

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第 35 卷 第 1 號 1998 年 2 月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 35, No. 1, February 1998

## 충격하중을 받는 구조부재의 탄소성 파괴해석 프로그램 개발

김경수\*, 박준범\*\*

### Development of Elastic-Plastic Fracture Analysis Program for Sturctural Elements under an Impact Loadings

by

K. S. Kim\* and J. B. Park\*\*

#### 요 약

본 논문에서는 2차원 공간에서의 탄성 또는 탄소성응력파를 받는 구조부재의 동적 파괴거동을 다룬다. 이러한 문제에 대한 지배방정식은 운동방정식과 탄소성 구성방정식에 대한 증감식으로 구성된 쌍곡선 편미분 방정식으로 나타나고, 이를 풀기 위해 유한차분법을 기초로 한 Zwas방법이 도입된다.

또한 탄소성문제의 동적거동을 나타내기 위해 응력공간내 탄소성 loading path가 소성항복 현상을 모델링하는데 제안된다.

이러한 계산결과를 바탕으로 탄성체의 균열선단의 동적응력확대계수가 계산되어지고, 탄소성체에 대한 소성영역의 형상의 시간이력을 보여준다.

#### Abstract

This paper describes a dynamic fracture behaviors of structural elements under elastic or elasto-plastic stress waves in two dimensional space. The governing equation of this problem has the type of hyperbolic partial differential equation, which consists of the equation of motions and incremental elasto-plastic constitutive equations. To solve this problem we introduce Zwas' method which is based on the finite difference method.

---

발 표: 1996년도 대한조선학회 추계연구발표회('96. 11. 8.)

접수일자: 1996년 11월 8일, 재접수일자: 1998년 1월 14일

\* 정회원, 인하대학교 선박해양공학과

\*\* 학생회원, 인하대학교 선박해양공학과 대학원

Additionally, in order to deal with the dynamic behavior of elasto-plastic problems, an elasto-plastic loading path in the stress space is proposed to model the plastic yield phenomenon.

Based on the result of this computation, the dynamic stress intensity factor at the crack tip of an elastic material is calculated, and the time history of a plastic zone of a elasto-plastic material is to be shown.

## 1. 서론

충격하중을 받는 탄성체에 대한 연구는 Chen과 Wilkins[1]에 의해 전개된 HEMP code가 대표적이다. 그러나 이는 응력의 정확한 모델링에 관심을 두기 보다는 전체적인 수치적 안정성에 관심을 두었다. 응력을 정확히 모델링하고 파의 움직임을 효과적으로 고려한 또하나의 중요한 방법은 고체에서 다변수문제를 고려하는 Bicharacteristic Method이다. 이 Bicharacteristic Method는 시간과 공간상의 서로 다른 파의 물리적으로 전파되는 궤적을 수치적으로 추적하는 방법이고, 이는 안정성조건, CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) condition, 이 1의 값을 갖는 explicit scheme이 될 수 있다. 이 Bicharacteristic method를 사용하여 탄성체에서의 응력파의 전파와 균열파의 상호작용에 대한 연구와 응용이 Kim[2]에 의해 활발히 진행되어 왔고 국내에도 논문[3]이 발표되었다.

이에 비해, 충격하중이나 매우 높은 주파수로 변하는 하중을 받는 조건하에 균열근처에서 소성 영역의 형성에 관한 모델은 거의 알려지지 않았다. 이러한 하중을 받는 재료는 시간에 의존하고 매우 강한 불균일 거동을 나타내기 때문이다. 이로 인해 균열선단에서 응력파로 인한 현상이 소성영역에서 어떠한 영향을 미치는가라는 것을 연구하는 것이 동적균열의 발생 초기에 관한 연구에 매우 중요한 역할을 한다고 할 수 있다.

본 논문에서는 충격하중을 받는 탄소성파괴해석을 다루는데, 이 문제의 지배방정식은 운동방정식과 탄소성 구성방정식에 대한 증분식으로 구성된 쌍곡선 편미분 방정식을 형성하고 이를 수치적으로 풀기 위해서 Zwas의 2단계해석법[4] 방법을 소개한다. 응력상태가 탄소성 상태로 바뀌는 경우,

탄소성 고체의 동적 다변수문제에 대한 적분이 그 재료에 대한 응력상태를 찾아가기 위해 수행되어져야 하는데, 이 적분은 하중이 소성영역으로 들어갈 때 하중경로에 의존하여 수행되어 최종 소성상태에서의 응력을 찾는 데 사용되어진다.

## 2. 지배방정식

### 2.1 탄성체에 대한 지배방정식

탄성의 경우, 평면변형조건하에 동적-탄성 지배방정식은

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= \rho c_1^2 \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \rho c_1^2 \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \rho c_2^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (1)$$

여기서  $u$ ,  $v$ 는 각각  $x$ ,  $y$ 방향 입자속도,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ 는 응력성분,  $\rho$ 는 밀도,  $c_1$ ,  $c_2$ 는 각각 종파와 횡파의 속도로  $c_1 = \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right]^{1/2}$ ,

$c_2 = \left[ \frac{\mu}{\rho} \right]^{1/2}$ 이다. 여기서  $\lambda$ 는 Lamé의 상수,  $G$ 는 전단탄성계수이다. 그리고  $a = 1 - 2(c_2/c_1)^2$ 이다.

2차원 탄성파에서는 2개의 특성모드, 즉 종파속도(longitudinal wave velocity,  $c_1$ ) 또는 횡파속도(transverse wave velocity,  $c_2$ )를 가지고 파들이 전파된다.

## 2.2 탄소성체에 대한 지배방정식

탄소성 지배방정식이 유도되기 위해서는 탄소성에 대한 하중경로와 구성방정식에 대해서 먼저 논의 되어져야 한다.

### 2.2.1 탄소성 하중경로와 탄소성 구성방정식

다루려는 재료가 등방 가공경화 재료이고 von Mises 항복조건을 따른다고 가정하자. 이 재료가 소성상태에 들어간다면, 편차 응력,

$$S_{kl} \equiv \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \delta_{kl} \quad (k, l, m = 1, 2, 3)$$

는 다음의 von Mises 항복조건을 만족한다.

$$\frac{1}{2} S_{kl} S_{kl} - \chi^2 = 0 \quad (2)$$

여기서  $\chi$ 는 항복응력이다. 소성 변형률성분의 증분[5]은

$$d \varepsilon_{kl}^p = S_{kl} d\lambda \quad (3)$$

로 주어지고, 여기서  $d\lambda$ 는 1차원 1축인장 곡선 또는 1차원 단순 전단곡선으로 얻어질 수 있는 증감자이다. 좀 더 간단한  $d\lambda$ 에 대한 식을 얻기 위해 1차원 단순 전단곡선을 선택한다. 이로 인해 소성 전단 변형률의 증분  $d\gamma^p$ 와 전단응력의 증분  $d\tau$ 는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$d\left(\frac{\gamma^p}{2}\right) = \frac{h}{2\mu} d\tau \quad (4)$$

여기에서 소성요소인  $h$ 는  $h = \frac{\mu}{\mu_p} - 1$ 이고  $\mu = \rho c_2^2$ 는 전단탄성계수이며,  $\mu_p = \mu_p(\tau)$ 는 소성영역에서 곡선  $\tau = \tau(\gamma)$ 의 기울기를 나타낸다. 이로부터  $d\lambda$ 는 결정될 수 있고 식(3)은 다음의 형태를 갖는다.

$$d\varepsilon_{kl}^p = \frac{h}{2\mu} \frac{S_{kl}}{\chi} d\chi \quad (5)$$

질재 소성류에서 Drucker의 가설[5]에 의하면 소성변형률성분의 증분  $d\varepsilon_{kl}^p$ 에 대한 벡터는 식(2)으로 주어진 항복표면상의 바깥쪽 수직방향에 평행하고 벡터  $dS_{kl}$ 과  $d\varepsilon_{kl}^p$  사이의 각  $\psi$ 는 예각을 이룬다(Fig. 1 참조).

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

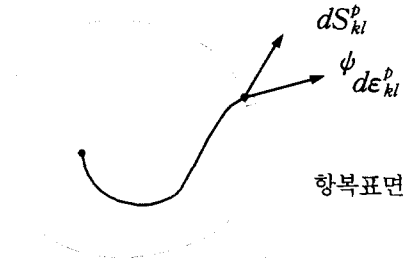


Fig. 1 Loading path

그러나  $\psi$ 를 결정하는데 계산상의 어려움이 발생한다. 1차원의 경우[6]는 종방향 응력파와 횡방향 응력파가 혼합되어 하중궤적을 따라  $\psi$ 의 변화를 결정할 수 있으나, 2차원의 경우는 각 응력파에 대한  $\psi$ 를 결정하기는 매우 어렵다. 그런데 식(6)을 만족하는 모든  $\psi$ 가 물리적으로 가능하므로,  $\psi=0$ 을 선택하여 소성영역에서의 하중 경로를 규정한다. 결국  $dS_{kl}$ 의 방향은 항복표면에 수직이고,

$$\frac{dS_{kl}}{S_{kl}} = \frac{d\chi}{\chi} \quad (7)$$

의 관계식이 유도될 수 있다.

그러므로 식(4)는

$$d\varepsilon_{kl}^p = \frac{h}{2\mu} dS_{kl} \quad (8)$$

이 된다.  $d\varepsilon_{kl}$ 을 편차 변형률 증감으로 나타내고 그리고 편차응력이 항복시 재료의 비압축 소성을

가정하면, 다음과 같은 탄소성 구성방정식을 얻는다.

$$de_{kl} = d e_{kl}^e + d e_{kl}^p = \frac{1+h}{2\mu} dS_{kl} \quad (9)$$

여기서  $e_{kl}$  은 변형률을 나타낸다.

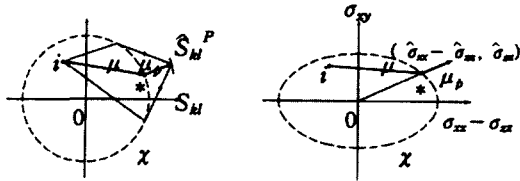


Fig.2 The schematic of elastic-plastic stress loading path

예를 들어 탄소성 응력에 대한 하중경로는

$$S_{kl}^i \xrightarrow{\mu} S_{kl}^* \xrightarrow{\mu_p} \hat{S}_{kl} \quad (10)$$

의 절차로 진행하고 하중경로의 가정에 의해 유일한 경로가 존재하게 된다. 여기서 점  $i$  는 초기상태, 하중이 작용한 후 점  $\hat{S}_{kl}$  는  $x, y$  표면의 바깥쪽에 존재하는 최종응력상태를 나타내고, 점\*은 항복표면과 원점에서 점  $\hat{S}_{kl}$  를 잇는 선의 교점이 된다.

Fig.2에서 보는 바와 같이 하중경로에 대한 문제는  $S_{kl}$  공간 또는  $(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}, \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \sigma_{xy})$  공간이 사용되어 질 수 있다. 본 논문에서는 계산을 간단하게 하기 위해 응력에 대한 공간의 차원이 적은  $(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}, \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \sigma_{xy})$  공간을 사용한다.

그러므로 Fig.2.b에서 항복표면이 타원의 형상을 갖게 되며  $(\hat{\sigma}_{xx} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{yy} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{xy})$  가 최종응력성분이라면, 점\*은 항복표면과 점  $(\hat{\sigma}_{xx} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{yy} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{xy})$  에서 원점을 잇는 직선의 교점으로 주어진다.

### 2.2.2 탄소성 지배방정식

평면변형률상대하의 탄소성체를 풀기 위한 지배방정식은

$$A \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (11)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+h}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+h}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+h}{\mu} \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ \sigma_{xx} - \sigma_{zz} \\ \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ u \\ 0 \\ v \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ v \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

식(11)에서  $K$ 는 탄성체적계수이다. 첫 번째, 두 번째 식은 운동방정식을 나타내고 세번째 식은 체적의 선형탄성 변화를 나타내는 식이며, 네 번째에서 여섯 번째 식은 평면변형률상태를 가정하여 식(9)로부터 유도된 식이다.

탄소성체에서의 종파의 속도는  $\pm \sqrt{\frac{K + \frac{4\mu}{3}}{\rho}}$  가 되고, 횡파의 속도는  $\pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho(1+h)}}$  가 된다.

만약,  $h$ 가 '0'이면 탄성체에 대한 전파속도와 일치하고 지배방정식도 탄성체에 대한 지배방정식과 일치한다.

## 3. 수치해법

### 3.1 탄성체 경우에 대한 수치계산법

탄성체의 경우 Zwas방법[4]이 식(1)에 사용될 수 있다. 즉 평면(x,y)내의 해영역은 많은 사각형 cell로 나뉜다고 가정하고, 이 cell의 중간값

(i, j)을 시간  $t^n$ 에서  $w_{ij}^n = w(n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y)$ 로 나타내면, Zwas의 수치적 scheme은 다음의 형태를 갖는다.

$$w_{i+(1/2),j+(1/2)}^{n+(1/2)} = \frac{1}{4}(w_{i,j}^n + w_{i+1,j}^n + w_{i,j+1}^n + w_{i+1,j+1}^n) + \frac{\Delta t}{4\Delta x}(f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n + f_{i+1,j+1}^n - f_{i,j+1}^n) + \frac{\Delta t}{4\Delta y}(g_{i,j+1}^n - g_{i,j}^n + g_{i+1,j+1}^n - g_{i+1,j}^n)$$

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{i+(1/2),j}^{n+(1/2)} - f_{i-(1/2),j}^{n+(1/2)}) + \frac{\Delta t}{\Delta y}(g_{i,j+(1/2)}^{n+(1/2)} - g_{i,j-(1/2)}^{n+(1/2)})$$

식(12)의 두 번째에서 유동  $f_{i+(1/2),j}^{n+(1/2)}$ 를 Zwas는  $f_{i+(1/2),j}^{n+(1/2)} = f(w_{i+(1/2),j+(1/2)}^{n+(1/2)} + w_{i+(1/2),j-(1/2)}^{n+(1/2)})/2$ 로 XLin[7]은  $f_{i+(1/2),j}^{n+(1/2)} = (f_{i+(1/2),j+(1/2)}^{n+(1/2)} + f_{i+(1/2),j-(1/2)}^{n+(1/2)})/2$ 로 제안했다. 본 논문에서는 후자의 제안을 따른다. 또한 유동  $g$ 에 대해서도 같은 수치적 기법을 갖는다. 위 두 제안식은 탄성일 경우에는 일치한다. 수치계산할 때  $\Delta x = \Delta y$ ,  $c_1 \Delta t / \Delta x = 1$ 로하여 CFL안정성 조건이 1이 되도록 한다.[2]

3.2 탄소성체 경우에 대한 수치계산법

탄소성체에 대한 지배방정식인 식(11)은 Godunov[8]와 Zwas방법으로부터 2단계로 나뉘어 계산 되어진다.

1단계는 격자점의 유동을 계산한다.

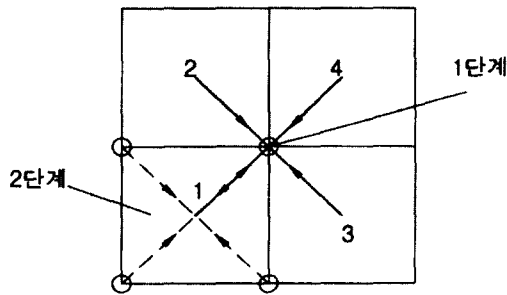


Fig. 3 The schematic of cells and grid points

여기서 기호의 단순화를 위해 부호규약을 하자 (Fig.3). 즉, cell중앙값은  $w_{ij}^n = w_1$ ,  $w_{i,j+1}^n = w_2$ ,  $w_{i+1,j}^n = w_3$ ,  $w_{i+1,j+1}^n = w_4$  그리고 격자점의 값은  $w_{i+(1/2),j+(1/2)}^{n+(1/2)} = w$ 로 나타내고  $f_{ij}^n$ 와  $g_{ij}^n$ 도 동일한 부호규약을 사용한다.

모든 속도와 응력성분은  $w$ 에 나타나고 유동  $f$ 와  $g$ 는  $w$ 로부터 직접 얻어지므로 먼저  $w$ 를 계산하여야 한다.  $w$ 에 대한 기법은

$$\int_{w_1}^w Adw + \int_{w_2}^w Adw + \int_{w_3}^w Adw + \int_{w_4}^w Adw = \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_4 + f_3 - f_2 - f_1) + \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_4 - g_3 + g_2 - g_1)$$

$w$ 의 첫 번째 3개의 성분,  $u, v, \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ , 는  $\rho, K$ 가 상수이므로 식(12)로부터 직접 계산될 수 있으나 나머지 3개식의 계수에 포함된  $h = h(\chi)$ 는 항복응력의 함수이므로, 응력성분이 항복응력을 넘어가는 경우 나머지 3개 성분,  $\sigma_{xx} - \sigma_{zz}, \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \sigma_{xy}$ , 은 Newton 반복법에 의해 구해져야 한다. 점  $(\hat{\sigma}_{xx} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{yy} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{xy})$ 을 응력공간내의 근사해로 주어진다 가정하면,

$$[(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) - (\hat{\sigma}_{xx} - \hat{\sigma}_{zz})] \sum_{m=1}^4 \frac{1 + \hat{h}_m}{2\mu} + \sum_{m=1}^4 \int_{(\sigma_{xx})_m - (\hat{\sigma}_{xx})_m}^{\hat{\sigma}_{xx} - \hat{\sigma}_{xx}} \frac{1 + h}{2\mu} d(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) = \frac{\Delta t}{\Delta x}(u_4 + u_3 - u_2 - u_1)$$

$$[(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) - (\hat{\sigma}_{yy} - \hat{\sigma}_{zz})] \sum_{m=1}^4 \frac{1 + \hat{h}_m}{2\mu} + \sum_{m=1}^4 \int_{(\sigma_{yy})_m - (\hat{\sigma}_{yy})_m}^{\hat{\sigma}_{yy} - \hat{\sigma}_{yy}} \frac{1 + h}{2\mu} d(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = \frac{\Delta t}{\Delta y}(v_4 - v_3 + v_2 - v_1)$$

$$(\sigma_{xy} - \hat{\sigma}_{xy}) \sum_{m=1}^4 \frac{1 + \hat{h}_m}{\mu} + \sum_{m=1}^4 \int_{(\sigma_{xy})_m}^{\hat{\sigma}_{xy}} \frac{1 + h}{\mu} d\tau = \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_4 + v_3 - v_2 - v_1) + \frac{\Delta t}{\Delta y}(u_4 - u_3 + u_2 - u_1)$$

가 되고,  $\hat{h}_m$ 은 점  $(\hat{\sigma}_{xx} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{yy} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{xy})$ 에서 셀 m에 대한 소성요소가 된다.

이 식은 반복하여 해를 찾는 데 쓰여질 수 있고,

응력공간내에서 최종응력값은 하중경로에 의존하며 앞에서 제한한 경로가 사용되었으며 이 하중경로를 따라가는 적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (\hat{p}_m - r_m, \hat{q}_m - r_m, \hat{\tau}_m) \\ & \xrightarrow{\mu} (\hat{p}_m^* - r_m^*, \hat{q}_m^* - r_m^*, \hat{\tau}_m^*) \\ & \xrightarrow{\mu_p} (\hat{p} - \hat{r}, \hat{q} - \hat{r}, \hat{\tau}) \end{aligned} \quad (15)$$

값  $\hat{h}_m$ 은 응력경로의 끝점,  $\chi = \hat{\chi}$ , 으로부터 결정되며 결국 응력경로의 최종점이 결정될 수 있다. 식(14)로부터 새로운 점  $(\sigma_{xx} - \sigma_{xx}, \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \sigma_{xy})$ 이 얻어지고 이 값은 다음 반복시 점  $(\hat{\sigma}_{xx} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{yy} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{xy})$ 으로 사용된다. 첫 번째 반복시 초기점  $(\hat{\sigma}_{xx} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{yy} - \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{xy})$ 은 탄성영역내에 존재한다고 가정한다. 그리고 1단계에서 얻어진 결과값의 정확도를 높이기 위하여 중앙에 격자점을 갖는 셀면적  $(\Delta x \times \Delta y)$ 에 걸쳐 적분으로 면적의 평균이 수행된다[6].

1단계에서 모든 격자점으로부터  $w$ 를 구한 후, 이로부터 얻어진 새로운 유동  $f$ 와  $g$ 가 2단계에서 cell 중앙 미지함수  $w$ 를 갱신하기 위해 계산된다. 식(11)을 cell(i,j)에 적용하면, 다음과 같은 수치적 기법을 얻는다.

$$\int_{u_y^*}^{u_y^{n+1}} A dw = \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+(1/2),j}^{n+(1/2)} - f_{i-(1/2),j}^{n+(1/2)}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (g_{i,j+(1/2)}^{n+(1/2)} - g_{i,j-(1/2)}^{n+(1/2)}) \quad (16)$$

여기서,

$$f_{i+(1/2),j}^{n+(1/2)} = (f_{i+(1/2),j+(1/2)}^{n+(1/2)} + f_{i+(1/2),j-(1/2)}^{n+(1/2)})/2$$

이다.

3개 응력성분  $(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}, \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \sigma_{xy})$ 은 소성유동조건과 셀(i,j)의 하중경로를 고려하여 계산되어야 한다.

$$\Delta \epsilon_{xx} = (\epsilon_{xx})_{ij}^{n+1} - (\epsilon_{xx})_{ij}^n, \quad \Delta \epsilon_{yy} = (\epsilon_{yy})_{ij}^{n+1} - (\epsilon_{yy})_{ij}^n,$$

$\Delta \epsilon_{xy} = (\epsilon_{xy})_{ij}^{n+1} - (\epsilon_{xy})_{ij}^n$ 를 가정하면 이는 Zwas의 두 번째 식으로부터 결정될 수 있다. 제한된 하중경로를 따라 다음식으로부터 응력성분이 결정된다.

$$\begin{aligned} & \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^* - (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})_{ij}^n}{2\mu} + \int_{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^*}^{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})_{ij}^{n+1}} \frac{d(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})}{2\mu_p(\chi)} = \Delta \epsilon, \\ & \frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^* - (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})_{ij}^n}{2\mu} + \int_{(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^*}^{(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})_{ij}^{n+1}} \frac{d(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{2\mu_p(\chi)} = \Delta \epsilon, \\ & \frac{\sigma_{xy}^* - (\sigma_{xy})_{ij}^n}{\mu} + \int_{\sigma_{xy}^*}^{(\sigma_{xy})_{ij}^{n+1}} \frac{d\sigma_{xy}}{\mu_p(\chi)} = \Delta \gamma \end{aligned} \quad (17)$$

새로운 항복응력은

$$\chi_{ij}^{n+1} = \left[ \frac{1}{3} \left[ \begin{aligned} & ((\sigma_{xx})_{ij}^{n+1} - (\sigma_{zz})_{ij}^{n+1})^2 \\ & + ((\sigma_{yy})_{ij}^{n+1} - (\sigma_{zz})_{ij}^{n+1})^2 \\ & + ((\sigma_{xx})_{ij}^{n+1} - (\sigma_{zz})_{ij}^{n+1}) \\ & \times ((\sigma_{yy})_{ij}^{n+1} - (\sigma_{zz})_{ij}^{n+1}) \end{aligned} \right] + (\tau_{ij}^{n+1})^2 \right]^{1/2}$$

로 갱신되어 진다.

### 3.3 경계조건

#### 3.3.1 대칭경계조건

대칭경계조건은 대칭적인 함수값을 갖는 1개의 셀열을 추가하여 내부 격자점인 것 처럼 계산한다.

#### 3.3.2 외력이 가해지는 경계조건과 자유단 경계조건

y=0이 경계일 경우, 가해진 외력을 받는 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy})_{i+1/2,1/2}^{n+1/2} &= Q \\ (\sigma_{xy})_{i+1/2,1/2}^{n+1/2} &= T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (u_{i,1}^n + u_{i+1,1}^n) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\rho\Delta x} ((\sigma_{xx})_{i+1,1}^n - (\sigma_{xx})_{i,1}^n) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\rho\Delta y} ((\sigma_{xy})_{i+1,1}^n + (\sigma_{xy})_{i,1}^n - 2T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{i+1/2,1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(v_{i,1}^n + v_{i+1,1}^n) \\
 &+ \frac{\Delta t}{2\rho\Delta x} ((\sigma_{xy})_{i+1,1}^n - (\sigma_{xy})_{i,1}^n) \\
 &+ \frac{\Delta t}{2\rho\Delta y} ((\sigma_{yy})_{i+1,1}^n + (\sigma_{yy})_{i,1}^n - 2Q) \\
 (\sigma_{xx})_{i+1/2,1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}((\sigma_{xx})_{i,1}^n + (\sigma_{xx})_{i+1,1}^n) \\
 &+ \frac{\rho c_1^2 \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1,1}^n - u_{i,1}^n) \\
 &+ \frac{\rho c_1^2 \Delta t}{2\Delta y} (v_{i+1,1}^n + v_{i,1}^n - 2v_{i+1/2,1/2}^{n+1/2})
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

여기서 Q, T는 경계에 작용하는 표면력이다. 자유표면에 대한 경계조건은 위의 경계조건에서  $Q = T = 0$ 으로 놓은 식과 같다.

그러나 소성류가 경계셀에서 발생하는 경우, 경계에서의 유동은 다른 방법으로 고려되어야 한다. 즉, Fig.3의 셀 3,4와  $x=0$ 으로 가정된 경계에서 주어진 값  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}$  로부터 경계 셀에서의 유동을 구하는 경우, 경계에서의  $w$ 에 대한 수치적 기법은

$$\int_w^{w_3} Adw + \int_w^{w_4} Adw = \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_4 + f_3 - 2\bar{f}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (g_4 - g_3)
 \tag{19}$$

이 된다. 식(11)의  $w$ 에 관한 첫 번째 두 개의 성분  $u, v$ 는 탄성에 관한 식(18)의  $\bar{f}$ 에 주어진 표면력  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}$  를 대입함으로써 구해질 수 있고, 식(19)의  $\bar{f}$ 의 마지막 네 개 성분에 이  $u, v$ 에 대한 결과값을 대입하여  $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \sigma_{xx} - \sigma_{zz}, \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \sigma_{xy}$  가 구해지며 식(14)에서와 유사한 방법으로 식(19)을 수치적으로 구할 수 있다.

### 3.3.3 균열선단의 경계조건

Fig.4로부터 균열선단이 격자점에 나타나므로 균열선단에 대한 경계조건이 필요하다. 그리고 균열선단에서 각 응력성분은 특이점을 가지나 속도성분에 대해서는 연속이어야 한다. 이로 인해 개구형 모드에서 Zwas방법의 첫단계 속도성분은  $u_0 = (u_A + u_B)/2$

$$v_0 = v_A/(\sqrt{27}-1) \approx v_A/4
 \tag{21}$$

이 되고, 이로써 셀 7,8에서 응력성분은 갱신될 수 있다.

그러나 Zwas방법의 첫단계의 0점에서 응력이 특이점을 가지므로, 셀 7,8에서의 속도성분은 구해질 수 없다. 그래서 다시 속도의 연속성을 이용하고 주위 4점의 유동을 평균하여 셀 7,8의 속도를 얻는다. 이로 인해 다음 시간으로 계산을 진행할 수 있게 된다. 그러나 균열주변에서 큰 함수값의 증가 때문에 균열선단의 속도분포가 거칠게 나타나므로 셀 7,8에서 한 계산을 셀 1에서 6까지 수행한다면 좀 더 나은 결과를 얻는다.

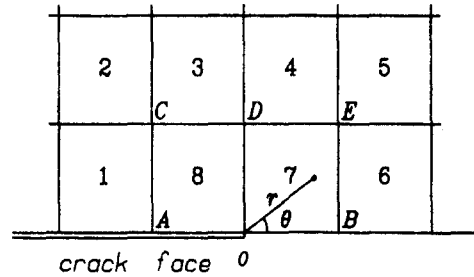


Fig. 4 The schematic of cells around a crack tip

## 4. 수치해석 결과

### 4.1 탄성문제

#### 4.1.1 해석적으로 구해진 해와의 비교계산

무한체의 중앙에 유한한 개구형(Mode I) 균열이 존재하는 문제를 계산하자. 이는 해석적 방법으로 Kim[9]에 의해 다루어졌었다.

Fig.5.(a)는 문제를 개략적으로 설명하고 있다. 여기서 같은 크기의 2개의 평면파가 양측  $y>0, y<0$ 으로부터 균열에 동시에 도달한다.  $v$ 의 부호는 반대이고 파정이 이루는 선은 균열표면과 평행하다. 또한 시간  $t=0$ 은 파가  $y=0$ 에 도달하는 시간이다.

대칭조건에 의해, Fig.5.(b)에서 보는 것과 같이 1/4영역만 계산하면 된다. 무차원화 된 재료상수는

$\rho=1, c_1=1, c_2=1/\sqrt{3}$ 을 갖는다. 계산영역은 자유단에서의 반사파에 대한 영향을 받지 않기 위해 격자수를 Fig.5.(b)와 같이  $I_c=100, I_1=950, J_1=850$ 으로 하였다.

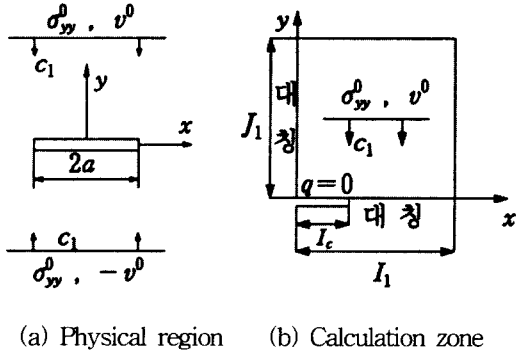


Fig. 5 The schematic of calculation zone

시간  $t=0$ 에서 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^0 = v^0 = 0.5, \quad u^0 = \sigma_{xy}^0 = 0, \\ \sigma_{xx}^0 = \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_{yy}^0 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서  $\nu = a/(1+a)$ 는 Poisson 비이다. Mode I 인 경우 균열선단에서의 응력분포는

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{이고 } \Theta_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (24)$$

이므로 Mode I 의 응력확대계수  $K_I$  은

$$K_I = -\sqrt{2\pi} \cdot r^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (25)$$

로 구해진다.

Fig.4로부터  $\partial\theta/\partial x, \partial\theta/\partial y$ 가 점 C, D, E에서 얻을 수 있고, 이로 인해  $K_I$ 이 계산되어질 수 있다.

Fig.6에서 탄성의 경우에 대한 응력확대계수가 해석적으로 구해진 응력확대계수와 매우 잘 일치함을 알수 있고, 응력확대계수 그래프의 급격히 변화하는 부분은 균열면을 따라가는 레일리파가 균열선단에 영향을 미침으로써 나타나는 현상이다. 또한 시간이 충분히 지난후 응력확대계수는 무차원화된  $K_I$  값이 '1'인 점에 수렴하게 되는데 이는 충격하중을 받는 구조부재가 시간이 충분히 지난후에는 정적인 응력확대계수에 접근함을 알수 있다. 이와 같이 계산되어진 동적응력확대계수  $K_I(t)$ 가 재료의 특성치인 동적파괴인성치  $K_{Ia}$ 에 도달하게 되면 균열의 전진이 시작된다. 그 이후 동적응력확대계수와 동적파괴인성치는 균열전진속도에 영향을 받게 된다.

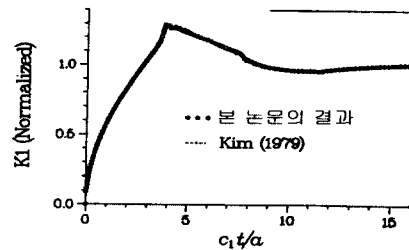


Fig.6 The comparison of Kim(9) and this thesis

#### 4.1.2 Bicharacteristic Method와의 비교계산

Fig.5와 같은 조건에서 step하중을 받는 구조부재에 대해 Bicharacteristic Method를 사용하여 KIM[2]에 의해 개발된 프로그램과 비교계산을 수행하였다.

재료상수는  $\rho=1, c_1=1, c_2=1/\sqrt{3}$ 을 갖고 시간  $t=0$ 에서 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy})^0 = v^0 = 1, \quad u^0 = (\sigma_{xy})^0 = 0, \\ (\sigma_{xx})^0 = \frac{\nu}{(1-\nu)} (\sigma_{yy})^0 \end{aligned} \quad (26)$$

Fig.7,8의 등곡선은 von Mises 등곡선이고 이 등



곡선들의 각각의 값은 1.00, 1.05, 1.10, 1.20, 1.50이다. 두 방법으로 계산된 von Mises 등곡선이 잘 일치함을 알 수 있다.

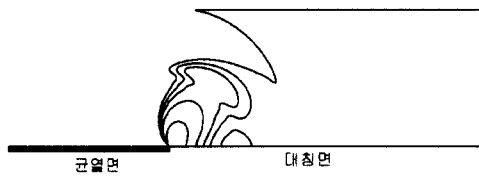


Fig. 7 Von Mises stress contour using zwas method



Fig. 8 Von Mises stress contour using bicharacteristic method

## 4.2 탄소성문제

### 4.2.1 탄성체와 탄소성체의 소성영역의 비교계산

모델의 형태는 Fig.5와 같은 조건을 사용하였고, 하중의 형태는 step하중을 받는 구조부재에 대해 계산을 수행하였다.

재료상수는

$$\rho = 1, c_1 = 1, c_2 = 1/\sqrt{3}, c_p = \sqrt{\mu_p/\rho}, \chi_0 = 1$$

이며 소성영역에서 선형적으로 가공경화되는 재료를 선택하고, 여기서  $\chi_0$  는 항복응력을 나타낸다. 시간  $t=0$ 에서 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy})^0 &= v^0 = 0.9, \quad u^0 = (\sigma_{xy})^0 = 0, \\ (\sigma_{xx})^0 &= \frac{\nu}{(1-\nu)} (\sigma_{yy})^0 \end{aligned} \quad (27)$$

$h=0$  을 갖는 탄성체는 이로부터  $c_2 = c_p$  가 된다.

위 결과로부터 탄소성체의 소성영역이 탄성체의 소성영역보다 균열선단으로부터 가로축을 기준으로 퍼져나가는 각도가 탄성체보다 작은 각도로 퍼져나감을 알 수 있고 소성영역의 말단부가 커지는 현상은 전단파와 von Schmidt파가 서로 보강간섭으로 일어져 일어나는 것으로 사료된다.

### - 탄성체의 소성영역형상의 변화 (300 time step)

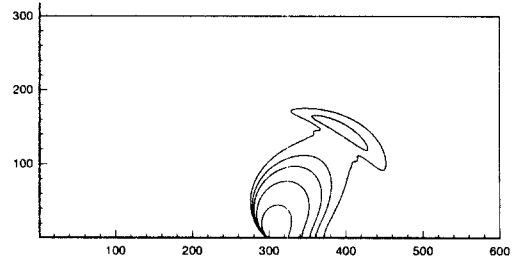


Fig.9 Von Mises stress contour for the elastic material

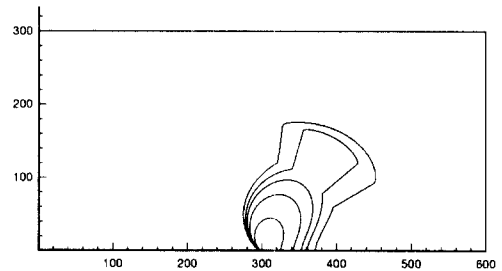


Fig. 10 The maximum von Mises stress contour in elastic material

### - 탄소성체의 소성영역 형상의 변화 (300 time step)

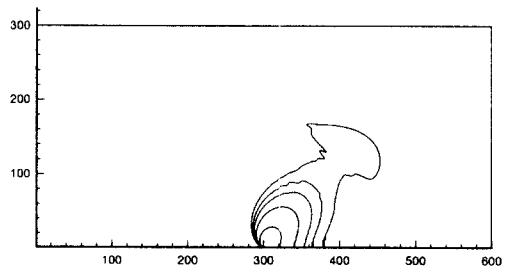


Fig.11 Von Mises stress contour for the elastic-plastic material

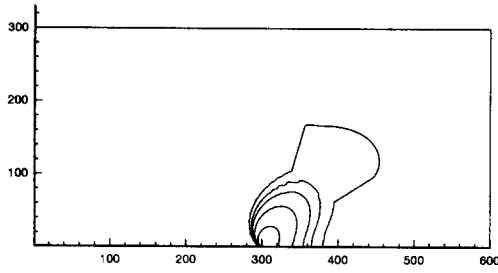


Fig.12 The maximum von Mises stress contour in elastic-plastic material

4.2.2 탄소성체의 Rayleigh파 파급

모델의 형태는 Fig.5와 같은 조건을 사용하였고, 하중의 형태는 step하중을 받는 구조부재에 대해 계산을 수행하였다.

재료상수는

$$\rho = 1, c_1 = 1, c_2 = 1/\sqrt{3}, c_p = \sqrt{\mu_p/\rho}, \chi_0 = 1$$

이며 소성 영역에서 선형적으로 가공경화되는 재료를 선택하고 시간 t=0에서 초기 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy})^0 = v^0 = 0.7, \quad u^0 = (\sigma_{xy})^0 = 0, \quad (28) \\ (\sigma_{xx})^0 = \frac{\nu}{(1-\nu)} (\sigma_{yy})^0 \end{aligned}$$

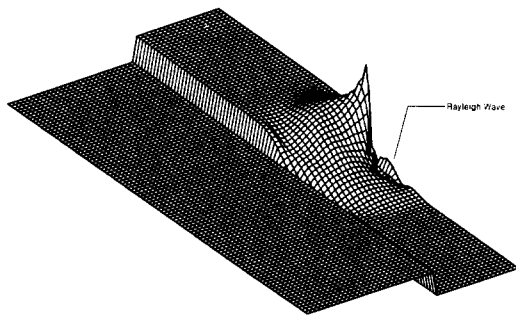


Fig.13 The propagation of Rayleigh wave(20 time step)

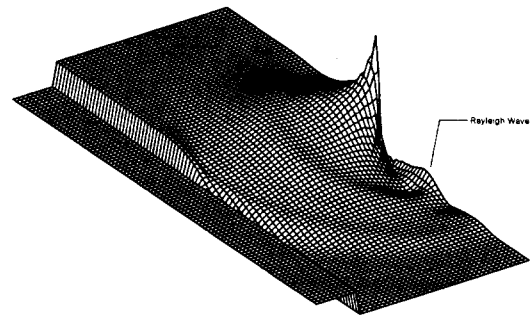


Fig.14 The propagation of Rayleigh wave(40 time step)

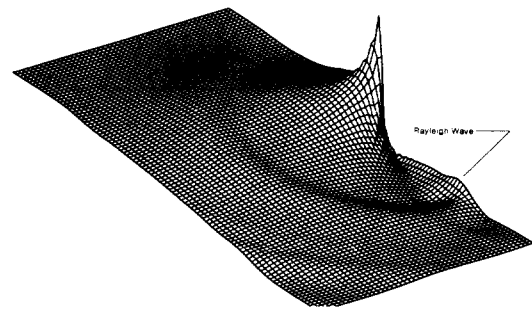


Fig.15 The propagation of Rayleigh wave(60 time step)

5. 결론

본 논문에서는 충격하중으로 인해 발생된 응력파가 퍼져 균열선단에서 응력집중을 일으킴을 보여주었고 이러한 응력분포가 항복응력을 넘어서 탄소성거동하는 구조부재에 대한 해석을 수행하였다. 이를위해 탄소성체의 구조거동을 표현하기 위한 지배방정식으로는 운동방정식과 탄소성 응력-변형을 관계를 나타내는 구성방정식이 사용되었으며 2차원 쌍곡선형 편미분방정식을 풀기 위해 Zwas방법이 도입되었다.

이러한 결과로부터 충격하중을 받는 탄성체와

탄소성체에 대한 해석을 비교하여 새로운 결과를 얻을 수 있고 실제 구조부재에 대한 해석에 적용될 수 있을것으로 사료된다.

탄소성파괴해석을 통해 다음과 같은 결론을 얻어낼 수 있었다.

1. 동적하중으로 인한 구조부재의 거동은 충분한 시간이 지나면 정적인 거동에 접근하여 간다.

2. 탄소성체의 소성영역이 탄성체에서 응력값이 항복응력이상이나 응력값이 탄성영역의 응력-변형률 곡선의 기울기를 갖음으로 인해 형성되는 영역보다 균열선단으로부터 가로축을 기준으로 퍼져나가는 각도가 탄성체보다 작은 각도로 퍼져나가고 소성영역의 말단부가 커지는 현상은 전단파와 von Schmidt파가 서로 보강간섭으로 일으켜 일어나는 것으로 사료된다.

3. 탄소성 구조부재의 거동에서도 Rayleigh파가 균열면을 따라 전파되는 것이 시뮬레이션되었고 이는 균열선단의 응력확대계수의 시간에 따른 거동에 영향을 미칠 것으로 사료된다.

#### 후 기

본연구는 '97년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

#### 참 고 문 헌

- [1] Chen, Y.M. and Wilkins, M.L., "Numerical analysis of dynamic crack problems.", In Shih, G.C.(ed.) *Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic Crack Problems*, Leyden Noordhoff International Publishing, pp. 295-345, 1977.
- [2] Kim, K. S., "Spannungswellen an Grenzflächen in linearistischen Scheiben.", VDI Verlag, Reihe 18, Nr. 91. 1991
- [3] 김경수, "물질경계면을 갖는 판에서의 응력파에 관한 수치해석", 대한조선학회지 제32권 4호, 1995
- [4] Eilon, B. Gottlieb, D. and Zwas, G., "Numerical stabilizers and computing time for second-order accurate schemes.", *J. Computational Phys.* 9, 387-397, 1972.
- [5] Hill, R., "The mathematical theory of plasticity", Oxford Clarendon Press 1950.
- [6] X. Lin and Ballmann, J., "A Riemann solver and a second-order Godunov's method for elastic-plastic wave propagation in solids.", *Int. J. Impact Engineering*, 463-478, 1993.
- [7] N. Jones, C. A. Brebbia and A. J. Watson, "Structures Under Shock and Impact IV", 1996, 479-488.
- [8] Godunov, S. K., "A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics.", *Mat. Sbornik* 47, 271-306, 1959.
- [9] Kim, K. S., "Dynamic Propagation of a finite crack.", *Int. J. Solids Structures* 15, 685-699, 1979.