이다. 따라서 모든 $i \in I$에 대해 총 $O(u_{\max} n) \leq O(n^2)$의 계산이 소요된다. $u_{\max} = \max_{i \in I} \{u_i\}$이다. 단계 2에서 각 집합 G_i로부터 비율계산하는데 최대 $O(n_i^2)$이 소요되고 이를 목록 CL_i에 비증가순으로 넣는데 $O(n_i^2 \log n_i)$가 소요된다. 따라서 모든 CL_i, $i \in I$,에 대해서 총 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 단계 3은 상수회에 계산된다. 단계 4에서 한 CL_i로부터 선택된 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$의 j_1 및 j_2가 단계 4.1 및 4.2에서 각각 J_i에 속하는 가를 판단하는 데에는, 집합 J_i의 원소들이 이미 크기순으로 배열되었으므로, 이진탐색법[9]을 적용하면 $O(\log u_i) \leq O(\log n_i)$의 계산이 소요된다. 또한, 집합 J_i에서 j_1을 삭제하고 j_2를 비감소순으로 포함시키는데 $O(\log n_i)$가 소요된다. 단계 4.3에서 CL_i의 원소수는 최대로 $O(n_i^2)$이다. 단계 5는 단계 4의 4.1, 4.2와 동일하게 계산이 소요된다. 최대비율 탐색해법의 주 회전단계인 단계 4 및 단계 5의 최대 반복계산양은 $O(n_i^2)$이다. 그러므로 한 CL_i에 대한 단계 4 및 단계 5의 최대계산양은 $O(n_i^2 \log n_i)$이며 따라서, 모든 CL_i, $i \in I$,에 대한 단계 4 및 5의 최대 반복계산양은 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 이상으로부터 최대비율 탐색해법의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다. □

다음에 제시하는 문제 (P)에 대한 해법은 최대비율 탐색해법을 부프로그램으로 활용하고, 그 결과로 얻어지는 비율목록 L로부터 순차적으로 해당 비율들의 최적여부를 판단하므로써 문제 (P)의 최적해를 매우 쉽게 찾고 있다.

해 법

0. $L \leftarrow \phi$, $J_i \leftarrow \phi$, $i \in I \cup \{0\}$.
1. 문제 (P)에 최대비율 탐색해법을 적용하여 비율목록 L 및 f_i^0, $i \in I$, 를 구하고 L의 모든 비율들을 비감소하는 순으로 재배열한다. 또한, $J_i \leftarrow f_i^0$, $i \in I \cup \{0\}$,으로 놓는다.
2. $\bar{b} \leftarrow \Sigma_{i \in I} \Sigma_{j \in f_i^0} a_{ij}$라 한다. $\bar{b} \geq b$이면 최적해는 다음과 같다. 아니면 단계 3으로 간다.

   $x_{ij} = 1$, $j \in J_i$, $x_{ij} = 0$, $j \notin J_i$, $i \in I$.
3. 비율목록 L로부터 첫 번째 위치한 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$를 선택하고 다음과 같이 $\bar{b}$를 수정한다.

   $j_1 = 0$이면 $\bar{b} \leftarrow \bar{b} + a_{ij_2}$, $j_1 \neq 0$이면 $\bar{b} \leftarrow \bar{b} + (a_{ij_2} - a_{ij_1})$라 한다.
4. $\bar{b} \geq b$이면 다음을 수행하고 단계 5로 간다.

   $q \leftarrow i$, $f_1 \leftarrow j_1$, $f_2 \leftarrow j_2$, $\bar{e} \leftarrow \bar{b} - b$라 한다.

   $\bar{b} < b$ 이면 다음을 수행하고 단계 3으로 간다.

   $j_1 = 0$이면 $J_i \leftarrow J_i \cup \{j_2\}$, $j_1 \neq 0$이면 $J_i \leftarrow J_i \setminus \{j_1\} \cup \{j_2\}$으로 수정한다.
5. 최적해는 다음과 같다. 해법과정을 끝낸다.

   $f_1 = 0$이면 $x_{qf_2} = (a_{qf_2} - \bar{e}) / a_{qf_2}$, $x_{qj} = 1$, $j \in J_q$, $x_{qj} = 0$, $j \in G_q \setminus J_q \setminus \{f_2\}$,

   $x_{ij} = 1$, $j \in J_i$, $x_{ij} = 0$, $j \in G_i \setminus J_i$, $i \in I \cup \{0\} \setminus \{q\}$,

   $f_1 \neq 0$이면 $x_{qf_1} = \bar{e} / (a_{qf_2} - a_{qf_1})$, $x_{qf_2} = (a_{qf_2} - a_{qf_1} - \bar{e}) / (a_{qf_2} - a_{qf_1})$,

   $x_{ij} = 1$, $j \in J_q \setminus \{f_1\}$, $x_{ij} = 0$, $j \in G_q \setminus J_q \setminus \{f_2\}$,

   $x_{ij} = 1$, $j \in J_i$, $x_{ij} = 0$, $j \in G_i \setminus J_i$, $i \in I \cup \{0\} \setminus \{q\}$.

정리 3 문제 (P)에 대한 해법의 계산 복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다.

(증명) 단계 1에서 비율목록 L을 구하기 위하여 최대비율 탐색해법을 적용하면 정리 2에 의해 계산 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 또한 L의 최대 원소수는 $O(n^2)$이므로 원소들을 비감소순으로 배열하는데 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 단계 2, 단계 3, 단계 4, 및 단계 5는 상수회에 계산이 끝나고 해법의 주 회전단계인 단계 3 및 단계 4의 최대회전수는 $O(n^2)$이다. 이상으로부터 해법은 단계 1에서 $O(n^2 \log n)$, 단계 3 및 단계 4에서 최대 $O(n^2)$의 계산이 필요하므로 최악상황하의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다. □

3. 數値例題

다음과 같은 선형배낭문제 (P)의 최적해를 구한다.

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad & \text{Maximize } \Sigma_{i \in I \cup \{0\}} \Sigma_{j \in G_i} c_{ij} x_{ij} \\
& \text{subject to } \Sigma_{i \in I \cup \{0\}} \Sigma_{j \in G_i} a_{ij} x_{ij} \leq 55, \\
& \qquad 1 \leq \Sigma_{j \in G_1} x_{1j} \leq 3, \\
& \qquad 1 \leq \Sigma_{j \in G_2} x_{2j} \leq 2, \\
& \qquad 0 \leq x_{ij} \leq 1, \ j \in G_i, \ i \in I \cup \{0\}.
\end{aligned}
$$

여기서 $I=\{1,2\}$, $G_0=\{1,\ldots,6\}$, $G_1=\{1,\ldots,6\}$, $G_2=\{1,\ldots,7\}$, c_{ij} 및 a_{ij}는 다음 표의 값과 같다.

계수 \ i, j	0						1						2						
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7
c_{ij}	6	7	5	8	7	10	7	10	11	13	16	17	6	10	9	13	11	16	19
a_{ij}	2	5	8	9	12	17	2	4	6	9	13	16	4	6	9	12	16	18	20

문제 (P)의 최적해를 구하기 위하여 해법을 적용한다.

<1회>

0. $L \leftarrow \phi$, $J_i \leftarrow \phi$, $i=0,1,2$.

1. 문제 (P)에 최대비율 탐색해법을 적용하여 비율목록 L 및 J_i^0를 구한다.

(0) $CL_1=\phi$, $CL_2=\phi$, $J_i^0=\phi$.

(1) $L=\{\theta_0(0,1)=3,\ \theta_0(0,2)=1.4,\ \theta_0(0,3)=0.625,\ \theta_0(0,4)=0.888,$
$\theta_0(0,5)=0.583,\ \theta_0(0,6)=0.588\}$,

$CL_1=\{\theta_1(0,1)=3.5,\ \theta_1(0,2)=2.5,\ \theta_1(0,3)=1.833\}$

$CL_2=\{\theta_2(0,2)=1.667,\ \theta_2(0,1)=1.5,\ \theta_2(0,4)=1.083\}$

$J_1^0=\{1\}$, $J_2^0=\{2\}$

(2) $CL_1=\{\theta_1(0,1)=3.5,\ \theta_1(0,2)=2.5,\ \theta_1(1,2)=1.5,\ \theta_1(0,3)=1.833,$
$\theta_1(1,3)=1,\ \theta_1(1,4)=0.857,\ \theta_1(1,5)=0.818, \theta_1(4,5)=0.75,$
$\theta_1(1,6)=0.714,\ \theta_1(3,5)=0.714,\ \theta_1(2,5)=0.667, \theta_1(3,4)=0.667,$
$\theta_1(2,4)=0.6,\ \theta_1(3,6)=0.6,\ \theta_1(2,6)=0.583, \theta_1(4,6)=0.571,$
$\theta_1(2,3)=0.5,\ \theta_1(5,6)=0.333\}$

$CL_2=\{\theta_2(5,6)=2.5,\ \theta_2(1,2)=2,\ \theta_2(5,7)=2,\ \theta_2(0,2)=1.667,$
$\theta_2(6,7)=1.5,\ \theta_2(0,1)=1.5,\ \theta_2(3,4)=1.333,\ \theta_2(0,4)=1.083,$
$\theta_2(3,7)=0.909,\ \theta_2(1,4)=0.875,\ \theta_2(1,7)=0.813,\ \theta_2(3,6)=0.778,$
$\theta_2(4,7)=0.75,\ \theta_2(1,6)=0.714,\ \theta_2(2,7)=0.643,\ \theta_2(1,3)=0.6,$
$\theta_2(2,4)=0.5,\ \theta_2(2,6)=0.5,\ \theta_2(4,6)=0.5,\ \theta_2(1,5)=0.417,$
$\theta_2(3,5)=0.286,\ \theta_2(2,5)=0.1\}$

(3) CL_1으로부터 L에 추가되는 비율들은 다음과 같다.

$L=L\cup\{\theta_1(0,1),\ \theta_1(0,2),\ \theta_1(0,3),\ \theta_1(1,4),\ \theta_1(4,5),\ \theta_1(3,4),\ \theta_1(2,6)\}$

CL_2으로부터 L에 추가되는 비율들은 다음과 같다.

$L=L\cup\{\theta_2(0,2),\ \theta_2(0,1),\ \theta_2(1,4),\ \theta_2(4,7),\ \theta_2(2,4),\ \theta_2(4,6)\}$

이상으로부터 비율크기의 감소순으로 배열된 L은 다음과 같다.

$L=\{\theta_1(0,1),\ \theta_0(0,1),\ \theta_1(0,2),\ \theta_1(0,3),\ \theta_2(0,2),\ \theta_2(0,1),\ \theta_0(0,2),$
$\theta_0(0,4),\ \theta_2(1,4),\ \theta_1(1,4),\ \theta_2(4,7),\ \theta_1(4,5),\ \theta_0(0,3),\ \theta_1(3,4),$
$\theta_0(0,6),\ \theta_0(0,5),\ \theta_1(2,6),\ \theta_2(2,4),\ \theta_2(4,6)\}$

2. $\bar{b}(=2+4) < b(=55)$이므로 단계 3으로 간다.

3. $\theta_1(0,1)$선택, $\bar{b}=0+2=2$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_1=\{1\}$

<2회>

3. $\theta_0(0,1)$선택, $\bar{b}=2+2=4$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_0=\{1\}$

<3회>

3. $\theta_1(0,2)$선택, $\bar{b}=4+4=8$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_1=\{1,2\}$

<4회>

3. $\theta_1(0,3)$선택, $\bar{b}=8+6=14$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_1=\{1,2,3\}$

<5회>

3. $\theta_2(0,2)$선택, $\bar{b}=14+6=20$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_2=\{2\}$

<6회>

3. $\theta_2(0,1)$선택, $\bar{b}=20+4=24$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_2=\{1,2\}$

<7회>

3. $\theta_0(0,2)$선택, $\bar{b}=24+5=29$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_0=\{1,2\}$

<8회>

3. $\theta_0(0,4)$선택, $\bar{b}=29+9=38$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_0=\{1,2,4\}$

<9회>

3. $\theta_2(1,4)$선택, $\bar{b}=38+8=46$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_2=\{2,4\}$

<10회>

3. $\theta_1(1,4)$선택, $\bar{b}=46+7=53$

4. $\bar{b}<b$ 이므로, $J_1=\{2,3,4\}$

<11회>

3. $\theta_2(4,7)$선택, $\bar{b}=53+8=61$

4. $\bar{b}>b$ 이므로, $q=2$, $f_1=4$, $f_2=7$, $\bar{e}=61-55=6$

5. 최적해는 다음과 같다.

$x_{01}=x_{02}=x_{04}=1$, $x_{0j}=0$, $j=3,5,6$,

$x_{12}=x_{13}=x_{14}=1$, $x_{1j}=0$, $j=1,5,6$,

$x_{24}=6/8$, $x_{27}=2/8$, $x_{22}=1$, $x_{2j}=0$, $j=1,3,5,6$.

4. 結 論

본 연구에서는 일반연속 다중선택 선형배낭문제[1]의 활용성을 더욱 넓히기 위하여 현실에서 자주 발생되고 있는 일반하한제약[2]을 고려하고 이를 새로운 제약으로 부가한 새로운 선형배낭문제를 제시하였다. 이 문제의 제약구조는 단순상한 제약, 일반연속 다중선택 제약, 그리고 일반하한 제약구조로 이루어져 있다.

본 연구에서는 논문[1]에서와 같이 해들에 대한 자료들을 순서화하고 여기에 이진탐색법을 적용하여 최적해 탐색의 효율성을 높였다. 아울러 문제에 성립하는 새로운 구조적 특성을 찾아내고 이를 활용하여 기저가능해의 변화를 추적하므로써 증가된 제약식을 암시적으로 처리하는 효율적인 해법을 개발하였다. 개발된 해법은 최악상황하에서 문제의 제약식 수에 관계없이 총 변수의 수 n으로만 표현되는 효율적인 $O(n^2 \log n)$의 계산복잡도를 갖는다.

參考文獻

[1] 원 중연, "일반연속 다중선택 선형배낭문제의 효율적인 해법연구," 「대한산업공학회지」, 제23권, 제4호, 1997. (인쇄중)

[2] 원 중연, 최 진영, "일반하한 및 일반상한 제약하의 연속 최대최소 자원배분," 「공업경영학회지」, 제20권, 제43집, pp. 145-152, 1997.

[3] Armstrong, R. D., P. Sinha, and A. A. Zoltners, "The Multiple Choice Nested Knapsack Model," *Magt. Sci.* 28, pp. 34-43, 1982.

[4] Dudzinski, K. and S. Walukiewicz, "Exact Methods for the Knapsack Problem and its Generalizations," *European J. Opnl. Res.* 28, pp. 3-21, 1987.

[5] Garey, M. R. and D. S. Johnson, *Computers and Intractibility-A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979.

[6] Ibaraki, T., T. Hasegawa, K. Teranaka, and J. Iwase, "The Multiple-Choice Knapsack Problem," *J. of Opns. Res. Soc. of Japan* 21, pp. 59-93, 1978.

[7] Ibaraki, T., "Approximate Algorithms for the Multiple-Choice Continuous Knapsack Problems," *J. of Opns. Res. Soc. of Japan* 23, pp. 28-62, 1980.

[8] Johnson, E. L., M. M. Kostreva, and U. H. Suhl, "Solving 0-1 Integer Programming Problems Arising from Large Scale Planning Models," *Opns. Res.* 33, pp. 803-819, 1985.

[9] Kronsjö, L. I., *Algorithms: Their Complexity and Efficiency*, pp. 293-310, Wiley, Chichester. 1979.