

## 2관성 공진 시스템의 강건제어

## (The Robust Control of Two Mass Spring System)

曹 燾 鉉 \*, 李 鍾 龍 \*\*, 李 相 喆 \*\*

(Do-Hyeoun Cho, Jong-Young Lee, and Sang-Chuel Lee)

## 요 약

2관성 공진(TMS: Two-Mass Spring) 시스템은 비틀림 진동을 다루기 위하여 고려할 수 있는 가장 간단한 한 모델이다. 이러한 시스템은 비틀림 진동을 억제하며, 원하는 특성을 달성하기 위한 제어기 설계가 요구된다. 본 논문에서는 2관성 공진 시스템에 대하여 상태 피드백을 고려하고, 각 상태가 응답성능에 미치는 영향을 살펴본다. 이 결과와 상태 피드백의 이득을 이용하여 제어기의 설계 매개변수와 LQ 및  $H_\infty$  제어의 하중합수 결정에 대한 기본 지침을 제시한다.

## Abstract

The Two-Mass Spring(TMS or Two-Inertia Resonance) system is one of the simplest models which generate a torsional vibration. In this system, it is required to design a controller achieving the control performance while suppressing the torsional vibration. In this paper, we compared and considered with the state feedback effects for the TMS system. By connecting each controller design to the state feedback control, we could predict each controller performances and decide weighting functions and parameters of LQ and  $H_\infty$  controller.

## I. 서 론

전동기와 부하전동기가 어느 정도 유연성이 있는 축으로 결합된 역학 시스템은 축의 비틀림 진동이 발생하므로 2관성 공진(TMS: Two-Mass Spring) 시스템으로 해석할 수 있다. 이러한 2관성 시스템의 제어는, Morimoto와 Hori 등에 의하여 공진비 제어<sup>[1,2]</sup>, PI 제어기에 1차 지연 여파기(lag filter)를 포함시킨 제어<sup>[3]</sup>,  $H_\infty$  제어<sup>[4]</sup> 등 다수의 제어방식이 연구되어 왔다. 특히, 외란 관측기로 추정된 축 회전력을 피드백

하여 공진 주파수를 조정하고, 이것에 PI 또는 I-P제어를 적용하는 공진비 제어 방식은 간단한 구성에도 불구하고 우수한 진동억제 효과가 얻어진다. 이와 같은 효과는, 종래의 일반적인 제어방법인 PI제어 보다, 공진비 제어 방식이 외란 추정기가 추가되므로 PID제어 구조를 갖고 있기 때문이다. 또한 LQ 제어 방식은 최적제어에 의하여 실현되기 때문에, 두 방법 모두 실용적인 제어방법이라 할 수 있다<sup>[1]</sup>.

그러나, 2관성 공진 시스템에 불확실성이 존재하는 경우 공진을 발생시키는 주파수 등이 변동하게되며, 최악의 경우 공진을 보상하는 제어기가 오히려 공진을 가중시킬 수도 있게된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 Morimoto와 Takeda등이 제안한 것처럼,  $H_\infty$  방법에 의하여, 불확실성에 대하여 강건 안정한 제어기 설계가 가능하다. 이들의 방법은 불확실성의 구조를 모르는 경우에 대하여 이루어졌는데, 일반적으로 2관성 공진 시스템의 공진요소는 스프링 상수의 변동이

\* 正會員, 仁德大學 메카트로닉스과  
(Induk College Dept. of Mechanical Eng.)

\*\* 正會員, 光云大學校 制御計測工學科  
(Kwangwoon University Dept. of Control & Instrumentation Eng.)

接受日字: 1998年8月19日, 수정완료일: 1998年11月25日

나 부하전동기의 변동으로부터 발생하므로, 매개변수 불확실성의 문제로 다루는 것이 타당하다.

본 논문에서는 2관성 공진 시스템의 상태 피드백과 제어 목적에 따라 설계된 제어기의 매개변수 사이의 관계를 분석하여, PI와 공진비 제어기의 매개변수 결정과 LQ 및  $H_\infty$  제어기의 설계에 이용되는 하중함수 선택 방법을 제시한다. 또한 매개변수 불확실성을 고려한 강건제어기의 적용효과를 나타낸다.

## II. TMS 시스템의 상태 피드백 제어

TMS시스템에 상태 피드백을 이용하여 속도제어를 적용하고, 시스템의 상태변수를 전동기속도  $\omega_M$ , 부하 속도  $\omega_L$ 과 축 회전력  $\tau_s$ 로 한다. 그러면 상태 피드백을 갖는 페루프 시스템은 그림 1과 같다. 여기서, TMS시스템은 그림 1의 실선 내부 블록으로 표현되며,  $J_M$ 과  $J_L$ 은 각각 전동기와 부하의 관성 모멘트이고,  $\tau_M$ 과  $\tau_D$ 는 전동기 회전력과 외란 입력이며,  $\omega_R$ 는 기준속도이고,  $k_s$ 는 축의 스프링 매개변수이다. 또한,  $K_1, K_2, K_3, K_4$ 는 제어기의 계수이며, 기준 속도에 대한 추종편차를 제거하기 위하여 추종오차를 적분하는 제어기를 고려하였다.

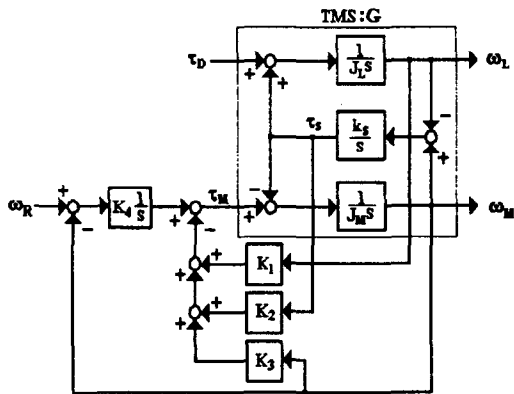


그림 1. 상태 피드백 제어기를 갖는 TMS 시스템  
Fig. 1. TMS system with state feedback controller.

그림 1에 표현된 제어대상 TMS 시스템의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_0 x_0 + B_{01} w + B_{02} u \\ y_0 &= C_0 x + D_0 w \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 상태  $x_0$ 는  $[\omega_L, \tau_s, \omega_M]^T$ 이고, 외란  $w$ 는  $[\omega_R, \tau_L]^T$ , 제어입력  $u = \tau_M$ , 측정출력  $y_0 = \omega_M - \omega_R$ 이며, 기준입력  $r = \omega_R$ 이다. 또한, 시스템의 계수행렬  $A_0, B_{01}, B_{02}, C_0, D_0$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_L} & 0 \\ -k_s & 0 & k_s \\ 0 & -\frac{1}{J_M} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{01} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_M} \end{bmatrix}, \\ C_0 &= [0 \ 0 \ 1], \quad D_0 = [-1 \ 0] \end{aligned} \quad (2)$$

또한, 구동토크와 외란 토크에서 구동전동기의 전달함수는 각각 식(3)과 식(4)와 같다.

$$T_{\omega_M \tau_M} = \frac{J_L s^2 + k_s}{J_M J_L s^3 + k_s (J_M + J_L) s} \quad (3)$$

$$T_{\omega_M \tau_D} = \frac{k_s}{J_M J_L s^3 + k_s (J_M + J_L) s} \quad (4)$$

식(3)에서 극점과 영점이 되는 주파수를 TMS의 공진(resonance)과 반공진(anti-resonance) 주파수로 정의하고, 각각  $\omega_r$ 과  $\omega_a$ 로 표현하고,  $R_J$ 는 관성비로 다음과 같다.

$$\omega_r^2 = \frac{k_s}{J_M} + \frac{k_s}{J_L}, \quad \omega_a^2 = \frac{k_s}{J_L}, \quad R_J = \frac{J_L}{J_M} \quad (5)$$

그러면, 그림 1에서 상태피드백 제어기는 다음과 같이 고려된다.

$$u = -[K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 \frac{1}{s} (x_3 - r)] \quad (6)$$

즉, 그림 1의 페루프 시스템으로부터, 기준속도에서 부하속도까지의 전달함수  $T_{\omega_M \omega_R}$ 와 외란 토크에서 부하속도까지의 전달함수  $T_{\omega_M \tau_D}$ 는 각각 다음 식 (7), (8)과 같으며, 각각 기준속도에 대한 추종특성에 대한 강건 특성과 외란 억압특성을 나타내고, 외란 억압 특성은 대역통과 특성을 보인다.(본 논문에서 제시된 방정식들의 전개와 기호연산에 의한 수식의 전개는 Mathematica ver. 3.0을 이용하였다<sup>[5].</sup>)

$$T_{\omega_M \omega_R}(s) = \frac{k_s K_4}{J_L J_M P_s(s)} \quad (7)$$

$$T_{\omega_L r_d}(s) = \frac{J_M s^3 + K_3 s^2 + (k_s + k_s K_2 + K_4) s}{J_L J_M P_s(s)} \quad (8)$$

여기서,  $P_s(s)$ 는 페루프 시스템의 특성 방정식으로 식 (9)와 같다.

$$P_s(s) = s^4 + \frac{K_3}{J_M} s^3 + \left(\omega_r^2 + \frac{K_2 k_s + K_4}{J_M}\right) s^2 + \frac{\omega_a^2}{J_M} (K_1 + K_3) s + \frac{\omega_a^2}{J_M} K_4 \quad (9)$$

상태 피드백에 의한 영향을 관찰하기 위하여 식 (9)의 특성방정식을 다음 식 (10)과 같이 극배치를 하자. 여기서, 주어진 극점  $\mu_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )는  $Re(\mu_i) < 0$ 이다.

$$P_s(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) \quad (10)$$

식 (10)을 특성 다항식의 성질을 고찰하여, 나타내면 식 (11)과 같다.

$$P_s(s) = s^4 + \alpha_1 \omega_n s^3 + \alpha_2 \omega_n^2 s^2 + \alpha_3 \omega_n^3 s + \omega_n^4 \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \omega_n &= (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)^{\frac{1}{4}} \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{\omega_n^3} (\mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\omega_n^2} (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4) \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{\omega_n} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에서  $\omega_n$ 은 시스템의 응답속도를 결정하는 매개변수이고,  $\alpha_1 \sim \alpha_3$ 는 시스템의 감쇄특성을 결정하는 매개변수가 된다. 여기서, 식 (9)와 식 (11)을 비교하여 상태피드백 이득  $K_1 \sim K_4$ 를 구하면 다음과 같다.

$$K_1 = J_M \frac{\omega_n^3}{\omega_a^2} \alpha_3 - J_M \omega_n \alpha_1 \quad (13.a)$$

$$K_2 = \frac{1}{R_f} \left( \frac{\omega_n}{\omega_a} \right)^2 \left\{ \alpha_2 - \left( \frac{\omega_n}{\omega_a} \right)^2 \right\} - \frac{1}{R_f} - 1 \quad (13.b)$$

$$K_3 = J_M \omega_n \alpha_1 \quad (13.c)$$

$$K_4 = \frac{J_M \omega_n^4}{\omega_a^2} \quad (13.d)$$

상태 피드백에서 부하속도  $\omega_L$ 의 피드백 효과를 검토하기 위하여, 식 (13.a)에서  $K_1$ 을 0으로 하면, 식 (14.a)가 얻어진다. 감쇄특성을 결정하는 매개변수  $\alpha_1 \sim \alpha_3$ 의 자유로운 설정에 의하여 제어기 매개변수  $K_1 \sim K_4$ 를 결정 할 수 있으나, 응답속도를 결정하는 매개변수  $\omega_n$ 은 감쇄특성에 따라 고정된다. 그러므로, 부하속도  $\omega_L$ 의 피드백은 응답속도를 결정한다고 할 수 있다.

$$\omega_n = \omega_a \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} \quad (14.a)$$

그리고 식 (14.a)의 조건에 부가하여, 다음에 축 회전력  $\tau_s$ 의 피드백 이득  $K_2$ 의 역할을 검토하기 위하여, 식 (13.b)에서  $K_2$ 를 0으로 하면, 식 (14.b)로 표현되고, 매개변수  $\alpha_2$ 는 결정되며, 매개변수  $\alpha_1$ 과  $\alpha_3$ 의 관계에 의하여  $K_3$ 과  $K_4$ 는 다음 식(14.c) (14.d)에 의하여 결정된다.

$$\alpha_2 = \left( \frac{\omega_a}{\omega_n} \right)^2 (1 + R_f) + \left( \frac{\omega_n}{\omega_a} \right)^2 \quad (14.b)$$

$$K_3 = J_M \omega_a \alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} \quad (14.c)$$

$$K_4 = J_M \omega_a^2 \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right)^2 \quad (14.d)$$

그런데, 관성비  $R_f$ 가 적어지면  $\alpha_2$ 는 적어지므로, 관성비가 적은 2관성 시스템에는 감쇄특성이 악화된다. 이것은 축 회전력의 피드백이 시스템의 감쇄특성에 영향을 주는 것으로 고려할 수 있다. 그러므로, 그림 1의 시스템에서 피드백 제어이득이  $K_1 = K_2 = 0$ 이고  $K_3$ 과  $K_4$ 만 있다면, 전동기의 속도만을 피드백 하는 PI제어가 된다. 즉, 2관성 제어대상에 대하여 PI제어만으로는 응답속도를 개선할 수 없고 감쇄특성도 관성비에 종속되어 적용범위가 제한된다.

상태 피드백에서 각 상태의 영향에 의하여, 부하속도  $\omega_L$ 은 시스템의 응답속도를 결정하며, 축 회전력  $\tau_s$ 의 피드백은 감쇄특성에 영향을 준다.

다음으로 상태 피드백을 통한 극점배치법과 다른 제어기법과의 관계를 고찰한다.<sup>[1,2,4,6,7]</sup>

### Ⅲ. 다른 제어방식과 상태 피드백에 대한 관계

다음의 3가지 제어 방식으로 제어를 설계하고, 상태 피드백에 관하여 비교 논의하고자 한다.

#### 1. 공진비 제어 방식

전동기의 속도만으로는 감쇄특성을 개선하기 어려우므로, 축 회전력  $\tau_s$ 를 포함시켜 제어를 구성하는 것이 좋다. 그러나 일반적으로 축 회전력은 측정하기 어려우므로 전동기의 속도를 이용하여 축 회전력을 추정한다<sup>[1,2]</sup>.

2관성 제어대상에 대하여 그림 2와 같이 추정기로 추정된  $\hat{\tau}_s$ 에 의한 피드백 입력  $K_2\hat{\tau}_s$ 와  $\tau_o$ 을 새로운 입력으로 하는 추정기가 있는 제어대상  $\hat{G}$ 을 고려하자. 여기서, 추정기 시정수의 역수인 외란 추정기 이득  $g$ 는 충분히 크다고 가정하여 추정기의 추정지연을 무시하면(즉,  $\hat{\tau}_s = \tau_s$ ), 제어대상  $\hat{G}$ 의 공진 주파수  $\omega_{rR}$ 는 다음과 같이 되어 제어기  $K_R$ 에 의하여 조정될 수 있다.

$$\omega_{rR} = \sqrt{k_s \left( \frac{K_R}{J_M} + \frac{1}{J_L} \right)} \quad (15)$$

여기서,  $K_R = K_2 + 1$  이다.

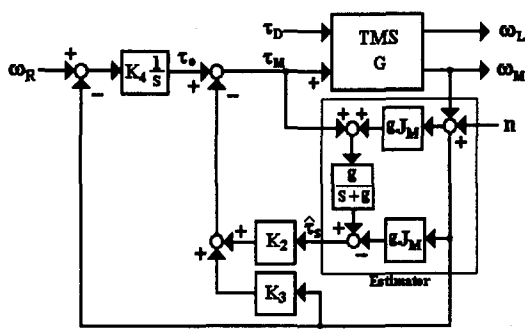


그림 2. 추정기를 갖는 공진비 제어  
Fig. 2. Resonance ratio control with estimator.

그러나, 제어대상  $\hat{G}$ 의 반공진 주파수는 제어대상  $G$ 와 동일한  $\omega_a$ 이므로 공진 주파수와 반공진 주파수의 비로 정의된 공진비  $R$ 은 다음과 같이  $K_R$ 에 의하여 제어되며, 이것을 공진비 제어라 한다<sup>[1]</sup>.

$$R_r = \frac{\omega_{rR}}{\omega_a} = \sqrt{R_r K_R + 1} \quad (16)$$

한편, 공진비 제어된 제어대상  $\hat{G}$ 에 대하여 그 특성을 살펴보자. 이를 위하여 식 (10)을 2항 계수법으로 매개변수를 선택하면, 식 (17)과 같다.

$$P_{s2}(s) = (s^2 + 2\xi\omega_a s + \omega_a^2)^2 \quad (17)$$

그러면, 식 (16)의 공진비  $R_r$ 와 감쇄계수  $\xi$ 의 관계는 다음 식과 같다.

$$R_r = \sqrt{4\xi^2 + 1} \quad (18)$$

그런데, 그림 2의 공진비 제어 시스템은 식 (19)과 같은 PID제어기를 갖는 제어 시스템과 동일한 구조를 갖고 있음을 알 수 있다.

$$K_{PID} = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{T_D s + 1} \quad (19)$$

여기서, 각 PID제어기 이득과 상태 피드백 이득  $K_2, K_3, K_4$ 의 관계는 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{1}{g(1+K_2)} \\ K_P &= -\frac{gK_3 + gK_2K_3 + K_2K_4}{g(1+K_2)^2} \\ K_I &= -\frac{K_4}{1+K_2} \\ K_D &= -\frac{-gJ_MK_2 + K_3}{g(1+K_2)} + \frac{gK_3 + gK_2K_3 + K_2K_4}{g^2(1+K_2)^3} \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)의 PID의 매개변수  $T_D, K_P, K_I, K_D$ 는 상태 피드백 이득  $K_2, K_3, K_4$ 와 외란 추정기 이득  $g$ 의 함수이다. 여기서, 그림 2에서 외란 추정기의 이득  $g$ 는 축 회전력의 추정지연을 작게 하기 위하여 크게 설정하는 것이 바람직하지만, 측정잡음 등의 영향을 고려하면 사실상  $g$ 는 작은 것이 바람직하다.

$g$ 를 작게 하면 식 (20)에서 제어이득을 설정하여도 폐루프 시스템의 극배치가 식 (17)로 부터 이루어지기 때문에 응답 특성이 나빠지므로, 응답특성이 나빠지지 않는 범위에서 될 수 있는 한 작은 값으로  $g$ 를 설정한다. 대략적으로  $g$ 는  $\omega_a$ 의 3배정도 설정하면, 만족스러운 응답특성을 얻을 수 있다.

그러므로, PID매개변수는 극배치 제어기 매개변수의 함수로 표현된다. 이것은 진동비 제어 설계문제가 상태 피드백에 의한 극배치 문제와 등가임을 의미한다. 즉, 진동비 제어의 PID계수는 식 (20)을 통하여 극점 배치법에서 얻어진 이득  $K_2, K_3, K_4$ 로 적절히 결정할 수 있음을 보여준다.

## 2. LQ 제어 방식

극점배치법 및 공진비 제어방법은 준 최적이라 할 수 있다. 최적제어 기법과 연관 관계를 고찰하기 위하여, 그림 1의 시스템에 대한 변환된 제어대상을 고려하면, 다음 식 (21)과 같다<sup>[7,8]</sup>.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ y &= Cx + D_{11}w + D_{12}u \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,  $x = [\omega_L, \tau_s, \omega_M, e]^T$ ,  $w = [r, \tau_L]^T$ ,  $y = [x_1, x_3]^T$ 이며,  $e = \frac{1}{s}(x_3 - r)$ 이다. 또한, 시스템의 계수행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_L} & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_M} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

그리고, 다음 식 (23)과 같은 선형 2차 평가지수를 최소화하도록 제어기를 설계한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^T Q e + u^T R u) dt \quad (23)$$

여기서,  $Q$ 는 양의 반정부호 대칭행렬이고,  $R$ 은 양의 정부호 상수로 하중요소이다.

식 (23)의 평가함수를 최소화하는 상태 피드백 제어기의 해를 얻기 위한 조건은 다음이 리카티 방정식 (Riccati equation)으로 표현된다.

$$0 = A^T P + PA + Q - PB_2 R^{-1} B_2^T P \quad (24)$$

여기서, 상태 피드백 제어기는 다음과 같다<sup>[9]</sup>.

$$u = -R^{-1} B_2^T P x = -Kx \quad (25)$$

그러면, 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$y = C(sI - A_{cl})^{-1} B_1 w \quad (26)$$

$$A_{cl} = A - B_2 K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_L} & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & k_s & 0 \\ -\frac{1}{J_M} K_1 & -\frac{1}{J_M} (1 + K_2) & -\frac{1}{J_M} K_3 & -\frac{1}{J_M} K_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

다음과 같은 Hamilton 행렬을 고려하면,

$$H = \begin{bmatrix} A & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (28)$$

상태 피드백 제어기  $K$ 와 하중행렬  $Q$  및  $R$ 의 관계를 고려하기 위하여, 먼저  $H$ 의 행렬식을 구하면 다음과 같다.

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \det(-sI - A^T) \times \det(R + B_2^T (-sI - A^T)^{-1} Q (sI - A)^{-1} B_2) R^{-1} \quad (29)$$

또한, 주어진 시스템에서 제어 가능하고, 제어기가 그림 1과 같이  $K_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )로 주어진다면, 점근적으로 안정하다. 그러면, Hamilton 행렬  $H$ 의 좌반면 고유치는 제어기가 포함된 2관성 제어 시스템  $A_{cl}$ 의 고유치와 일치한다.

즉, 식 (30)을 만족해야한다.

$$\det(sI - H) = \det(-sI - A_{cl}) \det(sI - A_{cl}^T) \quad (30)$$

이것을 그림 1의 2관성 제어대상에 적용하여 계산 (부록 참조)하고, 계수비교법에 의하여 대각 하중 행렬  $Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4)$ 와  $R$ 를 피드백 제어기 이득  $K_i$ 로 표현하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_1 R^{-1} &= K_1^2 + 2(K_1 K_3 - J_L(1 + K_2)K_4 + J_M k_s K_2) \\ q_2 R^{-1} &= K_2^2 + 2(1 - \frac{J_M}{J_L})K_2 + \frac{2}{k_s}(1 + K_2)K_4 - 2\frac{K_1 K_3}{J_L k_s} \\ q_3 R^{-1} &= K_3^2 + 2J_M(k_s K_2 - K_4) \\ q_4 R^{-1} &= K_4^2 \end{aligned} \quad (31)$$

식 (31)의 하중요소는 상태피드백 제어기  $K_1, K_2, K_3, K_4$ 의 함수로 표현된다. 즉, 극점배치법으로 표현된 식 (13)과 등가가 되며, 해석적으로 제어기의 특성이 PI, PID 또는 공진비 제어 형태의 제어 특성을 갖

도록 하중함수  $Q$ 를 선택할 수 있음을 보여준다. 부록에  $K_1$ 과  $K_2$ 가 영이 되는 경우, 즉 PI와 PID특성을 갖는 하중함수  $Q$ 를 나타내고, 식 (17)의 2항 계수법에 의한 극배치로 표현하였다.

다음으로  $H_\infty$  제어와 상태 피드백 제어기의 관계를 고찰한다.

### 3. $H_\infty$ 제어 방식

그림 3의 일반화 제어대상을 사용하여  $H_\infty$  제어기  $K_{hinf}(s)$ 를 설계하자<sup>[1,4,6,10]</sup>. 제어기 설계를 위하여 제어된 출력 변수를  $[z_x^T, z_u]^T = [z_1, z_2, z_3, z_u]^T$ 로 정의하고, 제어목적에 따른 하중함수를 다음과 같이 선정한다<sup>[6,10]</sup>.

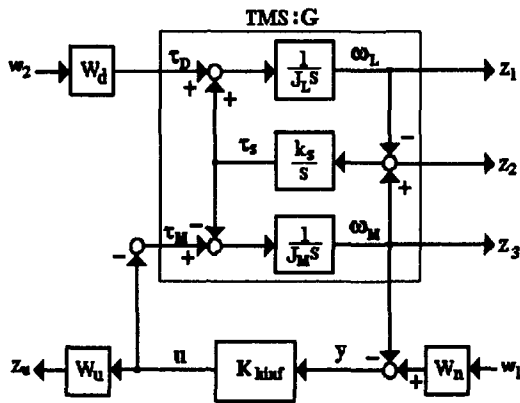


그림 3.  $H_\infty$  제어  
Fig. 3.  $H_\infty$  control.

먼저, 하중함수  $W_d$ 는 외란 토크  $\tau_D$ 로부터  $z_x$ 까지의 페루프 특성을 지정하는 하중함수로 외란 억압 특성을 결정하므로, 2관성 시스템의  $\tau_D$ 에서  $z_x$ 로의 페루프 이득특성이 축 회전 진동이 발생하지 않는 1관성 시스템의 특성과 같은 형상이 되도록 설정한다. 즉, 2관성 제어대상을 부하가 없는 1관성 부분으로 고려하고, 1관성 제어대상에 PI제어로 속도제어를 할 때의 외란 억압 특성 식 (32)를 이용하였다<sup>[4]</sup>.

$$T_{\omega_{\tau D}} = \frac{s}{J_M s^2 + K_P s + K_I} \quad (32)$$

그러면, 하중함수  $W_d$ 의 일반적인 형태는 식 (33)과 같다.

일반적으로  $\gamma_d$ 는 설계 매개변수로 놓고, 하중함수

를 결정하는  $\omega_{low}$ 와  $\omega_{high}$ 의 선택은 제어대상의 반공진 주파수  $\omega_a$ 에 대하여 각각 충분히 작은 값과 충분히 큰 값으로 선택한다<sup>[2]</sup>.

$$W_d^{-1}(s) = \gamma_d \frac{(s + \omega_{low})(s + \omega_{high})}{(s + \omega_a)^2} \quad (33)$$

식 (33)에서  $\gamma_d$  및  $\omega_{low}$ 와  $\omega_{high}$ 를 구체적으로 선택하려면, 식 (32)에서 PI제어기 이득  $K_P$ 와  $K_I$ 를 식 (14)에 의하여 원하는 특성이 되도록 선택하여, 하중함수  $W_d$ 를 설정한다. 그러면, 원하는 외란 억압 특성을 갖도록  $H_\infty$  제어기를 설계할 수 있다<sup>[11,12]</sup>.

한편, 그림 1에서 외란 억압 특성을 나타내는 식 (8)에 식 (11)과 식 (14.a)를 대입하면, 식(34)와 같다.

$$T_{\omega_{\tau L}} = \frac{s(s^2 + a_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \omega_{\tau S}} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} \omega_a^2) + \frac{k_s}{J_M} s}{J_L \left\{ (s^2 + \omega_a^2) \left( s^2 + a_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \omega_{\tau S}} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} \omega_a^2 \right) + \frac{k_s}{J_M} s^2 \right\}} \quad (34)$$

식 (34)를 저주파 대역의 이득을 변동시키지 않고 4차에서 2차로 저차원화시키고 정리하면, 식 (35)과 같다.

$$T_{\omega_{\tau L}}(s) = \frac{\alpha_3(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3)(s + \omega_{low})(s + \omega_{high})}{J_L \alpha_1^2 \omega_{high} (s + \omega_a)^2} \quad (35)$$

식 (35)와 식 (33)을 비교하면, 매우 유사함을 알 수 있다. 이것은 하중함수  $W_d$ 에 비중을 두고  $H_\infty$  제어기를 설계하면,  $H_\infty$  제어기가 PI제어기에 근사한 특성을 갖게 되는 것을 보여준다. 즉, 외란 억압을 위해 고려하는  $W_d$ 의 구조는 상태 피드백 제어 시스템에서 외란 억압 특성을 달성하기 위하여 설계되는 제어기의 구조와 관련되어 있다는 것을 알 수 있다.

한편, 하중함수  $W_n$ 은 관측잡음  $w_1$ 으로부터  $z_x$ 까지의 페루프 특성을 지정하는 하중함수이며,  $w_1$ 에서  $\omega_M$ 까지의 전달함수는 상보감도 함수이기도 하므로, 강건 안정성을 지정하는 하중이 된다. 일반적으로  $W_n$ 은 모델화 오차나 매개변수 변동의 상한 값이 명백하면, 그 것에 따라서 설정하지만, 여기서는 고주파 대역에서의 관측잡음이나 모델화 오차의 영향을 억제하기 위하여 식 (36)과 같이  $W_n$ 에 대역통과 특성을 갖게 하였다.

$$W_n = \gamma_n \frac{s + \omega_n}{s + 10^5} \quad (36)$$

그러므로, 그림 3의 시스템에서 하중함수  $W_u(s)$  에 비중을 두는 설계를 하면, 1차 지연 여파기 제어에 근사한 특성의 제어가 설계된다. 이것은 속응성 및 감쇄특성의 설계 자유도를 갖지 못하고, 관성비가 적은 2관성 시스템에서는 감쇄특성이 나빠지는 것을 의미한다. 즉, 감쇄특성을 희생하여 강진한 안정성을 증시한 이득 설계를 한 것으로 볼 수 있다.

또한,  $H_\infty$  제어문제를 풀기 위하여 제어량  $z_u$  가 필요하지만, 여기서, 제어입력  $u$  에 대한 하중함수  $W_u=10^{-6}$  로 설정하여 제어기의 구조에 영향을 주지는 않는다.

그러므로, 이 하중함수에 의한 설계법은 2가지의 특성이 다른 제어를 설계할 수 있음을 보여주며, 이 하중함수의 적절한 설계는 그림 1의 시스템에서 제어 목적에 따라 PI제어나 1차 지연 여파기 형태의 대략적인 제어기 설계에 의하여 선택될 수 있음을 알 수 있다.

IV. 시뮬레이션 결과의 비교

부하진동기의 관성과 축의 스프링 매개변수를 각각  $J_M=1$  과  $k_s=0.8$  로 놓고, 관성비는 변동을 고려하기 위하여  $J_L$  를 0.1, 0.8, 1로 설정하였다. 또한 제어기 특성을 검토하기 위하여, 식 (17)의 2항 계수법에 의한 극점배치법으로 상태 피드백 이득을 결정하였다. 또한, 2항 계수법의 매개변수를  $\omega_n=\omega_a$  로 놓고, 감쇄비  $\zeta$  를 0.1~1로 변화 시켜 관찰하였다.

먼저, 그림 4와 그림 5는 각각 식 (3)과 식 (4)의 제어기가 없는 TMS에 대하여 관성비  $R_f$ 가 0.1에서 1로 변할 때의  $\tau_M$ 과  $\tau_D$ 에서  $\omega_M$ 으로의 주파수 특성을 나타낸다. 이것은 관성비에 따라 공진과 반공진 주파수가 어떻게 변하는 가를 보여준다. 즉, 관성비가 적을 수록 공진이 일어나는 주파수가 높아짐을 알 수 있다. 그림 1에 대한 상태피드백의 응답특성을 보면, 그림 6과 그림 7은 식 (7), (8)의 강건특성과 외란 억압 특성을  $\zeta$ 의 변화에 따라 나타낸 것으로, 그림 7은 앞에서 언급한 것처럼 대역 통과 특성을 가진다. 감쇄특성과 강진 안정성(고주파이득)은 절충의 관계에 있으므로, 감쇄특성을 증시하면 고주파이득이 커지고 강진 안정성이 악화되며, 역으로 감쇄특성을 개선시키면 고주파이득이 적어져 강진 안정성이 향상된다.

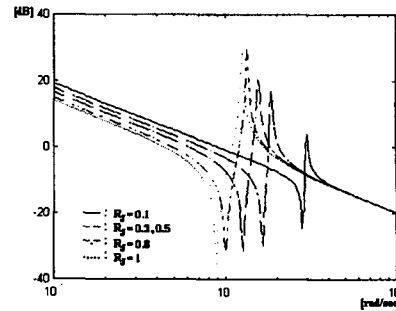


그림 4. 제어기가 없는 경우의  $T_{\omega_M \tau_M}$   
Fig. 4.  $T_{\omega_M \tau_M}$  without controller.

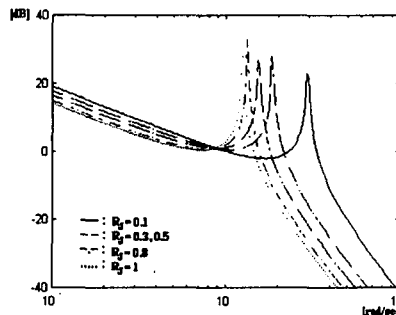


그림 5. 제어기가 없는 경우의  $T_{\omega_M \tau_D}$   
Fig. 5.  $T_{\omega_M \tau_D}$  without controller.

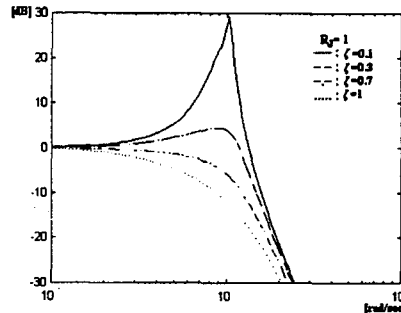


그림 6. 상태피드백이 고려된 경우의  $T_{\omega_L \omega_R}$   
Fig. 6.  $T_{\omega_L \omega_R}$  with state feedback.

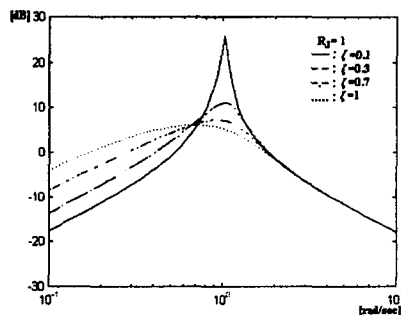
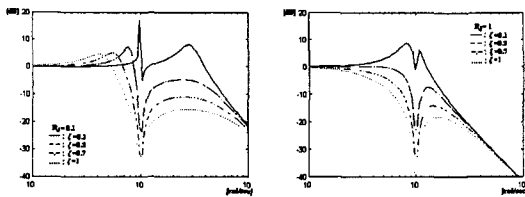


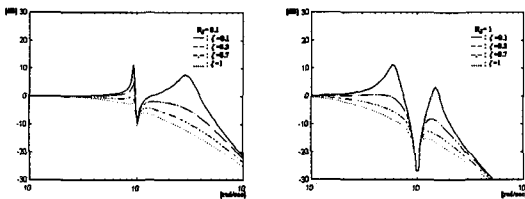
그림 7. 상태피드백이 고려된 경우의  $T_{\omega_L \tau_D}$   
Fig. 7.  $T_{\omega_L \tau_D}$  with state feedback.

그림 8과 그림 9는 각각 상태피드백 이득  $K_1=0$ 로 놓았을 때와  $K_1=K_2=0$ 으로 놓았을 때의 기준신호  $\omega_R$ 에서 구동전동기의 속도  $\omega_M$ 까지의 시스템 특성을 관성비  $R_f$ 와  $\zeta$ 의 변화에 따라 나타낸 것이다. 그림 8과 그림 9의 (a)를 비교해 보면 관성비가 적고 감쇄비가 적은 경우에 축 회전력  $\tau_s$ 이 시스템에 영향을 주지 않음을 알 수 있다. 더욱이, 이것은  $K_1=K_2=0$ 인 경우 식 (17)을 식 (14.b)에 대입하면,  $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{R_f}$ 되므로, 감쇄비가 관성비의 제곱근에 비례하기 때문에 당연하다. 그러나 관성비가 커질수록 축 회전력  $\tau_s$ 가 시스템의 진동 특성에 영향을 주는 것을 알 수 있다. 또한, 그림 9는 그림 8에 비하여 감쇄 특성이 관성비에 더욱 영향을 받음을 알 수 있다. 이것은 관성비가 적은 시스템에서는 좋은 감쇄특성을 얻기 위하여 축 회전력의 피드백이 필요하다는 것을 의미한다.



(a) R=0.1 (b) R=1

그림 8. PID 제어된  $T_{\omega_M \omega_R}$   
Fig. 8. PID controlled  $T_{\omega_M \omega_R}$ .

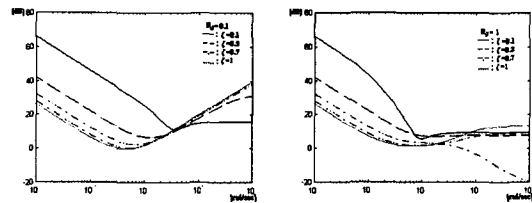


(a) R=0.1 (b) R=1

그림 9. PI 제어된  $T_{\omega_M \omega_R}$   
Fig. 9. PI Controlled  $T_{\omega_M \omega_R}$ .

그림 10과 그림 11은 각각 공진비 제어기와 PI제어의 주파수 응답을 나타내며, 그림 12는 공진비 제어된  $\omega_R$ 에서  $\omega_M$ 으로의 응답이며, 그림 8의 PID제어된 결과와 유사하다. 그림 13과 그림 14는 LQ제어와  $H_\infty$ 제어에 의한 기준신호에 대한 구동전동기 속도의

주파수 특성으로 LQ방법에 의한 제어는 공진주파수 성분이 완전히 제거되고 반공진 주파수 성분만 나타남을 볼 수 있다. 그림 14와 그림 15는  $H_\infty$ 제어기 설계에 있어서 하중함수의 영향을 나타내고 있다. 먼저, 그림 15의 (a)와 (c)는  $W_d$ 를 주파수 하중함수로,  $W_n$ 은 상수로 하고, 각각 매개변수  $\gamma_d$ 와  $\gamma_n$ 를 변화시킨 경우의 제어기에 대한 주파수 응답이고, (b)는  $W_d$ 를 상수로,  $W_n$ 은 주파수 하중함수로 하고, 매개변수  $\gamma_d$ 를 변화시킨 경우의 제어기에 대한 주파수 응답이다. (a)와 (c)의 경우 제어기는 공진 주파수에서 notch여파기와 유사한 모양을 갖게되어 외란 억압 특성이 좋으며, (b)의 경우는 1차 지연 여파기와 유사한 구조를 갖게 되어 강건 안정성이 좋게 된다. 이것은 3.3절에서 언급한 것과 같이  $W_d$ 를 중시하여  $H_\infty$ 제어기를 설계하면 외란 억압 특성이 개선될 수 있으며, 반면에  $W_n$ 을 중시하여 설계하면 감쇄특성을 희생하여 강건 안정성을 개선시킬 수 있음을 나타낸다. 즉, 2개의 하중함수는 상보관계에 있으므로 원하는 주파수 범위에서 하중함수를 적절히 선택하는 것이 좋다. 그림 15의 (d)는 2가지 하중함수를 적절히 선택하여 설계된 제어기의 주파수 응답이다.



(a) R=0.1 (b) R=1

그림 10. 공진비 제어기  
Fig. 10. Resonance controller.

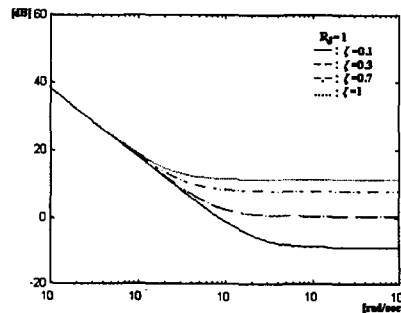


그림 11. PI 제어기  
Fig. 11. PI Controller.



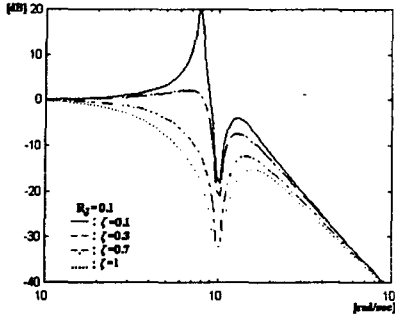


그림 12. 공진비 제어된  $T_{\omega_M \omega_R}$   
 Fig. 12. Resonance controlled  $T_{\omega_M \omega_R}$ .

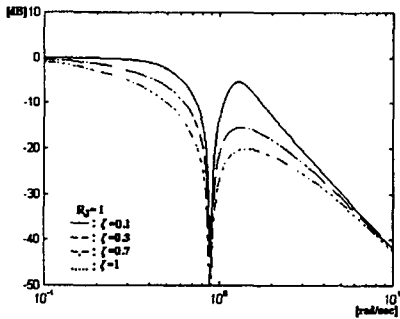


그림 13. LQ 제어된  $T_{\omega_M \omega_R}$   
 Fig. 13. LQ controlled  $T_{\omega_M \omega_R}$ .

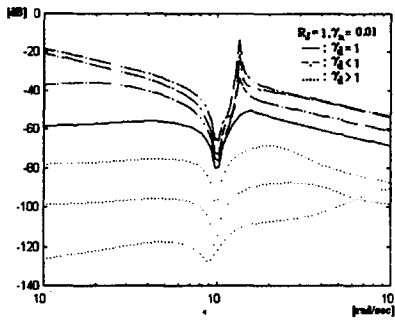


그림 14.  $H_{\infty}$  제어된  $T_{\omega_M \omega_R}$   
 Fig. 14.  $H_{\infty}$  controlled  $T_{\omega_M \omega_R}$ .

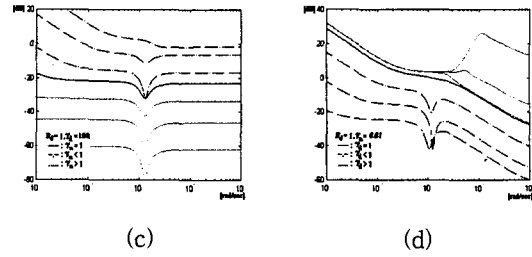
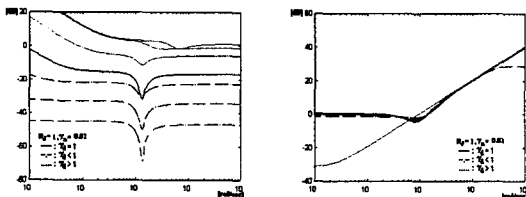


그림 15.  $H_{\infty}$  제어기  
 Fig. 15.  $H_{\infty}$  controller.

V. 결론

본 논문에서는 먼저 2관성 공진 시스템의 제어 특성에 각 상태가 미치는 영향을 분석하였다. 이 관계로부터 PI제어와 공진비 제어는 상태피드백 이득과의 직접적인 관계에 의하여 선택될 수 있었지만 2관성 공진 시스템과 같이 공진을 일으키는 모드를 가진 제어 시스템은 일반적인 PI제어 방법에 의해서는 제어되기 어려웠다.

외란 억압 특성과 강건 안정성을 얻기 위한 최적제어나 공진 모드를 제거하기 위한 공진비 제어와 대역 제거 여파기(notch filter)의 제어가 필요하다. 그러나 이들 제어기로는 제어 대상에 대한 정확한 모델링이 요구되며, 비틀림 축의 변동이나 부하의 변동 같이 예상치 못한 변화가 발생하면 오히려 공진을 기증시킬 수 있다. 그러므로 불확실성을 고려할 수 있는 강건제어가 필연적이다.

최적제어와 강건제어를 위한 LQ제어와  $H_{\infty}$  제어는 하중함수의 선택에서 임의선택 또는 오류 반복법에 의하여 이루어져왔다.

본 논문에서는 상태 피드백 이득과 외란 억압 특성과 강건 안정성을 얻기 위한 하중함수와 상태피드백 이득사이의 관계를 나타내었고, LQ제어와  $H_{\infty}$  제어의 하중함수 선택에서 상태피드백 이득을 이용하여 설정함으로써 보다 체계적인 하중함수를 설정할 수 있었다. 이것은 LQ제어와  $H_{\infty}$  제어의 특성을 예측하면서 하중함수를 선택하는 하나의 방법이 될 것이다.

부록

1. 식 (27)의 hamilton 행렬식과 식 (28)의 계산을 Mathematica의 기호연산을 이용하여 얻어진 결과는

다음과 같다.

$$\begin{aligned} \det(sI - H) &= \frac{k_s^2 q_4}{J_L^2 J_M^2 R} + \left( -\frac{k_s^2 q_1}{J_L^2 J_M^2 R} - \frac{k_s^2 q_3}{J_L^2 J_M^2 R} + \frac{2k_s q_4}{J_L J_M^2 R} \right) s^7 \\ &+ \left( \frac{k_s^2}{J_L^2} + \frac{k_s^2}{J_M^2} + \frac{2k_s^2}{J_L J_M} + \frac{k_s^2 q_2}{J_M^2 R} - \frac{2k_s q_3}{J_L J_M^2 R} + \frac{q_4}{J_M^2 R} \right) s^4 \\ &+ \left( \frac{2k_s}{J_L} + \frac{2k_s}{J_M} - \frac{q_3}{J_M^2 R} \right) s^6 + s^8 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \det(sI - A_{cl}) \det(-sI - A_{cl}^T) &= \frac{k_4^2 k_s^2}{J_L^2 J_M^2} + \left( \frac{2k_4 k_s^2}{J_L J_M^2} - \frac{k_1^2 k_s^2}{J_L^2 J_M^2} \right. \\ &- \frac{2k_1 k_3 k_s^2}{J_L^2 J_M^2} - \frac{k_3^2 k_s^2}{J_L^2 J_M^2} + \frac{2k_4 k_s^2}{J_L J_M^2} + \frac{2k_4 k_s^2}{J_L^2 J_M} + \frac{2k_2 k_4 k_s^2}{J_L J_M^2} \left. \right) s^2 \\ &+ \left( \frac{k_4^2}{J_M^2} - \frac{2k_1 k_3 k_s}{J_L J_M^2} - \frac{2k_3^2 k_s}{J_L J_M^2} + \frac{2k_4 k_s}{J_M^2} + \frac{4k_4 k_s}{J_L J_M} \right. \\ &+ \frac{2k_2 k_4 k_s}{J_M^2} + \frac{k_s^2}{J_L^2} + \frac{k_s^2}{J_M^2} + \frac{2k_s^2}{J_L J_M} + \frac{2k_2 k_s^2}{J_M^2} + \frac{2k_2 k_s^2}{J_L J_M} + \frac{k_2^2 k_s^2}{J_M^2} \left. \right) s^4 \\ &+ \left( -\frac{k_3^2}{J_M^2} + \frac{2k_4}{J_M} + \frac{2k_s}{J_L} + \frac{2k_s}{J_M} + \frac{2k_2 k_s}{J_M} \right) s^6 + s^8 \end{aligned} \quad (b)$$

식 (a)와 식 (b)를 등가로 하여 상태피드백 이득과 하중행렬의 관계는 식 (29)와 같다.

2.  $K_1=0$  인 경우의  $Q$ 값 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_1 &= -2RJ_L(1+K_2)K_4 + 2RJ_M k_s K_2 \\ q_2 &= RK_2^2 + 2R\left(1 - \frac{J_M}{J_L}\right)K_2 + \frac{2R}{k_s}(1+K_2)K_4 \\ q_3 &= RK_3^2 + 2RJ_M(k_s K_2 - K_4) \\ q_4 &= RK_4^2 \end{aligned} \quad (c)$$

그리고 식 (15)에 의한 극배치로 표현된  $Q$ 값 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_1 &= 8 \frac{J_M}{J_L} (J_M k_s \zeta^2) R + 2J_M (k_s + 4J_M \omega_a^2 \zeta^2) R \\ q_2 &= -R + 8 \frac{J_M}{J_L^2} \zeta^2 (2\zeta^2 - 1) R + 2 \left( \frac{J_M}{J_L} + 4 \frac{J_M}{J_L k_s} \omega_a^2 \zeta^2 \right) R \\ q_3 &= 2 \frac{J_M}{J_L} (-4J_M k_s \zeta^2) R + 2J_M (k_s + J_M \omega_a^2 (-1 + 8\zeta^2)) R \\ q_4 &= J_M^2 \omega_a^4 R \end{aligned} \quad (d)$$

3.  $K_1=K_2=0$  인 경우의  $Q$ 값 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_1 &= -2RJ_L K_4, \quad q_2 = \frac{2R}{k_s} K_4, \\ q_3 &= RK_3^2 - 2RJ_M K_4, \quad q_4 = RK_4^2 \end{aligned} \quad (e)$$

또한, 식(15)에 의한 극배치로 표현된  $Q$ 값 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_1 &= -2J_L J_M \omega_a^2 R, \quad q_2 = 2 \frac{J_M}{k_s} \omega_a^2 R, \\ q_3 &= 2J_M^2 \omega_a^2 (8\zeta^2 - 1) R, \quad q_4 = J_M^2 \omega_a^4 R \end{aligned} \quad (f)$$

### 참 고 문 헌

[1] Y. Hori, "2-Inertia System Control using Resonance Ratio Control and Manabe Polynomials", *Trans. IEE-Jpn.*, vol 114-D, no. 10, pp. 1038-1045, 1994.

[2] S. Morimoto, H. Kameyama, Y. Takeda, "Comparison of Resonance Ratio Control and  $H_\infty$  Control on Speed Control of Two-mass System", *Trans. IEE-Jpn.*, vol 116-D, no. 6, pp. 678-684, 1996.

[3] M. Takano, K. Kurotani, K. Takeda, A. Tanisaka, S. Kusumoto, K. Yano, "Application of  $H_\infty$  Control to Motor Speed Control System", *IEEE IECON Conf.*, pp. 839-842, 1991.

[4] S. Morimoto, M. Sanada, Y. Takeda, "Vibration Control of Mechanical Resonance System Based on  $H_\infty$  Control Theory", *IPEC 95 Conf.*, pp. 1446-1451, 1995.

[5] S. Wolfram, *The Mathematica Book 3rd ed.*, Cambridge Univ. Press, 1996.,

[6] 이상효, 이종용, 조도현, 박종우, 신선린, " $H_\infty$  강건제어 이론을 이용한 2관성 공진계의 속도제어", 10차 한국자동제어 학술회의 논문집, pp. 304-312, 1995

[7] W. H. Yao, M. Tomizuka, "Servo System design Based on LQ and  $H_\infty$  Approaches", *American Control Conf.*, pp. 2780-2784, 1993.

- [ 8 ] Brian D. O. Anderson, John B. Moore, *Optimal Control Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [ 9 ] A. Grace, A. J. Laub, J. N. Little, C. M. Thompson, *Control System Toolbox User's Guide*, Mathworks Inc., 1992.
- [ 10 ] 이상효, 이상철, 황영민, "2관성 시스템의 속도 제어를 위한 강진 제어기의 설계", 11차 한국자동제어 학술회의 논문집, pp. 767-770, 1996
- [ 11 ] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis, "State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems", *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
- [ 12 ] 美多 勉,  $H_\infty$  制御, 昭晃堂, 1994.

---

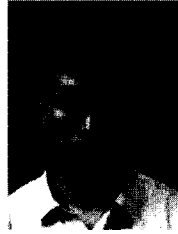
 저 자 소 개
 

---



曹 熾 鉉(正會員)

1963년 12월 11일생. 1987년 광운대 공대 전자공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1991년 ~ 1993년 LG전자 중앙연구소 근무. 1998년 광운대 대학원 제어계측공학과 졸업(공학박사). 현재 삼성 생명과학 연구소 근무, 인덕대학 메카트로닉스와 겸임교수. 주관심 분야는 강진성 제어 설계, PLC응용, 로봇 제어



李 相 喆(正會員)

1965년 5월 20일생. 1998년 광운대 공대 전자공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1990년 ~ 1995년 국방과학연구소 연구원. 현재 광운대 대학원 제어계측공학과 박사과정. 주관심분야는 강진성 제어 설계, DSP



李 鍾 龍(正會員)

1957년 1월 19일생. 1983년 한양대 공대 원자력공학과 졸업. 1988년 광운대 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학박사). 현재 광운대 전산사회교육원 대우 교수. 주관심분야는 비선형 제어