

환경효과를 고려한 수명검사의 최적계획¹⁾

박 희 창²⁾

요 약

시스템에 영향을 미치는 총체적인 열악한 환경의 영향을 포함시키는 환경효과를 고려한 수명검사의 모형을 개발하였다. 환경효과를 나타내는 분포를 감마분포로 가정하고, 검사에 투입되는 시스템의 수명이 지수분포를 따르는 수명검사모형의 특성을 조사하고, 최적표본할당비율을 결정하는 방법을 제안하는 동시에 자료분석과정을 통하여 최적 검사계획문제를 토의하였다.

1. 서 론

우리 나라와 같은 수출주도형 국가는 생산한 제품을 다양한 환경을 가지고 있는 세계 각국으로 수출하여야 한다. 종래에는 우리 나라의 수출주력상품이 의류나 신발류 등과 같은 환경에 매우 둔감한 제품들이었으므로 수출대상국가가 어떤 환경을 가지고 있는가에 대한 문제는 심각하게 고려해야 할 이유가 없었다. 반면에 오늘날 그리고 향후 우리나라가 수출하게 될 주력 제품은 소위 최첨단의 각종 통신기기와 전자제품 등과 같은 것으로 이들은 실제 운용되어지는 지역의 환경에 대단히 예민한 제품이 될 것이다. 여기서 환경은 단순히 온도와 습도와 같은 관측가능한 특성뿐만 아니라 그 지역 주민의 정서적인 면이나 교육정도 등과 같은 측정되지 않은 특성들을 포함하여야 할 것이다. 따라서 이러한 제품에 대한 사후관리(after service) 즉, 부품의 수급관리와 보증기간 등 제품의 신뢰도에 관한 연구는 특정한 실험실에서 한 두 가지의 제어가능한 요인만을 고려한 단순한 모형을 고려해서는 수행될 수 없고, 관측가능한 요인과 관측불가능한 요인까지도 고려하는 보다 다양한 요인을 포함하는 모형의 개발이 요구된다.

이러한 모형의 개발을 위해 본 논문에서는 기존의 부분적 가속수명검사(partially accelerated life testing; PALT)에서 사용되어 온 모형을 변형하여 환경효과를 포함한 수명검사의 모형을 개발하고자 한다. PALT에 관한 연구로는 DeGroot와 Goel(1979)이 수명분포를 지수분포로 가정하여 PALT를 베이즈적(Bayesian)인 입장에서 접근하여 관심의 대상이 되는 모수의 추정과 최적계획에 관한 결과를 발표하였다. Bai와 Chung(1992)은 수명분포를 지수분포로 가정하여 중도 절단된 자료가 있는 경우에 대하여 정상조건에서의 고장률과 상수로 고려한 가속인자(accelerated factor)에 대한 최우추정량을 구하고 최적 실험계획을 얻는 과정을 제안하였다. 또한 Bai 등(1993)은 수명분포가 대수정규분포인 시스템을 PALT에 투입할 경우에 최적 실험계획을 얻는 과정을 제안하였다. 박희창(1995), 그리고 박희창과 이석훈(1995, 1996)은 직렬형 시스템과 병렬형 시스템 각각에 대해 PALT의 최적 계획에 관한 결과를 발표하였다. 이들 모두가 시스템에 크게 영향을 미친다고 생각되는 하나의 조건 즉, 가속인자만을 고려하여 제품의 사용환경을 나타내는 것에 주목하여 본 연구

1) 이 연구는 1996년도 한국과학재단 해외 Post-doc. 연수지원에 의해 수행되었음.

2) (641-773) 경남 창원시 사림동 9, 창원대학교 통계학과 부교수.

에서는 시스템에 영향을 미치는 총체적인 열악한 환경의 영향을 포함시키는 소위 frailty 모형에 대한 개념을 PALT 모형에 결합하고자 한다. frailty 모형은 Vaupel 등(1979)에 의해 처음으로 소개되었는데, 그들은 일변량 생존모형에서 개인의 이질성(heterogeneity)을 설명하기 위해 frailty 모형을 도입하였다. 이후로 여러 분야에서 많은 학자들에 의해 연구되었으며, 신뢰성 이론 분야에서는 Lee와 Klein(1986, 1988, 1989), Lindley와 Singpurwalla(1986), Nayak(1987), Bandyopadhyay와 Basu(1990), Gupta와 Gupta(1990), Whitmore와 Lee(1991), 이석훈 등(1996)이 고찰한 바 있다.

본 논문에서는 감마분포를 환경효과를 나타내는 분포로 가정하여 환경효과를 고려한 수명검사의 모형을 개발하고자 한다. 2절에서는 이 논문에서 사용되는 기호와 기본가정, 검사과정, 그리고 모형의 특성을 기술하고, 3절에서는 자료분석과정을 통하여 최적 검사계획문제를 토의하며, 4절에서는 모의실험에 의해 얻어진 자료를 토대로 개발된 모형의 여러 가지 양상을 고찰하고자 한다.

2. 수명검사모형

2.1 기호의 정의

환경효과를 고려한 수명검사의 최적 계획과 관측과정은 다음과 같은 기호로 표현된다.

n : 검사에 투입되는 시스템의 총수

n_u : 실험실조건에서 고장난 시스템의 수

n_{uc} : 실험실조건에서 고장나지 않은 시스템의 수

n_a : 환경조건에서 고장난 시스템의 수

n_{ac} : 환경조건에서 고장나지 않은 시스템의 수

τ : 최종 검사시간

t_{uj} : 실험실조건에서 고장난 시스템 중 j 번째 시스템의 수명 ($j = 1, 2, \dots, n_u$)

t_{am} : 환경조건에서 고장난 시스템 중 m 번째 시스템의 수명 ($m = 1, 2, \dots, n_a$)

ϕ : 환경조건에서 검사에 투입되는 표본할당비율

$\bar{\phi}$: 실험실조건에서 검사에 투입되는 표본할당비율($1 - \phi$)

λ : 실험실조건에서의 고장률

k, α : 감마분포의 모수

2.2 기본 가정

환경효과를 고려한 수명검사의 모형을 개발하기 위해 다음과 같이 가정한다.

[가정 1] 검사에 투입되는 각 시스템의 수명은 독립적이다.

[가정 2] 실험실조건에서 검사에 투입되는 시스템의 수명은 고장률이 λ 인 지수분포를 따른다.

$$f(t) = \lambda \exp[-\lambda t] \quad (2.1)$$

[가정 3] 환경조건하에서 검사에 투입되는 시스템의 수명은 고장률이 λ 인 지수분포를 따른다.

[가정 4] 환경조건에서 환경효과는 감마분포 $\Gamma(k/\alpha, \alpha)$ 를 따른다.

$$f(z) = \frac{z^{k/\alpha - 1} e^{-z/\alpha}}{\Gamma(k/\alpha) \alpha^{k/\alpha}} \quad (2.2)$$

2.3 검사 과정

[1] 검사에 투입되는 시스템 중에서 $n\bar{\phi}$ 개의 시스템은 실험실에서 검사하고, 나머지 $n\phi$ 개의 시스템은 환경조건에서 검사한다.

[2] 각 검사에 투입된 시스템은 최종검사시점인 t 까지 작동하도록 하여 각 조건에서 고장난 시스템의 수와 고장날 때까지의 시간, 그리고 고장나지 않은 시스템의 수를 관찰치로 받아들인다. 여기서 고장날 때까지의 시간 t 뿐만 아니라 고장난 시스템의 수를 나타내는 n_u 와 n_a , 그리고 고장나지 않은 시스템의 수인 n_{uc} 와 n_{ac} 도 확률변수가 된다.

2.4 모형의 성질

일반적으로 수명자료분석에 있어서 수명(더욱 일반적으로 말하면 어떤 특정 사건이 발생할 때까지의 시간)에 대한 변이성(variability)은 다음의 두 가지로 설명할 수 있다. 그중 하나는 단순히 임의적인 것으로서 이는 위험함수(hazard function)에 의해 설명된다. 다른 하나는 확률효과(random effects)에 의해 설명되어진다. 이때 시간 변수에 대한 확률효과를 고려하는 모형이 frailty 모형이다. 여기서 확률효과를 나타내는 확률변수가 frailty이다. frailty는 고려하는 모형이 일변량인 경우에는 하나의 변수에 영향을 미치고, 다변량인 경우에는 여러 개의 변수에 공통적으로 영향을 미치게 된다. 시스템의 수명을 고려하는 일변량 모형인 경우 frailty는 시스템 수명의 이질성(heterogeneity) 즉, 관측불가능한 환경효과를 나타낸다. 이러한 frailty는 시스템 수명의 기저값(baseline value)을 공통적으로 감소시키거나 증가시킬 수 있다.

이 논문에서는 기저 수명분포를 지수분포로 가정하였으므로 실험실조건에서 검사에 투입되는 시스템의 수명은 다음과 같이 얻어진다.

$$S_i(t) = \exp[-\lambda t] \quad (2.3)$$

따라서 기저 누적위험함수(baseline cumulative hazard function)는 다음과 같다.

$$H_i(t) = \lambda t \quad (2.4)$$

frailty 모형은 시스템의 수명이 다음의 식(2.5)를 만족하도록 frailty Z 가 누적 위험함수에 작용한다는 가정에 근거하고 있다.

$$P[T > t | Z = z] = \exp[-z\lambda t] \quad (2.5)$$

한 집단내에서 인위적인 충격 이외에 시스템의 수명에 영향을 미치는 모든 요인에 대해 환경효과를 고려한 조건하에서 검사에 투입되는 시스템의 수명분포는 자료를 수집할 때 환경효과를 나타내는 Z 의 값들은 관측이 불가능하므로 Z 에 대해 기대값을 취함으로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} S_e(t) &= E_Z[\exp(-Z\lambda t)] \\ &= LP_Z[\lambda t] \end{aligned} \quad (2.6)$$

여기서 LP_Z 는 환경효과를 나타내는 Z 의 Laplace 변환이다.

환경효과 Z 는 감마분포를 따르는 것으로 가정하였는데, 감마분포는 선행연구자들에 의해 많이 사용되어 왔으며 수학적 편의성 때문에 이를 고려하였다. 그 외에도 환경효과를 나타내는 분포로는 positive stable 분포군이나 역가우스분포(inverse Gaussian distribution) 등이 많이 이용되고 있다. 이러한 가정으로부터 식(2.6)은 다음과 같이 얻어진다.

$$S_e(t) = [1 + \lambda \alpha t]^{-k/\alpha} \quad (2.7)$$

식(2.7)에서 α 가 0으로 수렴할 때 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_e(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [1 + \lambda \alpha t]^{-k/\alpha} \\ &= \exp[-k\lambda t] \end{aligned} \quad (2.8)$$

이 사실로부터 알 수 있는 바와 같이 위에서 가정한 감마분포의 평균이 k 이고, 분산이 αk 이므로 α 가 0으로 수렴할 때 이 분포의 분산은 0이 되어 평균값 k 로 퇴화되는 사실로부터 α 가 0으로 수렴하면 본 논문에서 개발된 모형이 기존의 PALT 모형과 일치됨을 알 수 있다.

3. 모수의 추정과 최적표본할당비율의 결정

이 절에서는 모형에 포함된 모수의 추정문제와 각 검사에 투입되는 표본의 최적비율을 결정하는 문제에 대해 고려하고자 한다. 먼저 검사과정으로부터 얻어지는 자료로부터 우도함수의 대수값을 구하면 다음과 같다.

$$\ln L = (n_u + n_a) \ln \lambda + n_a \ln k - \lambda T_u - \left(\frac{k}{\alpha} + 1\right) - \sum_{m=1}^{n_a} \ln(1 + \lambda \alpha t_{am}) - \frac{n_{ac} k}{\alpha} \ln(1 + \lambda \alpha \tau) \quad (3.1)$$

여기서 $T_u = \sum_{j=1}^{n_u} t_{uj} + n_{uc} \tau$ 이다. 식(3.1)의 각 모수에 대한 1차 편미분값인 score 통계량을 부

록에 제시하였는데, 각 모수의 최우추정량 $\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}$, 그리고 \hat{k} 는 식(A.1), 식(A.2), 그리고 식(A.3)을 0으로 놓고 수치해석적인 방법으로 얻을 수 있다.

다음으로는 최적 표본할당비율을 결정하는 문제에 관하여 논의하고자 한다. 표본할당을 위한 최적화 기준으로는 최우추정량 $\hat{\lambda}$ 의 점근분산, $\hat{\alpha}$ 의 점근분산, \hat{k} 의 점근분산, 그리고 이들 모수에 대한 일반화 점근분산 등이 고려된다. 이러한 분산은 정보행렬(information matrix)로부터 얻어지는데, 이를 구성하고 있는 원소는 각 모수의 2차 편도함수의 음의 기대값으로 부록에 제시하였다. 이로부터 λ 와 α 및 k 의 최우추정량에 대한 근사 분산, 공분산행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} AsVar(\hat{\lambda}) &= \frac{\lambda^2}{n \phi P_u} \\ AsVar(\hat{\alpha}) &= \alpha^2 \left[\frac{P_a}{n \phi (P_a P_1 - P_2^2)} + \frac{1}{n \phi P_u} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AsVar(\hat{k}) &= k^2 \left[\frac{P_a + P_1 - 2P_2}{n\phi(P_a P_1 - P_2^2)} + \frac{1}{n\phi P_u} \right] \\
 AsCov(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) &= \frac{\lambda\alpha}{n\phi P_u} \\
 AsCov(\hat{\lambda}, \hat{k}) &= -\frac{\lambda k}{n\phi P_u} \\
 \\
 AsCov(\hat{\alpha}, \hat{k}) &= -\alpha k \left[\frac{P_a - P_2}{n\phi(P_a P_1 - P_2^2)} + \frac{1}{n\phi P_u} \right] \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

또한 λ 와 α 및 k 의 최우추정량에 대한 일반화 점근분산은 다음과 같이 얻어진다.

$$GeAsVar(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{k}) = \frac{(\lambda\alpha k)^2}{n\phi(n\phi)^2 P_u (P_a P_1 - P_2^2)^2} \tag{3.3}$$

$AsVar(\hat{\alpha})$ 를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율 ϕ_a^* 를 구하기 위해 먼저 $AsVar(\hat{\alpha})$ 의 ϕ 에 대한 1, 2차 미분값인 V_a' 와 V_a'' 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 V_a' &= -A\phi^{-2} + B(1 - \phi)^{-2} \\
 V_a'' &= 2A\phi^{-3} + 2B(1 - \phi)^{-3} \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

여기서 $A = \alpha^2 P_a / \{n(P_a P_1 - P_2^2)\}$ 이고, $B = \alpha^2 / (nP_u)$ 이다. 식(3.4)에서 V_a'' 는 0보다 크므로 $AsVar(\hat{\alpha})$ 는 ϕ 의 볼록함수(convex function)이다. 또한 ϕ 가 0에 수렴할 때 V_a' 는 $-\infty$ 의 값을 가지고, ϕ 가 1에 수렴할 때에는 $+\infty$ 의 값을 갖는다. 따라서 $V_a' = 0$ 을 만족하는 해는 유일하며, 다음과 같이 얻어진다.

$$\phi_a^* = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \tag{3.5}$$

이와 유사한 방법으로 $AsVar(\hat{k})$ 를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율 ϕ_k^* 를 구하면 다음과 같다.

$$\phi_k^* = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C} + \sqrt{D}} \tag{3.6}$$

여기서 $C = k^2(P_a + P_1 - 2P_2) / \{n(P_a P_1 - P_2^2)\}$ 이고, $D = k^2 / (nP_u)$ 이다. $AsVar(\hat{\lambda})$ 를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율 ϕ_λ^* 는 0이다. 이는 모든 시스템을 실험실조건에서만 검사하는 것을 의미하므로 $AsVar(\hat{\lambda})$ 는 최적기준으로 적합하지 않다. $GeAsVar(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{k})$ 를 최소가 되게 하는

최적 표본할당비율 ϕ_g^* 는 2/3의 단순해를 갖는다.

4. 예 제

본 절에서는 $AsVar(\hat{\alpha})$ 와 $AsVar(\hat{k})$ 를 최소화하는 최적표본할당비율의 변화하는 양상을 고찰해 보고자 한다. 먼저 시스템의 고장률 $\lambda = 0.01$, 중도절단시간 $\tau = 10$, $\alpha = 1.0$, 그리고 $k = 3.0$ 으로 하여 P_u 와 P_a 의 변화에 따른 최적표본할당비율 ϕ_a^* 와 ϕ_k^* 의 변화하는 양상을 고찰해보자. <표 1>에서 보는 바와 같이 P_u 를 고정시킨 후 P_a 를 증가시키면 ϕ_a^* 와 ϕ_k^* 공히 감소하고, P_a 를 고정시킨 후 P_u 를 증가시키면 둘 다 증가하는 것을 알 수 있다. 이는 시스템이 환경 조건에서 고장날 확률이 커질수록 최적표본할당비율은 줄어들고, 실험실조건에서 고장날 확률이 커질수록 최적표본할당비율이 증가하는 것을 의미한다. 또한 ϕ_a^* 와 ϕ_k^* 를 비교해 볼 때 모든 경우에 대해 ϕ_a^* 값이 ϕ_k^* 값보다 큰 것으로 나타났다. 여기서 1)은 ϕ_a^* 이고, 2)는 ϕ_k^* 을 의미한다.

이제 τ 와 각 모수 λ , α , 그리고 k 의 변화에 따른 ϕ_a^* 와 ϕ_k^* 의 양상을 고찰해 보자. <그림 1>, <그림 2>, 그리고 <그림 4>에서 보는 바와 같이 τ , λ , k 의 값이 증가할수록 ϕ_a^* 와 ϕ_k^* 는 감소하는 것을 알 수 있다. 이와는 달리 α 값이 증가할수록 ϕ_a^* 는 감소하는 반면, ϕ_k^* 는 증가하는 경향이 있다는 것을 <그림 3>으로부터 알 수 있다.

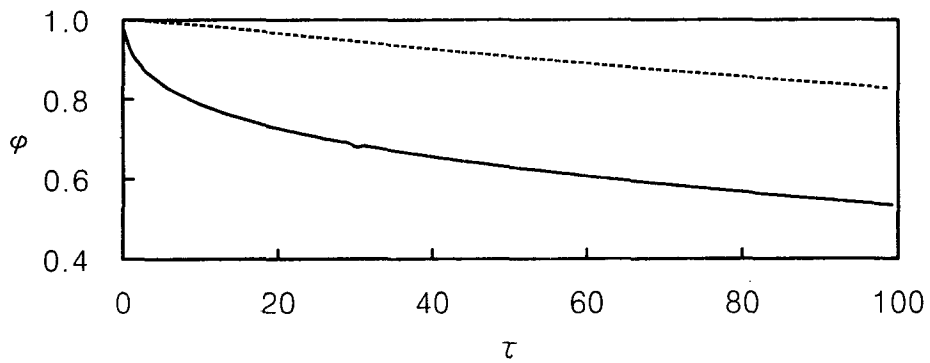
5. 참고문헌

- [1] 박희창(1995), 다수의 부품으로 구성된 직렬형 시스템의 부분적 고정충격 수명검사에 관한 최적계획, 「한국통계학회논문집」, 제 2권, 2호, 395-403.
- [2] 박희창, 이석훈(1996), 병렬형 시스템의 부분적 가속수명검사를 위한 최적계획, 「품질경영학회지」, 제24권, 4호, 14-28, 1996.
- [3] 박희창, 이석훈(1995), 부분적 단계충격 수명검사에 관한 직렬형 시스템의 최적 검사계획, 「응용통계연구」, 제 8권, 2호, 121-132.
- [4] 이석훈, 박희창, 강현희(1996), 환경효과를 이용한 가속수명검사, 「응용통계연구」, 제 9권, 제 2호, 119-134.
- [5] Bai, D.S. and Chung, S.W.(1992), Optimal Design of Partially Accelerated Life Tests for Exponential Distribution under Type I Censoring, *IEEE transactions on Reliability*, Vol 41, No.3, 400-406.
- [6] Bai, D.S. and Chung, S.W., and Chun, Y.R.(1993), Optimal Design of Partially Accelerated Life Tests for Lognormal Distribution under Type I Censoring, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol 40, 85-92.

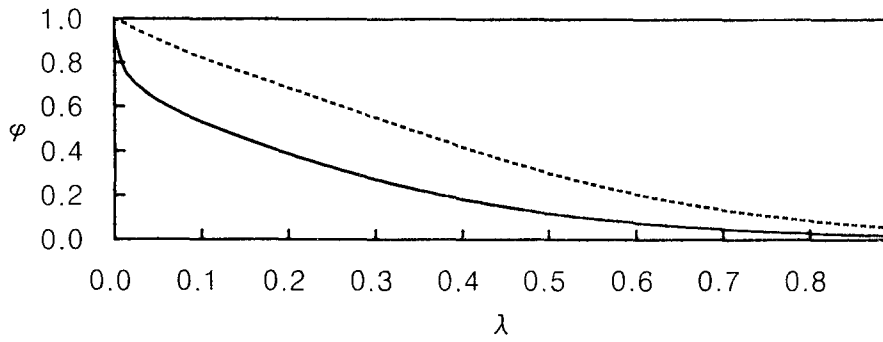
- [7] Bandyopadhyay, D. and Basu, A.P.(1990), On a generalization of a model by Lindley and Singpurwalla, *Annals of Applied Probability*, Vol. 22, 498-500.
- [8] DeGroot, M.H. and Goel, P.K.(1979), Bayesian Estimation and Optimal Designs partially Accelerated Life Testing, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 26, 223-235.
- [9] Gupta, P. L. and Gupta, R. D.(1990), A bivariate environmental stress model, *Advances in Associations in Applied Probability*, Vol. 22, 501-503.
- [10] Lee, S.(1986), Inference for a bivariate survival function induced through the environment, *Ph.D. Dissertation*, The Ohio State University.
- [11] Lee, S. and Klein, J. P.(1988), Bivariate models with a random environmental factor, *Indian Journal of Productivity, Reliability and Quality Control*, Vol. 13, 1-18.
- [12] Lee, S. and Klein, J. P.(1989), Statistical Methods for Combining Laboratory and Field Data Based On a Random Environmental Stress Model, *Recent Developments in Statistics and Their Applications*, Klein and Lee, Eds., 87-116.
- [13] Lindley, D. V. and Singpurwalla, N. A.(1986), Multivariate distributions for the reliability of a system of components sharing a common environment, *Journal of Applied Probability*, Vol. 23, 418-431.
- [14] Nayak, T. K.(1987), Multivariate Lomax distribution:properties and usefulness in reliability theory, *Journal of Applied Probability*, Vol. 24, 170-177.
- [15] Vaupel, J. W., Manton, K. G. and Stallard, E.(1979), The impact of heterogeneity in individual frailty and the dynamics of mortality, *Demography*, Vol. 16, 439-454.
- [16] Whitmore, G. A. and Lee, M. L. T.(1991), A multivariate survival distribution generated by an inverse Gaussian mixture of exponentials, *Technometrics*, Vol. 33, 39-50.

<표 1> 최적표본할당비율

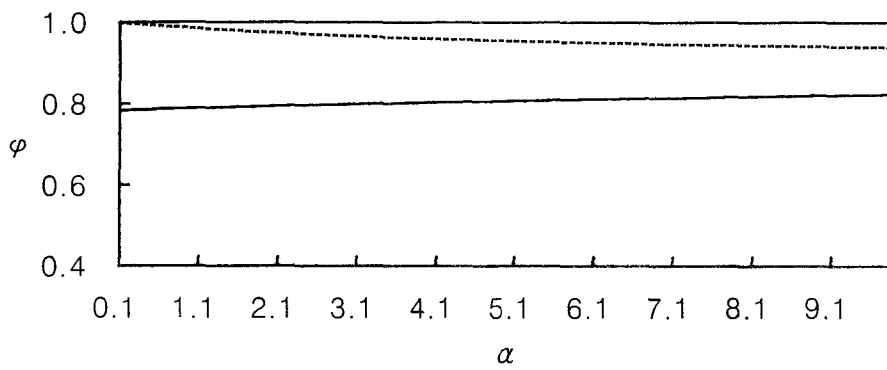
$P_u \backslash P_a$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
0.05	0.781 ¹⁾ 0.491 ²⁾	0.716	0.675	0.643	0.618	0.597	0.579	0.563	0.549
0.10		0.428	0.387	0.358	0.335	0.317	0.302	0.287	0.277
		0.781	0.746	0.718	0.696	0.677	0.663	0.646	0.632
		0.514	0.472	0.441	0.416	0.396	0.379	0.365	0.352
0.15		0.814	0.782	0.758	0.737	0.720	0.704	0.691	0.678
		0.564	0.523	0.491	0.466	0.446	0.428	0.413	0.399
0.20			0.806	0.783	0.764	0.748	0.733	0.720	0.709
			0.558	0.527	0.502	0.481	0.464	0.448	0.434
0.25			0.823	0.801	0.784	0.768	0.755	0.742	0.731
			0.586	0.555	0.530	0.509	0.491	0.476	0.462
0.30				0.815	0.799	0.784	0.771	0.759	0.749
				0.577	0.553	0.532	0.514	0.498	0.485
0.35				0.827	0.811	0.797	0.784	0.773	0.763
				0.596	0.572	0.551	0.533	0.518	0.504
0.40					0.821	0.807	0.795	0.785	0.775
					0.588	0.568	0.550	0.534	0.521
0.45					0.829	0.816	0.805	0.794	0.785
					0.602	0.582	0.564	0.549	0.535
0.50						0.824	0.813	0.803	0.794
						0.595	0.577	0.562	0.548



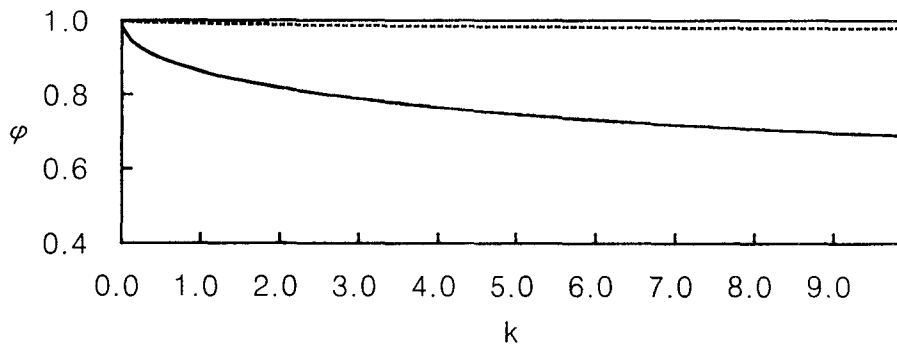
<그림 1> τ 값의 변화에 따른 최적 표본할당비율의 비교(---; ϕ_a , —; ϕ_k)



<그림 2> λ 값의 변화에 따른 최적 표본할당비율의 비교(---; ϕ_{α} , —; ϕ_k)



<그림 3> α 값의 변화에 따른 최적 표본할당비율의 비교(---; ϕ_{α} , —; ϕ_k)



<그림 4> k 값의 변화에 따른 최적 표본할당비율의 비교(---; ϕ_{α} , —; ϕ_k)

부 록

식(3.1)로부터 λ , α , 그리고 k 의 1차 편도함수인 score 통계량은 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n_u + n_a}{\lambda} - T_u - (\alpha + k) \sum_{m=1}^{n_a} \frac{t_{am}}{1 + \lambda \alpha t_{am}} - \frac{n_{ac} k \tau}{1 + \lambda \alpha \tau} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{k}{\alpha^2} \sum_{m=1}^{n_a} \ln(1 + \lambda \alpha t_{am}) - \lambda \left(\frac{k}{\alpha} + 1 \right) \sum_{m=1}^{n_a} \frac{t_{am}}{1 + \lambda \alpha t_{am}} + \frac{n_{ac} k}{\alpha^2} \ln(1 + \lambda \alpha \tau) - \frac{n_{ac} \lambda k \tau}{\alpha(1 + \lambda \alpha \tau)} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial k} = \frac{n_a}{k} - \sum_{m=1}^{n_a} \ln(1 + \lambda \alpha t_{am}) - \frac{n_{ac}}{\alpha} \ln(1 + \lambda \alpha \tau) \quad (\text{A.3})$$

이로부터 각 모수에 대한 2차 편도함수를 구한 후 정보행렬을 구하면 다음과 같다.

$$E \left[- \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} \right] = \frac{n \bar{\phi} P_u + n \phi P_1}{\lambda^2} \quad (\text{A.4})$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} \right] = \frac{n \phi (P_a + P_1 - 2P_2)}{\alpha^2} \quad (\text{A.5})$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 \ln L}{\partial k^2} \right] = \frac{n \phi P_a}{k^2} \quad (\text{A.6})$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \alpha} \right] = \frac{n \phi (P_1 - P_2)}{\lambda \alpha} \quad (\text{A.7})$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial k} \right] = \frac{n \phi P_2}{\lambda k} \quad (\text{A.8})$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial k} \right] = - \frac{n \phi (P_a - P_2)}{\alpha k} \quad (\text{A.9})$$

여기서

$$P_u = 1 - e^{-\lambda \tau}$$

$$P_a = 1 - (1 + \lambda \alpha \tau)^{-\frac{k}{\alpha}}$$

$$P_1 = \frac{k}{(2\alpha + k)(1 + \lambda \alpha \tau)^2} \{ (1 + \lambda \alpha \tau)^2 - (1 - P_a) \}$$

$$P_2 = \frac{k}{(\alpha + k)(1 + \lambda \alpha \tau)} \{ (1 + \lambda \alpha \tau) - (1 - P_a) \}$$

이다.