
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 35 卷 第 1 號 1998年 2月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 35, No. 1, February 1998

충격하중을 받는 외팔보의 동적 강소성 응답

최호응*, 신종계**

Dynamic Responses of a Rigid-Plastic Cantilever Subject to Impact

by

H.W.Choi*, J.G.Shin**
 요 약

탄소성 보구조물의 정적 변형은 하중의 크기가 소성붕괴력 F_c 보다 작게 될 때만 적용된다. 그러나 충격이나 폭발 상황에서 소성 붕괴력을 넘는 하중을 받는 보 구조물은 정적인 탄소성 변형과 다른 응답특성을 보이게 된다.

본 논문에서는 간단한 구조 모델로서 강-완전 소성 외팔보를 도입하여 소성 붕괴력보다 큰 하중 ($F > F_c$)이 작용하였을 때 구조물의 응답특성을 연구하였다. 계단 하중(step loading)이 가해졌을 경우에 보의 운동을 무차원하여 계산하고 이 결과를 사각형과 하중(rectangular force pulse)이 가해지는 경우에도 이용하여 해석하였다.

해석 수행 결과 무차원화된 힘을 나타내는 파라메타인 $f \equiv F/F_c$ 의 함수로서 보의 변위를 나타낼 수 있음을 확인하였다.

Abstract

Static deformation theory of elastoplastic structures can be applied only if the magnitude of loading is less than the plastic collapse force F_c . However, with impact or explosive blast loading, the structure can be subjected to an intense but short-duration force pulse that exceeds the plastic collapse force and initiates structural collapse. In this paper, the dynamic response of a rigid-perfectly plastic cantilever subject to intense impact loading is examined in terms of the plastic collapse force.

발 표 : 1996년도 대한조선학회 춘계연구발표회('96. 4. 18)

접수일자 : 1996년 6월 8일, 재접수일자 : 1998년 1월 22일

*정회원, 서울대학교 조선해양공학과

**서울대학교 조선해양공학과 대학원

When a step loading is applied, the motion of the beam is calculated and analyzed through the non-dimensionalization of variables. It is concluded that the motion of a beam can be characterized as a function of the nondimensionalized force parameter, $f \equiv F/F_c$, where F_c represents the critical force for plastic collapse. This result is used to the analysis of the beam motion subject to rectangular force pulse.

1. 서론

선박은 항해 중에 파랑 충격하중, 충돌, 좌초 등 여러 형태의 충격하중을 받는다. 이러한 충격하중 하의 선박의 전체 및 국부구조거동을 파악하기 위하여 단순화된 보 구조물의 충격거동을 연구할 필요가 있다[1, 2]. 정적인 탄소성 보구조물의 변형은 하중의 크기가 소성 붕괴력 F_c 보다 작게 될 때만 적용된다. 그러나 충격이나 폭발 하중 상황에서 소성 붕괴력을 넘는 하중을 받는 보 구조물은 정적인 탄소성 변형과는 다른 응답특성을 보이게 된다[3].

본 논문에서는 간단한 구조 모델로서 강-완전소성 외팔보를 도입하여 소성 붕괴력보다 큰 하중 ($F > F_c$) 이 작용하였을 때 구조물의 응답특성을 연구하였다.

관련된 연구로는 우선 Nonaka는 폭발하중을 받는 단순지지보의 대변형을 연구하였다[3]. de Oliveira[1]는 충돌 물체가 보의 변형에 미치는 영향을 고찰하였고, Symonds는 동적하중을 받는 보의 응답을 연구하였다[5]. 또한 Youngdahl은 소성힌지를 이용하여 보의 동적 소성 변형을 계산하였다[6].

그런데, Nonaka는 단순지지보만을 다루었고 de Oliveira는 에너지방법으로 접근하였고, Symonds는 하중의 크기를 구분하지 않았고, Youngdahl은 선형 감소파(Linearly decaying pulse)를 이용하였다는 연구의 제약성이 있었다.

본 연구에서는 위의 연구들을 보완하여 소성붕괴력을 초과하는 정적인 계단하중(step loading)을 받는 외팔보를 운동 방정식을 세워서 해석하고, 무차원화된 힘을 나타내는 파라메타인의 함수로서

$f \equiv F/F_c > 3$ 인 정적인 하중에서는 소성힌지의 발생 위치가 변동함을 보이고 소성힌지의 위치를 나타내었다.

계단 하중(step loading)에서 얻은 결과를 이용하여 충격적인 사각형과 하중(rectangular force pulse)이 가해지는 경우도 해석하였다. 해석 수행 결과 무차원화된 힘을 나타내는 파라메타인 $f \equiv F/F_c$ 의 함수로서 보의 변위를 나타낼 수 있음을 확인하였다.

2. 충격해석의 기본 가정 및 보의 평형 방정식

충격이나 폭발적인 하중을 받는 구조물의 동적 응답 해석을 위하여 본 논문에서는 Fig. 1과 같은 외팔보를 구조 모델로 하여 강 완전소성 외팔보(rigid-perfectly plastic cantilever) 끝단에 하중이 작용할 때 끝단의 동적 거동을 조사하였다.

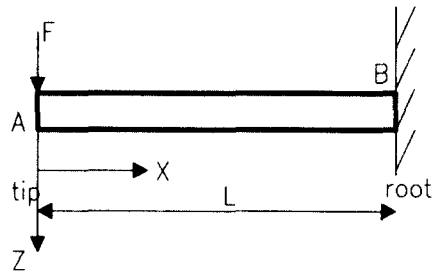


Fig.1 Uniform cantilever subjected to a transverse force $F(t)$ at the tip

2.1. 기본 가정

본 논문에서 사용된 기본 가정은 다음과 같다.

- 1)재료는 강 완전소성체로 가정한다.
- 2)보의 단위 길이당 질량(ρ)은 균일하고 길이 방향의 모양 변화는 없다.
- 3)속도장은 선형으로 변화한다.
- 4)축변형 및 전단변형은 무시한다.
- 5)운동 에너지는 병진 운동 에너지만 존재한다.

2.2. 평형 방정식 및 소성힌지 이론

보의 단위 길이당 분포력($g(X)$)와 전단력($Q(X)$),모멘트($M(X)$)의 평형방정식은 다음과 같다.

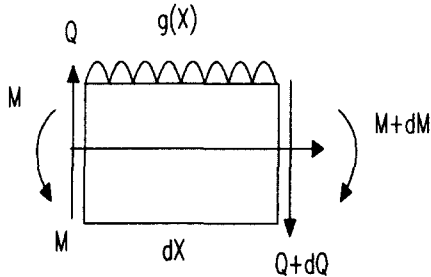


Fig.2 Force and moments on a beam element

$$\frac{dQ}{dx} = -g(X) \tag{1}$$

$$\frac{dM}{dx} = -Q(X) \tag{2}$$

주어진 에너지가 크고, 급힘 소성 변형량이 큰 경우에는 소성힌지 이론이 이용된다. 변형을 속도효과를 갖지 않는 강완전 소성체로 가정할 수 있는 경우는 $E_R = K/S_E \gg 1$ 이고 $\tau_d / T_0 \ll 1$ 일 때이다[4]. 여기서 K는 보의 운동 에너지 S_E 는 보가 흡수하는 최대 탄성 변형 에너지, τ_d 는 하중의 작용 시간이다.

T_0 는 보의 고유 탄성 주기(naturally elastic period)로서 단순지지일 때 $T_0 = \frac{2L^2}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{EI}}$ 이고 양단 고정보일 때는 $T_0 = \frac{2\pi L^2}{(4.73)^2} \sqrt{\frac{\rho}{EI}}$ 이다.

$E_R = K / S_E \gg 1$ 이고 $\tau_d / T_0 \ll 1$ 인 경우의 보는 강 완전소성체로 모델링하여 해석한 결과와 실제로 실험한 결과가 잘 일치함이 알려져있다[4].

그리고 B점(root)에서 소성 힌지를 발생시키게 하는 소성붕괴력 (F_c)은 다음과 같이 정의한다.

$$F_c = \frac{M_p}{L} \tag{3}$$

여기서 M_p 는 완전 소성 모멘트이다.

3. 계단 하중을 받는 외팔보의 응답특성

3.1. 완전 소성힘을 초과하는 하중

$$(F_c < F < 3F_c)$$

B점에서 소성 힌지를 발생시키는 힘 F_c 보다 큰 F 힘(Fig.3)가 가해질 경우 여분의 힘 ($F - F_c$)이 Fig.4처럼 보의 가속도 운동을 일으킨다.

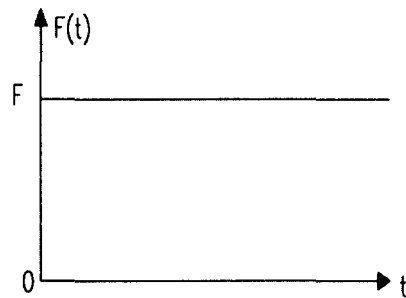


Fig.3 Step force originating at t=0

Fig.4에서 외팔보 전체의 힘과 모멘트 평형 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{1}{2} \rho L \frac{dV}{dt} = F + Q_B \tag{4}$$

여기서 V 는 끝단 속도, Q_B 는 B점의 전단력이다.

$$\frac{1}{3} \rho L^2 \frac{dV}{dt} = FL - M_P \quad (5)$$

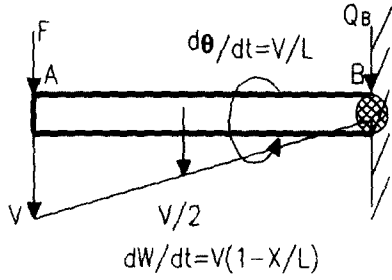


Fig.4 Deformation mechanism of the cantilever with a plastic hinge at the root

식(3)을 식(5)에 대입하면 끝단에 대한 일정한 가속도가 (6)식으로 얻어진다.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3(FL - M_P)}{\rho L^2} = \frac{3(F - F_C)}{\rho L} \quad (6)$$

속도를 $\frac{\partial W}{\partial t} = V(1 - \frac{X}{L})$ 라 하면 운동에너지는 다음과 같다.

$$K = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dX = \frac{1}{6} \rho L V^2 \quad (7)$$

식(6)과 (7)에 따르면 운동에너지의 변화율은 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{dK}{dt} = FV - \frac{M_P V}{L} = (F - F_C) V \quad (8)$$

여기서 동적 문제를 간결하게 정식화하기 위해 식(9)와 같은 무차원화한 변수를 도입한다.

$$x \equiv \frac{X}{L}, w \equiv \frac{W}{L}, f \equiv \frac{F}{F_C}, q \equiv \frac{Q}{F_C} \quad (9)$$

무차원화한 시간을 또한 다음과 같이 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T_0} \quad (10)$$

여기서 T_0 는 무차원화하기 위한 시간으로서

$$T_0 \equiv L \sqrt{\frac{\rho}{F_C}} = L \sqrt{\frac{\rho L}{M_P}} \text{ 이다.}$$

$$\text{끝단속도는 } v(\tau) \equiv \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \tau} \equiv \dot{w}(0, \tau) \text{ 이고}$$

$$\text{여기서 } (\dot{\quad}) \equiv \frac{\partial(\quad)}{\partial \tau} \text{ 이다.}$$

보의 전단력의 분포를 얻기 위해 가속도의 분포를 다음과 같이 가정한다.

$$\ddot{w}(x) = \dot{v}(1-x) \quad (11)$$

식(4)와 식(6)을 결합하면 B점에서 반력은 다음과 같이 구해진다.

$$q_B = \frac{1}{2}(f-3) \quad (12)$$

보의 가속부분에서 전단력 분포는 다음과 같다.

$$q(x) = -f + \int_x^0 \dot{w}(x) dx = -f + \dot{v} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \quad (13)$$

$Q(L) = Q_B$ 라는 경계조건으로부터 $q(1) = q_B = (f-3)/2$ 이 되고 이를 식(13)에 대입하면 $\dot{v} = 3(f-1)$ 이라는 관계식을 얻게 되므로 가속하는 부분의 전단력 분포는 식(14)와 같이 된다.

$$q(x) = \frac{1}{2}(f-3) - \frac{3}{2}(1-x)^2(f-1) \quad (14)$$

$q(x) = -\frac{dm(x)}{dx}$ 이라는 관계식으로부터 굽힘모멘트는 전단력을 적분함으로써 얻을 수 있다.

$$m(x) \equiv \frac{M}{M_p}$$

$$= -\frac{1}{2} \{x(f-3) + [(1-x)^3 - 1](f-1)\}$$

(15)

식(14)와 (15)를 도식하면 Fig.5가 된다. 식(14)에서 $f > 3$ 일 경우는 Fig.5처럼 $q(x) = 0$ 인 점의 보의 내부($0 < \lambda < 1$)에서 발생하게 된다.

즉 $\frac{dm(\lambda)}{dx} = q(\lambda) = 0$ 이 되고 $m(\lambda)$ 가 극대 값을 갖게 된다. 이 결과는 $m(\lambda) > m(1) = 1$ 을 나타낸다. 이런 모순된 결과는 소성 힌지가 가해지는 힘의 크기에 상관없이 B점(root)에서 발생한다고 가정했기 때문이다. 소성 힌지는 최대 모멘트가 걸리는 λ 지점에서 발생한다.

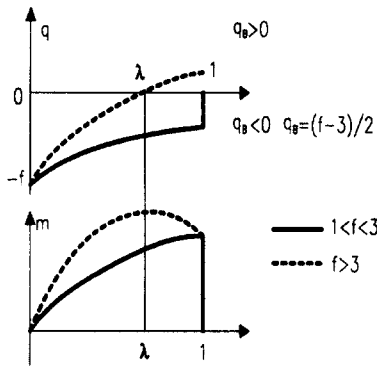


Fig.5 Distribution of shear force and bending moment along the cantilever when step force F is both $F_C > F > 3F_C$ and $F > 3F_C$

보 내부의 $X = \lambda = 1 - \sqrt{\frac{f-3}{3(f-1)}}$ 에서 부호가 바뀌게 되어서, Fig.4는 $F_C > F > 3F_C$ 일 경우에만 만족하고 $F > 3F_C$ 인 경우 새로운 응답조건을 요구하게 된다.

3.2 $F > 3F_C$ ($f > 3$) 인 하중

Fig.6과 같이 힌지부 ($x = \lambda, X = \Lambda = \lambda L$)에서의 굽힘모멘트와 전단력은 각각 $M(\Lambda) = M_p$ 와 $Q(\Lambda) = 0$ 이다. 이를 식(4), (5)에 대입하면 무차원화한 AH부분의 운동방정식은 식(16), (17)이 된다.

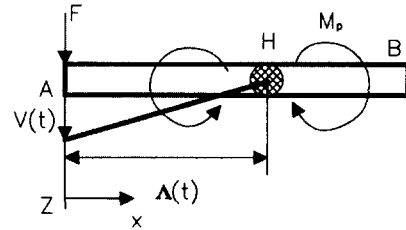


Fig.6 Deformation mechanism of the cantilever with plastic hinge at interior point H

$$\frac{1}{2} \lambda \dot{v} = j \tag{16}$$

$$\frac{1}{3} \lambda^2 \dot{v} = f\lambda - 1 \tag{17}$$

끝단의 횡방향 가속도는 식(18)과 같이 힌지 위치 λ 의 함수로서 주어진다.

$$\dot{v} = \frac{2f}{\lambda} \tag{18}$$

그러므로, 보 전체의 가속도 분포를 다음과 같이 두면

$$\dot{w} = \dot{v} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{2f}{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{19}$$

와 같으며, 여기서 전단력과 굽힘 모멘트 분포를 구해보면 다음과 같다.

$$q(x) = -f \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^2 \tag{20}$$

$$m(x) = 1 - \frac{f\lambda}{3} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^3 \quad (21)$$

끝단 ($x=0$) 에서의 모멘트 조건 $m(0)=0$ 으로부터 $\lambda = \frac{3}{f}$ 이라는 조건을 얻을 수 있으며, 끝단에서의 가속도는 식(22)와 같다.

$$\dot{v} = \frac{2f^2}{3} \quad (22)$$

f 의 크기 별로 나눈 끝단의 가속도는 다음과 같으며

$$\dot{v} = \begin{cases} 0, & 0 \leq f \leq 1 \\ 3(f-1), & 1 < f \leq 3 \\ 2f^2/3, & 3 < f \end{cases} \quad (23)$$

식(23)을 도시하면 Fig.7과 같다.

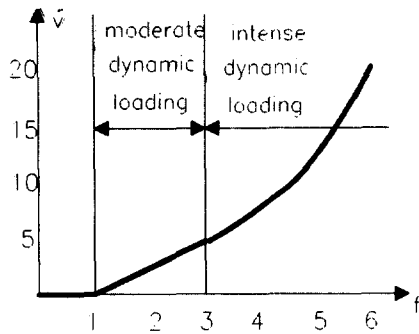


Fig.7 The tip acceleration versus the magnitude of step loads

4. 사각형과 하중을 받는 외팔보의 응답 특성

4.1. 외팔보의 3단계 응답

사각형과 하중은 Fig.8과 같이 시간 $t=0$ 일때 가해졌다가 $t=t_d$ 일때 사라지는 힘이며 식(24)로 표기할 수 있다.

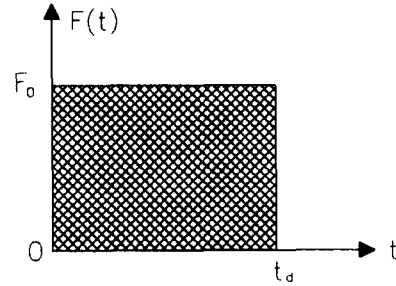


Fig.8 A rectangular force pulse of magnitude F_0 and duration t_d

또한 $F_0 > 3F_c$ 인 사각형과 하중을 받는 경우 외팔보의 응답을 3단계로 나눌 수 있는데, 1단계 ($0 < \tau < \tau_d \equiv t_d/T_0$) 는 사각형과 하중이 생겼다가 사라지는 기간을 말하고, 2단계 ($\tau_d \leq \tau \leq t_2$) 는 1단계 직후부터 이동 힌지가 B점 ($\lambda=1$) 에 도달하는 시각 τ_2 까지, 3단계 ($\tau_2 < \tau < \tau_f$) 는 2단계 직후부터 외팔보의 운동이 중지될 때 ($\tau = \tau_f$) 까지이다.

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq t \leq t_d \\ 0, & t_d < t \end{cases} \quad (24)$$

AH부분(Fig.7)의 모멘텀은 식(25)와 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^t \rho \frac{\partial W}{\partial t} dX &= \frac{1}{2} \rho \Lambda V \\ &= \int_0^t F(t) dt \\ &= \begin{cases} F_0 t, & 0 \leq t \leq t_d \\ F_0 t_d, & t_d < t \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

식(25)와 유사한 방식으로 회전 모멘텀을 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\Lambda} \rho \frac{\partial W}{\partial t} X dX = M_p t \quad (26)$$

속도 분포식 $\frac{dW}{dt} = \left(1 - \frac{X}{\Lambda}\right) V$ 을 대입하면

식(27)과 같다.

$$\frac{1}{2} \rho \Lambda^2 V = M_P t \quad (27)$$

식(27)을 식(25)와 연립하면 힌지 위치에 대한 식(28)이 구해진다.

만일 $F_0 > 3F_C$ 이면

$$\Lambda = \Lambda_0 = \frac{3M_P}{F_0} = \text{const} \quad (28)$$

이를 무차원화하면

$$\lambda_0 \equiv \frac{\Lambda_0}{L} = \frac{3}{f} \quad (29)$$

이 된다. 무차원화한 끝단 속도는 식(30)이다

$$v = \frac{2}{3} f^2 \tau \quad (30)$$

4.2. 1단계 운동

1단계 운동 끝의 끝단 속도는 식(31)이다.

$$v_1 = v(\tau_d) = \frac{2}{3} f^2 t_d = \frac{2}{3} P_f f \quad (31)$$

여기서 $\tau_d = \frac{t_d}{T_d}$ 이다. 무차원화한 총 임펄스는 식(32)가 된다.

$$p_f \equiv \frac{P_f}{F_C T_0} = \frac{P_f}{L \sqrt{F_C \rho}} = f \tau_d \quad (32)$$

여기서 $P_F \equiv F_0 t_d$ 는 총 임펄스이다.

$\tau = \tau_d = \tau_1$ 에서 무차원화된 끝단의 변위는 식(33)이 된다.

$$\delta_1 \equiv \frac{\Delta(\tau_1)}{L} = \int_0^{\tau_1} v(\tau) d\tau = \frac{p_f^2}{3} \quad (33)$$

힌지 위치 (H_0) 에서 회전각과 힌지 위치는 다음 식과 같다.

$$\theta_1 = -\frac{1}{9} p_f^2 f \quad (34)$$

$$\lambda \equiv \frac{\Lambda}{L} = \frac{3\tau}{p_f} \quad (35)$$

4.3. 2단계 운동

2단계 운동 동안에 힌지의 운동 속도는 식(35)를 미분하면 된다.

$$\dot{\lambda} \equiv \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{3}{p_f} = \text{const} \quad (36)$$

힌지가 운동하는 동안 끝단 속도는 식(35)를 식(27)에 대입하면 얻어진다.

$$v = \frac{6\tau}{\lambda^2} = \frac{2p_f^2}{3\tau} \quad (37)$$

2단계 운동 기간 동안의 끝단의 변위는 식(38)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \delta(\tau) &= \delta(\tau_d) + \int_{\tau_d}^{\tau} v u(\tau) d\tau \\ &= \frac{p_f^2}{3} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{\tau}{\tau_d} \right) \right] \end{aligned} \quad (38)$$

2단계 운동은 이동 힌지가 B점 ($\lambda=1$) 에 도달하는 순간 ($\tau = \tau_2$) 에 끝나게 된다.

$$\tau_2 = \frac{p_f}{3} \quad (39)$$

이 순간의 끝단 속도와 변위는 V_2 와 δ_2 이다.

$$v_2 \equiv v(\tau_2) = 2p_f \quad (40)$$

$$\delta \equiv \delta(\tau_2) = \frac{p_f^2}{3} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{f}{3} \right) \right] \quad (41)$$

$$\theta_3 = -\frac{2}{3} p_f^2 \quad (45)$$

4.4. 3단계 운동

힌지가 B점에 도달한 후 ($\tau > \tau_2$) 에는 응답 형태는 다시 변화하고 3단계 운동이 시작된다.

소성힌지는 B점에 고정되고 외팔보는 B점을 중심으로 강체로서 회전하게 된다.

$$v(\tau) = 3(p_f - \tau) \text{ when } \frac{p_f}{3} \leq \tau \leq p_f \quad (42)$$

외팔보의 운동은 끝단의 속도가 사라질 때 끝나게 된다.

$$\tau_f = p_f = 3\tau_2 \quad (43)$$

최종적인 무차원화된 변위는 식(44)와 같다.

$$\begin{aligned} \delta_f &= \delta(\tau_f) \\ &= \delta_2 + \int_{\tau_2}^{\tau_f} v(\tau) d\tau \\ &= p_f^2 \left[1 + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{f}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

3단계 운동이 끝났을 때의 최종 회전각은 아래 식과 같다.

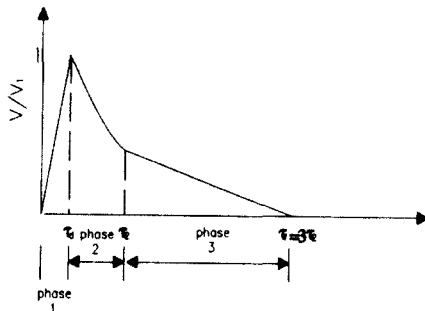


Fig.9 The variation of the tip velocity with time for a rectangular pulse when $f = F_0/F_c = 12$

5. 결론

강-완전소성 외팔보에 소성붕괴력 F_c 보다 큰 하중이 가해질 경우 크게 $F_c < F < 3F_c$ 와 $F < 3F_c$ 의 구간으로 나누어서 외팔보의 동적 응답을 계산하였고 이를 이용하여 소성붕괴력보다 큰 사각형과 충격하중을 받는 외팔보의 응답을 계산한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) $F > 3F_c$ 의 경우의 거동에서 고정된 힌지를 갖는 소성 응답은 $F_c < F < 3F_c$ 의 범위에서만 유효하다.

(2) $F > 3F_c$ 일 경우는 전단력이 0인 점이 보의 내부 ($0 < \lambda < 1$) 에서 발생하게 된다.

(3) 사각형과 충격하중 ($F > 3F_c$) 에서 3단계 운동 기간은 1단계 운동과 2단계 운동 기간의 합 의 2배가 된다.

참 고 문 헌

- [1] de Oliveira, J.G., "Beams under Lateral Projectile Impact", Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 108(EM1), pp.57-81, 1982.
- [2] 최호웅, "전단변형을 고려한 보의 횡충격 해석", 서울 대학교 공학 석사 학위 논문, 1995.
- [3] Nonaka, T., "Shear and Bending Response of a Rigid-plastic Beam to Blast-type Loading", Ingenieur-Archiv, Vol.46, pp.35-52, 1977.
- [4] Jones, N., Structural Impact, pp.104-108, The Cambridge University Press, 1989.
- [5] Symonds, P.S., "Bounds for Finite Deflections of Impulsively Loaded Structures with Time Dependent Plastic Behavior", Int. J. Solids Structures, Vol.11, pp.403-423, 1975.
- [6] Youngdahl, C.K., "Correlation Parameters for Eliminating the Effect of Pulse Shape on Dynamic Plastic Deformation", ASME, J. Appl. Mech, Vol. 39, pp.744-752, 1970.