

## 교차곡선 연산을 이용한 평면 곡선의 오프셋 계산

최 정 주\*

### Computing Planar Curve Offset Based on Surface/Surface Intersection

Jung-Ju Choi\*

#### ABSTRACT

This paper presents a new algorithm to compute the offset curve of a given planar parametric curve. We reduce the problem of computing an offset curve to that of intersecting a surface to a paraboloid. Given an input curve  $C(t)=(x(t), y(t)) \in R^2$ , the corresponding surface  $D_{cm}$  is constructed symbolically as the envelope surface of a one-parameter family of tangent planes of the paraboloid  $Q: z=x^2+y^2$  along a lifted curve  $C(t)=(x(t), y(t), x(t)^2+y(t)^2) \in Q$ . Given an offset distance  $d \in R$ , the offset curve  $C_d(t)$  is obtained by the projection of the intersection curve of  $D_{cm}$  and a paraboloid  $Q: z=x^2+y^2-d^2$  into the  $xy$ -plane.

**Key words** : Offset curve, Surface/surface intersection, Lifting transformation, Envelope surface, Developable surface

#### 1. 서 론

평면에 정의된 정규곡선(Regular curve)  $C(t)=(x(t), y(t)) \in R^2$ 의 오프셋 곡선  $C_d(t)$ 는  $C(t)$ 의 법선 벡터(Normal vector)  $\vec{n}(t)$  방향으로 거리  $d$ 만큼 떨어진 점 집합으로 식 (1)과 같이 정의된다.

$$C_d(t) = C(t) + d \cdot \vec{n}(t),$$

$$\vec{n}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \quad (1)$$

정규곡선 정의에 의하여 비분곡선  $C'(t)$ 는  $C(t) \neq 0$ 이며, 따라서 곡선 위의 모든 점에서 법선벡터  $\vec{n}(t)$ 가 정의된다. 주어진 곡선  $C(t)$ 가 정수 혹은 정수 함수의 분수형(Rational)이라고 해도 식 (1)의 분모항에 포함된 제곱근 연산으로 인하여 오프셋 곡선은 일반적으로 정수 혹은 정수함수의 분수형으로 표시되지 않는다. 오프셋 곡선 연산의 이러한 근본적인 어려움은 Farouki와 Neff의 연구를 통하여 잘 알려져 있다<sup>[1,2]</sup>. 현재까지, 임의의 자유곡선에 대하여 오프셋 곡선을 표현하는 분수꼴의 닫힌 해(Closed form

solution)는 알려져 있지 않다. 80년대 초반 오프셋 곡선을 근사하기 위한 연구는 1988년 Hoschek이 제안한 비선형 최적화 기법(Nonlinear optimization technique)에 이르기까지 발전을 거듭하여 왔다<sup>[3]</sup>. 이후 오프셋 곡선 문제는 오차 해석 등의 분야에 초점이 맞추어져서 연구되어 왔다. 자유곡선의 제어점(Control point)을 다루는 기존의 오프셋 곡선 근사 방법 외에, 1996년 Lec, Kim, Elber는 오프셋 원을 근사하여 평면 곡선의 오프셋을 기호연산으로 구하는 방법을 제시하였다<sup>[4]</sup>. Farouki와 Sakkalis는 PH곡선(Pythagorean Hodograph curve)의 오프셋 곡선이 분수꼴로 표현됨을 증명하였으며, 이 연구가 현재까지 정확한 분수꼴이 존재하는 오프셋 곡선에 대한 유일한 이론 연구이다<sup>[5,6]</sup>. 1997년 Elber, Lee, Kim 등은 현재까지 이루어진 오프셋 곡선에 대한 주요 연구결과를 정량적, 정성적으로 분석하여 각 방법의 장단점을 분석하였다<sup>[7]</sup>.

오프셋 곡선을 수치가공(NC machining), 경로생성(Path planning) 등 응용분야에서 사용하기 위하여 수반되는 문제로 오프셋 곡선의 자르기 문제(Trimming)가 있다. Trimming은 오프셋 곡선이 곡소적인 영역에 대하여는 식 (1)의 조건을 만족하지만,

\*한국전자통신연구원 컴퓨터소프트웨어기술연구소

주어진 곡선의 특정 영역에서 조건을 만족하지 않는 불필요한 곡선 부분(Redundant curve segment)을 제거하는 문제이다. 오프셋 곡선의 불필요한 곡선 부분을 제거하기 위해서 오프셋 곡선의 재귀 교차점(Self-intersection loop)을 찾아야 한다. 이러한 점을 찾기 위해서는 오프셋 곡선의 정렬(Arrangement)문제를 풀어야 하지만, 이 문제는 기하모델링 분야의 가장 어려운 미해결 문제(Open problem) 중의 하나로 알려져 있다<sup>[10]</sup>. 따라서 현재 구현할 수 있는 가장 안정된 방법으로는 오프셋 곡선을 직선들로 근사(Polygonal approximation)하고, 얻어진 직선들을 평면에서 정렬(Arrangement)하는 방법을 사용한다. 그러나 이 방법 역시 비교적 간단한 곡선에 대해서조차 안정적으로 구현하기가 대단히 어렵고, 많은 시간이 소요된다. 따라서 오프셋 계산의 상당한 노력이 이 불필요한 곡선분 제거 단계에 사용되고 있다. 본 논문에서 제시되는 알고리즘은 이러한 곡선분을 제거하기 위하여 곡면 교차곡선 연산을 그대로 사용하기 때문에 구현 단계에서 새로운 노력이 필요 없고, 곡선을 직선들로 근사하면서 발생하는 단점이 없으며, 이해하기 쉽다.

본 논문은 2차원 오프셋 곡선 계산 문제를 곡면의 교차곡선을 이용하여 해결하는 새로운 방법론을 제시한다. 먼저 문제를 변환하는 방법을 유도하기 위하여  $xy$ -평면 위에 임의의 점  $q=(a, b) \in R^2$ 에서 식 (2)와 같은 원뿔(Right circular cone)을 고려하여 보자.

$$S: z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}. \quad (2)$$

평면 위의 점  $p=(x, y)$  위에 있는 원뿔 상의  $z$ -좌표 값은 점  $p$ 와  $q$  사이의 거리(Euclidean distance)를 나타낸다. 함수  $z(x, y)$ 를 점  $q=(a, b)$ 에서  $p=(x, y)$ 에 이르는 거리라고 하면,  $z(x, y) \leq d$ 를 만족하는 모든 점들은 원뿔  $S$ 와 평면  $z(x, y)=d$ 의 정렬(Arrangement)에서 하위 외곽면(Lower envelope surface), 즉  $z$ -축의 음의 무한대 방향에서 보이는 부분을 이룬다. 원뿔  $S$ 의 가시영역, 즉 하위 외곽면을  $xy$ -평면에 정사영하면 점  $q=(a, b)$ 를 중심으로 하고 반지름  $d$ 인 원이 생성된다<sup>[11]</sup>. 따라서 점  $q$ 의 오프셋 곡선은 원뿔과 평면의 교차곡선으로부터 구할 수 있다(그림 1 참조).

위와 같은 방법을 평면 곡선  $C(t)$ 에 대한 경우로 확장하기 위하여, 곡면  $S$ 를 평면 곡선  $C(t)$ 를 따라서 원뿔이 지나간 껍적(Envelope surface of a one-parameter family of circular cones)이라고 가정하자. 곡면  $S$ 와 평면  $z(x, y)=d$ 를 정렬하여 하위 외곽면을 추출하고  $xy$ -평면에 정사영하면  $C(t)$ 의 오프셋 곡선

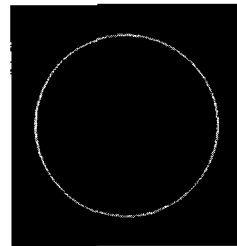
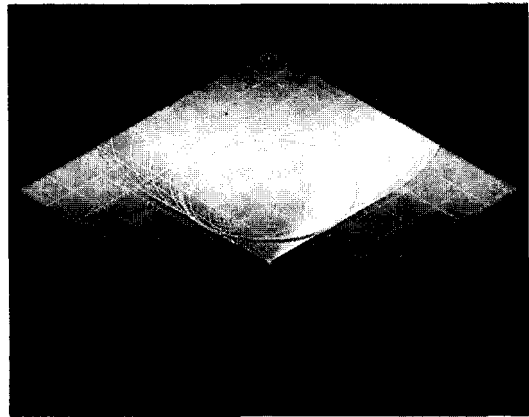


그림 1. 원뿔과 평면의 교차곡선(Yellow)과, 교차곡선을  $xy$ -평면(Blue)에 정사영한 결과.

을 얻을 수 있다. 이때 하위 외곽면을 계산하기 위해서는  $S$ 와  $z(x, y)=d$ 의 정렬문제, 즉 교차곡선 연산문제를 해결해야 한다(그림 2 참조).

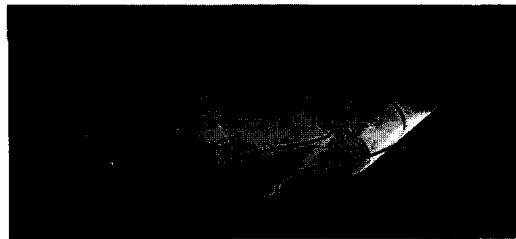


그림 2. 평면곡선  $C(t)$  (Red curve)를 따라서 원뿔을 움직인 껍적의 외곽곡면(Cyan)과 평면의 교차곡선(Yellow) 및 교차곡선을  $xy$ -평면에 정사영한 예.

임의의 평면 곡선  $C(t)=(x(t), y(t))$ 에 대하여 위와 같은 방법으로 생성된 곡면  $S$ 의 매개변수함수는 식 (3)과 같다.

$$S(t, v) = \left( x(t) + v \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, y(t) - v \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, v \right) \quad (3)$$

식 (3)의 곡면  $S$ 는 developable 곡면이지만, 본문에 포함된 계급근 함수로 인해서 일반적으로 정수 및 정수함수의 분수꼴(Rational)로 표현할 수 없다. 현재 까지 식 (3)과 같은 곡면  $S$ 를 Pottmann과 Peterzell의 reparameterization 방법을 사용하여 분수꼴로 표현할 수 있는지는 불확실하다<sup>11)</sup>. 따라서 이상과 같은 방법으로는 분수꼴로 표현되는 곡면에 대한 교차곡선 연산을 사용하여 오프셋 곡선을 구할 수 없다.

이 논문에서는 평면 곡선  $C(t)$ 에 대한 분수꼴 developable 상위 외곽 곡면  $D_{C(t)}$ 와 포물면의 교차곡선을 사용하여 오프셋 곡선 문제를 해결하는 새로운 알고리즘을 제시한다. 평면 곡선을 포물면으로 사상하는 변환(Lifting transformation)에 의하여 외곽 곡면  $D_{C(t)}$ 에 대한 정수함수의 분수꼴 표현식(Rational parameterization)을 유도하고  $D_{C(t)}$ 가 평면에 펼쳐지는 developable 곡면임을 증명한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 포물면과 외곽 곡면의 교차곡선이 평면 곡선의 오프셋 곡선 정의와 일치함을 보인다. 3장에서는 외곽 곡면을 분수꼴로 표현하는 매개변수 함수를 유도하고, 외곽 곡면이 developable 곡면임을 증명한다. 4장에서는 오프셋 곡선의 불필요한 곡선 부분을 제거하는 trimming 방법에 대하여 기술한다. 5장에서는 제시된 방법에 따라 구현된 실험결과와 분석을 6장에서는 본 논문의 결론을 제시한다.

## 2. Lifting Transformation

2차원 평면에 주어지는 평면 곡선  $C(t)$ 의 오프셋 곡선  $C_d(t)$ 의 정의가 포물면과  $D_{C(t)}$ 의 교차곡선 정의와 일치함을 보인다. 이러한 사실을 증명하기 위하여 1차원 점과 포물선의 특성을 2차원 점과 포물면의 특성으로 확장하고, 이를 다시 2차원 평면곡선의 특성으로 확장한다.

### 2.1 1D Point Case

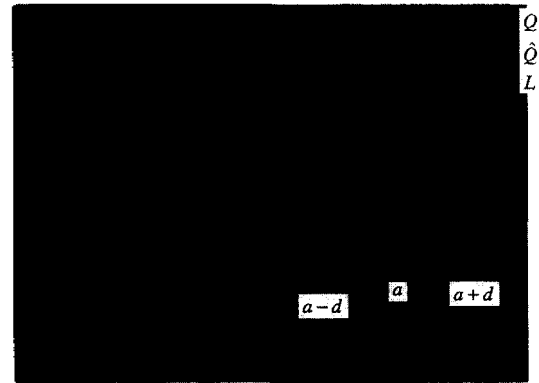


그림 3. 주어진 점  $a$ 에 대하여 점  $(a, a^2) \in Q$ 에서의 직선  $L$ 과 포물선  $Q: y=x^2-d^2$ 의 교차점과 교차점을  $x$ -축으로 정사영한 결과.

$x$ -축 위의 임의의 점  $a$ 와 포물선  $Q: y=x^2$ 을 고려하여 보자. 직선  $L$ 을 포물선 위의 점  $(a, a^2) \in Q$ 에서 정의되는 접선이라고 정의하면,  $L: y=2ax-a^2$ 와 같다. 주어진 오프셋 거리  $d$ 에 대하여 포물선을  $y$ -축을 따라서  $-d^2$ 만큼 평행 이동한 포물선  $Q: y=x^2-d^2$ 과 직선  $L$ 의 교차점은 각각  $p=(a-d, -2ad)$ 와  $q=(a+d, 2ad)$ 와 같다. 점  $p$ 와  $q$ 를  $x$ -축으로 정사영하면  $x$ -축 위의 두 점  $a-d$ 와  $a+d$ 를 얻을 수 있다. 이 두 점은  $x$ -축 위의 점  $a$ 의 오프셋에 해당한다(그림 3 참조).

### 2.2 2D Discrete Point Case

$xy$ -평면 위에 임의의 점  $p=(a, b)$ 가 주어졌을 때, 포물면  $Q: z=x^2+y^2$  위의 점  $p=(a, b, a^2, b^2)$ 에서 정의되는 접평면(Tangent plane)  $L$ 은 식 (4)와 같이 정의된다.

$$L: z = 2a(x-a) + 2b(y-b) + a^2 + b^2 = 2ax + 2by - a^2 - b^2 \quad (4)$$

주어진 오프셋 거리  $d$ 에 대하여 포물면  $Q$ 를  $z$ -축을 따라서  $-d^2$ 만큼 평행 이동한  $Q: z=x^2+y^2-d^2$ 과 접평면  $L$ 의 교차곡선을  $xy$ -평면에 정사영 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 - d^2, \\ z &= 2ax + 2by - a^2 - b^2, \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

위의 식 (5)를 연립하여 풀면, 점  $p=(a, b)$ 를 중심으로 하고 반지름  $d$ 인 원  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = d^2$ 을 얻을 수 있고, 이는 점  $p=(a, b)$ 에 대한 오프셋 곡선에 해당한다(그림 4 참조).

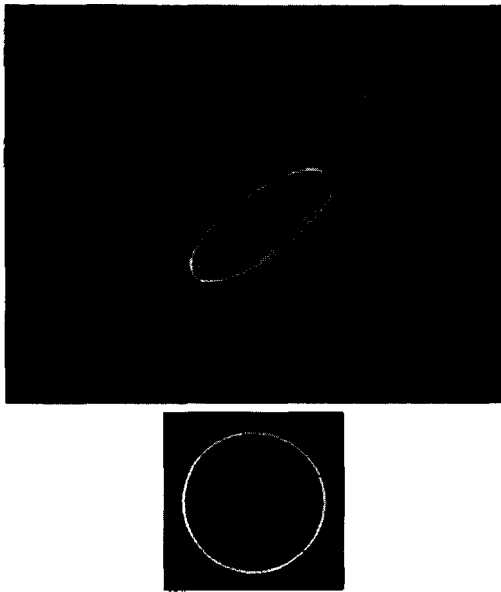


그림 4. 곡면  $Q$ 와 접평면  $L$ 의 교차곡과, 교차곡선을  $xy$ -평면에 정사영한 예.

2.3 2D Curved Case

평면 위에 무한히 많은 점이 곡선  $C(t)=(a(t), b(t))$ 를 따라서 주어졌다고 가정하자. 먼저  $L(t)$ 를 포물면  $Q:z=x^2+y^2$  위의 임의의 점  $(a(t), b(t), a(t)^2+b(t)^2)$ 에서 다음 식(6)과 같이 정의되는 접평면(Tangent plane)이라고 하자.

$$L(t):z = 2a(t)x + 2b(t)y - a(t)^2 - b(t)^2 \quad (6)$$

오프셋 거리  $d$ 에 대하여  $z$ -축을 따라서  $-d^2$ 만큼 평행 이동한 포물면  $Q:z=x^2+y^2-d^2$ 을 가정하면,  $Q$ 와  $L(t)$ 의 교차곡선을  $xy$ -평면에 정사영하면  $C(t)$ 를 중심으로 반지름  $d$ 인 원  $(x-a(t))^2+(y-b(t))^2=d^2$ 을 얻을 수 있다. 변수  $t$ 에 의하여 생성되는 접평면군(One-parameter family of tangent planes)  $\{L(t)\}$ 는 외곽 곡면(Envelope surface)  $D_{C(t)}$ 를 생성한다. 그러므로  $Q$ 와  $\{L(t)\}$ 의 교차곡선을  $xy$ -평면에 정사영하면  $C(t)$ 를 따라서 반지름  $d$ 인 원이 움직인 궤적의 외곽 곡선(Envelope curve)을 얻을 수 있다. 이것은 곡선  $C(t)$ 의 오프셋 곡선 정의와 일치한다(그림 5 참조).

따라서 평면 자유곡선  $C(t)$ 의 오프셋 계산 문제는 곡면  $D_{C(t)}$ 와  $Q$ 의 교차곡선을 구하는 문제로 변환되었다. 교차곡선 계산 문제는 최근 20여년 동안 닫힌 교차곡선 탐색(Loop detection), 고차원 교차곡선 추적(High order intersection tracing), 재귀적 분할



그림 5.  $D_{C(t)}$ 와  $Q$ 의 교차곡선과  $xy$ -평면 위로의 정사영 결과.

(Recursive subdivision) 기법 등 다양한 문제해결 기법이 연구되었고, 관련된 많은 논문들이 발표되었다<sup>13,14</sup>. 최근에 몇몇 논문에서는 수치적으로 안정된 결과들이 발표되고 있어서 교차곡선 문제의 실질적인 해결책이 마련되고 있다<sup>15,16</sup>. 이미 제공되고 있는 다양한 상용 CAD 시스템의 교차곡선 해결 기법을 사용한다는 가정하에서 본 논문의 문제는 주어진 자유곡선  $C(t)$ 에 대한  $D_{C(t)}$ 의 분수형태 표현식(Rational parameterization)을 구하는 문제로 단순화되었다. 다음 장에서는  $D_{C(t)}$ 의 분수형태 표현식을 유도하고,  $D_{C(t)}$ 가 평면에 펼쳐질 수 있는 곡면(Developable surface)임을 증명한다. 교차곡선 문제에서 developable 곡면은 닫힌 교차곡선 문제 및 교차곡선 추적 등에서 많은 장점을 가지고 있다.

3. Developable Envelope Surface

곡선  $C(t)=(x(t), y(t))$ 를 평면 위에 정의된 정규곡선이라고 가정하자. 곡선  $C(t)$ 를 포물면  $Q:z=x^2+y^2$  위

로 올린 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$C(t) = (x(t), y(t), x(t)^2 + y(t)^2) \in Q$$

곡선  $C(t)$ 를 따라서 포물면  $Q$ 에 접하는 평면 (Tangent plane)의 변수  $t$ 에 대한 평면군,  $\{T_{C(t)}(Q)\}$ 를 고려하여 보자. 임의의 양의 실수  $\Delta t > 0$ 에 대하여 문제의 일반성을 유지하면서  $C(t+\Delta t) \neq C(t)$ 라고 가정할 수 있다. 즉 평면곡선  $C(t)$ 에 재귀교차(Self-intersection)가 없는 구간을 가정하면, 두 접평면  $T_{C(t)}(Q)$ 와  $T_{C(t+\Delta t)}(Q)$ 는 벡터  $\frac{N(t) \times N(t+\Delta t)}{\Delta t}$ 에 평행한 직선을 교차곡선(직선)으로 갖는다(그림 6 참조). 여기서  $N(t)$ 는 접평면  $T_{C(t)}(Q)$ 의 법선 벡터로서 곡선  $C(t)$ 를 따라서 식 (7)과 같이 정의되는  $Q$ 의 정규화 되지 않은 법선 벡터 필드(Unnormalized normal vector field)이다<sup>[17]</sup>.

$$N(t) = (2x(t), 2y(t), -1) \tag{7}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ 의 조건에 따라서 두 접평면의 교차곡선(직선)의 극한 방향은 다음과 같다.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t) \times N(t+\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} N(t) \times \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N(t) \times N'(t). \tag{8}$$

이때  $N(t) \times N'(t) = (2y'(t), -2x'(t), 4x(t)y'(t) - 4x'(t)y(t))$ 와 같다.

따라서  $N(t) \times N'(t)$ 를 ruling으로,  $C(t)$ 를 directrix로 하는 ruled 곡면  $\{T_{C(t)}(Q)\}$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$D_{C(t)}(t, v) = C(t) + v \cdot (N(t) \times N'(t)). \tag{9}$$

식 (9)에서  $D_{C(t)}$ 는  $C(t)$ 가 분수꼴(Rational)이면 분수

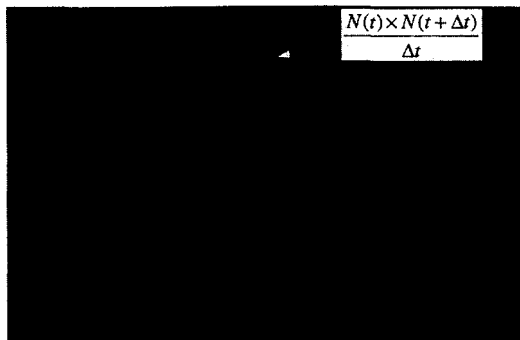


그림 6. 포물면 위의 두 접평면(Cyan),  $T_{C(t)}(Q)$ 와  $T_{C(t+\Delta t)}$ 의 교차곡선(Red).

꼴의 표현식(Rational parameterization)임을 쉽게 알 수 있다.

또한  $D_{C(t)}$ 는 평면에 펼쳐지는 developable 곡면임을 가우스 곡률(Gaussian curvature)를 조사하여 증명할 수 있다. 즉,  $D_{C(t)}$ 의 2차 편미분은 각각 식 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial v} D_{C(t)} &= N(t) \times N''(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial v} D_{C(t)} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

곡면  $D_{C(t)}$ 에 대한 2차 기본형의 계수(Second fundamental form coefficient)는 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} f &= \left\langle N(t), \frac{\partial^2 D_{C(t)}}{\partial t \partial v} \right\rangle = \langle N(t), N(t) \times N''(t) \rangle = 0 \\ g &= \left\langle N(t), \frac{\partial^2 D_{C(t)}}{\partial v^2} \right\rangle = \langle N(t), 0 \rangle = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

따라서 곡면  $D_{C(t)}$ 의 가우스 곡률  $K$ 는:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \tag{12}$$

가 되어  $D_{C(t)}$ 가 평면에 펼쳐지는 developable 곡면임이 증명된다. 여기서  $E, F, G$ 와  $e, f, g$ 는 각각 곡면  $D_{C(t)}$ 의 1차 및 2차 기본형 계수이고 정규형 조건으로부터  $EG - F^2 \neq 0$ 이다.

그림 7은 이상과 같은 방법으로 평면곡선  $C(t)$ 에 대한 상위 외곽면  $D_{C(t)}$ 를 구한 예이다.

#### 4. Trimming

평면 곡선  $C(t)$ 에 대한 오프셋 곡선  $C_d(t)$ 는 일반적으로 식 (1)의 국소적인 성질만을 만족한다. 따라서, 주어진 오프셋 거리  $d$ 에 대하여  $\|C_d(s) - C(t)\| < d$ 인  $s, t$ 가 존재할 수 있다. 이 경우 평면 곡선  $C(t)$  위의 서로 다른 두 점,  $C(t_0) \neq C(t_1)$ 에 대하여  $C_d(t_0) = C_d(t_1)$ 인 점을 기준으로 닫힌 오프셋 곡선이 형성된다. 오프셋 곡선의 이러한 재귀교차점(Self-intersection)을 구하고, 이 점을 기준으로 발생하는 닫힌 곡선 성분을 제거하면 주어진 평면 곡선의 모든 영역에서 식 (1)의 조건을 만족하는 오프셋 곡선을 얻을 수 있다.

오프셋 곡선의 재귀교차 제거(Trimming, Self-intersection loop elimination) 문제를 해결하기 위해서 평면 곡선의 정렬(Arrangement) 문제를 사용할 수 있으나, 현재까지 이 문제를 안정적으로 해결하는 방

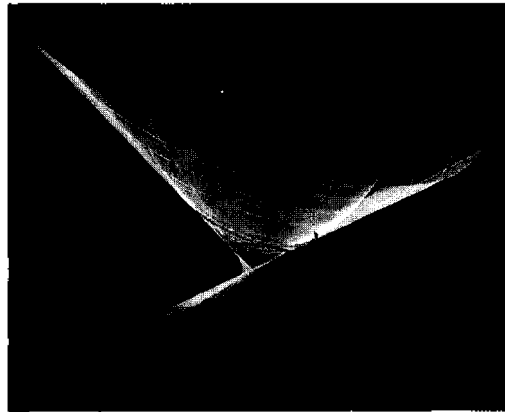


그림 7. 평면곡선  $C(t)$  (Blue)에 대한  $C(t)$  (Red) 및  $D_{en}$  (Magenta)의 예.

법은 미해결 문제로 남아있다. 현재 가장 많이 사용하는 방법으로는 오프셋 곡선을 직선들로 근사하고 직선의 정렬(Arrangement) 문제를 푸는 방법이다<sup>[10]</sup>. 그러나, 이와 같은 근사적 문제 해결 방법도 안정적으로 구현하기가 대단히 어려우며, 오프셋 곡선이 조금만 복잡해지면 많은 시간이 걸린다. 이와 같은 근사 방법의 또 다른 단점으로는 오프셋 곡선을 직선으로 근사하기 때문에 재귀교차를 제거한 후의 오프셋 곡선은 직선들의 연결(Series of connected piecewise line segment)로 얻어진다는 것이다. 즉, 주어진 평면 곡선에 대하여 아무리 정교한 오프셋 곡선 근사방법을 사용하더라도 재귀교차 제거 후에는 연결된 직선들을 얻게 되는 것이다. 이 논문에서 제시된 오프셋 곡선 계산 방법은 재귀교차 제거를 위하

여 곡면 교차곡선 연산을 그대로 사용하기 때문에 구현 단계에서 부가적인 노력이 필요하지 않으며, 재귀교차 제거 후에 근사된 오프셋 곡선을 곡선 정의 그대로 얻을 수 있다. 본 논문에서 제시된 기법은 상위 외곽면(upper envelope surface)에 대한 정보를 사용하기 때문에 실제로 상위 외곽면 중에서 z-축의 양의 무한대 방향에서 보이지 않는 부분은 평행 이동된 포물면  $Q$ 에 더 가까운 점을 포함하게 된다<sup>[15]</sup> (그림 8 참조). 따라서 이러한 영역에 포함된 교차곡선은  $xy$ -평면에 정사영하였을 때 재귀교차(Self-intersection loop)가 일어나게 된다. 만약 이러한 부분

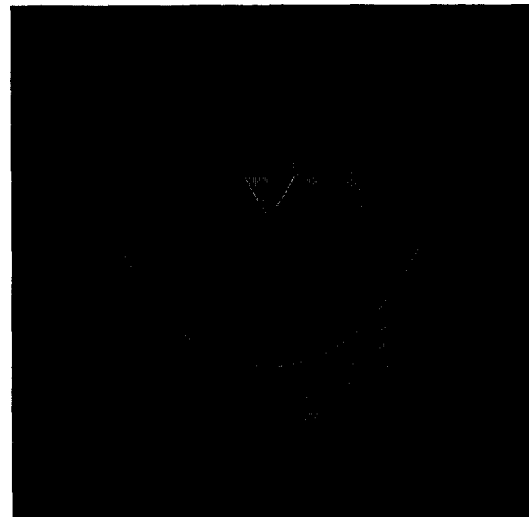


그림 8. 상위 외곽면  $D_{en}$ 를 이용한 재귀교차 제거 방법. z-축의 양의 무한대 방향에서 교차곡선 (Yellow)을 본 모양.

을 미리 제거하고 정사영하면 재귀교차를 제거한 오프셋 곡선을 얻을 수 있다.

먼저  $D_{C(u)}$ 와 포물면  $Q$ 의 교차곡선을  $C_f(t)$ 라고 하자.  $C_f(t)$ 를 directrix로 하고 벡터  $\vec{w}=(0, 0, 1)$ 를 ruling으로 하는 곡면(Ruled surface)을  $R(t, u)=C_f(t)+u\vec{w}$ 라고 하자. 이때  $u$ 는 구간  $(0, \infty)$ 에서 정의된 실수이다. 만약  $R(t, u)$ 와  $D_{C(u)}$ 가 구간  $t \in (t_0, t_1)$ 에서 교차곡선을 생성하면  $C_f(t)$ 에서  $t \in (t_0, t_1)$ 의 구간을 제거한 나머지 교차곡선만을  $xy$ -평면에 정사영 하면 재귀교차가 제거된 오프셋 곡선을 얻을 수 있다. 이 경우 곡면  $R(t, u)$ 가 cylindrical한 ruled 곡면으로서 developable 곡면이 되어 교차곡선 연산을 보다 효율적이고, 안정적으로 구현할 수 있다<sup>[15][16]</sup>.

### 5. 실험결과 및 논의

본 논문에서 제시된 자유곡면의 교차곡선을 이용하여 평면 곡선의 오프셋 곡선을 구한 예를 그림 9에 제시하였다.

입력되는 자유곡선은 모두 B-spline 곡선으로 주어졌으며, 얻어지는 오프셋 곡선은 3차 B-spline 곡선이다. 교차곡선의 계산에서 사용된 오차한계는  $1.0 \times 10^{-3}$ 이다. 제시된 알고리즘의 구현은 IRIT 7.0 모델링 라이브러리와 C 언어를 사용하여 SGI Indigo2 R10000에서 구현되었다<sup>[17]</sup>.

본 논문은 평면 자유곡선의 오프셋 곡선 계산 문제와 자유곡면에 대한 교차곡선 계산 문제가 Lifting

transformation을 사용함으로써 이론적으로 같은 분제임을 보였다. 따라서 오프셋 곡선 계산 문제의 안정성, 효율성 등의 성능은 교차곡선 계산 문제의 성능에 크게 좌우된다. 오프셋 문제를 교차곡선 문제로 변환하여 얻어지는 장점은 다음과 같다. 교차곡선 문제의 해결기법이 실제의 응용분야에서 사용될 수 있도록 교차원 교차곡선 추적에 초점을 맞추어 연구되는 추세에 비추어 오프셋 곡선을 교차원 곡선으로 쉽게 근사할 수 있다. 또한 제시된 방법론이 오프셋 곡선 문제의 가장 어려운 분야로 알려진 재귀교차 제거 문제를 비교적 쉽게 해결할 수 있다. 또 다른 장점으로는 재귀교차 제거를 위하여 오프셋 곡선을 직선으로 근사하지 않기 때문에 재귀교차 제거 후에 오프셋 곡선을 곡선 정의 그대로 얻을 수 있다.

반면에 제시된 방법의 단점으로는 오프셋 곡선의 오차해석(Error analysis)의 어려움을 들 수 있다. 근사된 오프셋 곡선의 정확한 오차한계를 계산하는 방법이 이미 존재하고 있다<sup>[18]</sup>. 그러나 이 논문에서 제시된 방법은 교차곡선 문제를 오프셋 곡선의 계산 문제에 적용하고 있기 때문에 교차곡선 문제의 오차가 오프셋 곡선의 오차를 결정한다. 교차곡선 문제는 지금까지 문제해결 기법 자체에 많은 연구가 되어 왔고 오차해석에 대한 분야는 거의 연구가 이루어지지 않았다. 특히 교차곡선 문제에 대한 대수적(algebraic) 일반해가 존재하지 않기 때문에 정확한 오차해석이 사실상 불가능한 분야로 인식되어 왔다.

또 다른 단점으로는 현재의 일반적인 오프셋 곡선 계산 방법에 비하여 제시된 방법이 수행속도 및 사용되는 저장공간의 양에서 효율적이지 못하다는 점이다. 구현 방법론의 차이로 인해서 수행시간 및 자료의 양 등을 직접 비교하기는 힘들지만, Elber, Lee, Kim의 최근 비교논문<sup>[19]</sup>에서 제시된 예제들에 대하여 수행속도는 평균 2.3배, 자료의 양은 평균 2.1배가 소요되었다. 그러나 이미 많은 연구를 통해 최적화가 진행된 오프셋 곡선 계산 문제에 비하여 교차곡선 문제는 아직 문제해결 기법에 연구가 집중되어 있어서 교차곡선 문제에 대한 최적화가 진행되면 수행속도와 자료의 양 문제는 비슷한 수준까지 개선될 여지가 남아 있다.

### 6. 결 론

본 논문에서는 2차원 평면 위에 정의된 정규 자유곡선의 오프셋 곡선 계산 문제를 자유곡면의 교차곡선 문제로 변환하여 해결하는 새로운 방법을 제시하



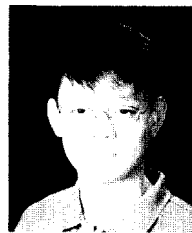
그림 9. 평면곡선(Red)에 대한 오프셋 곡선(Yellow)의 계산 예.

였다. 평면 자유곡선  $C(t)$ 에 대하여 포물면  $Q: z=x^2+y^2$  위로 올린 곡선  $C(t)$ 를 구하고, 곡선  $C(t)$ 를 따라서  $Q$ 에 접하는 접평면군의 외곽곡면  $D_{C(t)}$ 를 구한다. 곡면  $D_{C(t)}$ 와 평행 이동된 포물면  $Q: z=x^2+y^2-d^2$ 의 교차곡선을 구하여  $xy$ -평면에 정사영하면  $C(t)$ 의 오프셋 곡선을 얻을 수 있다. 교차곡선 연산을 상용 혹은 비상용 CAD 시스템에서 수행할 수 있도록  $D_{C(t)}$ 의 분수형태 표현식(rational parameterization)을 유도하는 방법을 제시하였으며,  $D_{C(t)}$ 가 평면에 펼쳐지는 developable 곡면임을 증명하였다.

본 논문에서 제시된 새로운 문제 해결 기법은 오프셋 곡선의 가장 어려운 문제로 알려진 재귀교차 제거(Trimming, Self-intersection elimination)를 구현단계에서 부가적인 노력이 필요 없이 곡면의 교차곡선 연산만으로 쉽게 해결할 수 있다. 또한 직선으로 근사하는 기존의 재귀교차 제거 방법에서는 얻을 수 없는 오프셋 곡선의 곡선 정의를 그대로 얻을 수 있다.

### 참고문헌

1. Farouki, R. and Neff, C., "Algebraic Properties of Plane Offset Curves", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7, pp. 101-127, 1990.
2. Farouki, R. and Neff, C., "Analytic Properties of Plane Offset Curves", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7, pp. 83-99, 1990.
3. Hoschek, J., "Spline Approximation of Offset Curves", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5, pp. 33-40, 1988.
4. Hoschek, J. and Wissel, N., "Optimal Approximation Conversion of Spline Curves and Spline Approximation of Offset Curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 20, No. 8, pp. 475-483, 1988.
5. Lee, I. K., Kim, M. S. and Elber, G., "Planar Curve Offset Based on Circle Approximation", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. 8, pp. 617-630, 1996.
6. Farouki, R. and Sakkalis, T., "Pythagorean Hodograph", *IBM Journal of Research Development*, Vol. 34, pp. 736-752, 1990.
7. Pottmann, H., "Rational Curves and Surfaces with Rational Offsets", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 175-192, 1995.
8. Peterzell, M. and Pottmann, H., "A Laguerre Geometric Approach to Rational Offsets", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 15, pp.223-249, 1998.
9. Elber, G., Lee, I. K. and Kim, M. S., "Comparing Offset Curve Approximation Methods", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 17, No.3, pp. 62-71, May-June 1997.
10. Held, M., *On the Computational Geometry of Pocket Machining*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 500, Springer-Verlag, 1991.
11. O'Rourke, J., *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, 1994.
12. Pottmann, H. and Peterzell, M., "Applications of Laguerre Geometry in CAGD", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 15, pp. 165-186, 1998.
13. Hoschek, J. and Lasser, D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A K Peters, 1993.
14. Pratt, M. and Geisow, A., Surface/surface Intersection Problems, In J. A. Gregory editor, *The Mathematics of Surfaces*, pp. 117-142, Oxford University Press, 1986.
15. Choi, J. J., *Local Canonical Cubic Curve Tracing along Surface/Surface Intersections*, Ph.D. Thesis, Dept. of Computer Science, POSTECH, Feb. 1997.
16. Grandine, T. and Klein, F., "A New Approach to the Surface Intersection Problem", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 14, pp. 111-134, 1997.
17. do Carmo, m., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
18. Heo, H. S., Kim, M. S. and Elber, G., "Ruled/ruled Surface Intersection", In workshop proceedings of *Differential/Topological Techniques in Geometric Modeling and Processing '98* pp. 215-223, 1998.
19. Elber, G., *IRIT 7.0a User's Manual*, Technion IIT, Israel, 1996.



### 최 정 주

1990년 한국과학기술원 전산학과 학사  
 1992년 포항공과대학교 전자계산학과 석사  
 1997년 포항공과대학교 전자계산학과 박사  
 1997년~현재 한국전자통신연구원 컴퓨터 소프트웨어기술연구소 (ETRI CSTL) 선임연구원  
 관심분야: Computer aided geometric design, Solid/geometric modeling, Virtual prototyping