

웹에서 운영되는 그래프 모형을 위한 동적인 분석 시스템¹⁾

이 우 리²⁾, 최 현 집³⁾

요 약

그래프 대수선형모형은 계층적 대수선형모형의 부분집합이며 연관 그래프로 모형을 나타낼 수 있다. 또한 그래프 대수선형모형은 연관 그래프에서 엣지를 추가하거나 제거하는 것으로 분석을 수행할 수 있다. 본 연구에서는 그래프 대수선형모형이 가진 이러한 특징을 이용한 분석 시스템을 구현하였으며, 본 논문을 통해 이를 소개하고자 한다. 구현된 시스템은 분석자와 상호작용하며 분석결과를 시각적으로 평가할 수 있는 동적 연관 그래프를 제공하며, 단순한 마우스 조작에 의해 명령어 없이 자료입력만으로도 분석을 수행할 수 있도록 설계되었다. 또한 시스템은 자바 애플릿과 어플리케이션으로 구현되었기 때문에 월드 와이드 웹에서 운영할 수 있다.

1. 그래프 대수선형모형 (Graphical Log Linear Model)

연관 그래프 (association graph)에 의해 모형을 나타낼 수 있는 그래프 대수선형모형은 계층적 대수선형모형 (hierarchical log linear model)의 부분집합이다. 특히 그래프 대수선형모형은 조건부 독립에 의해 모형을 해석할 수 있고, 연관 그래프에서 직접 모형을 해석하고 식별 할 수 있다. 그래프 대수선형모형은 Darroch, Lauritzen과 Speed (1980)가 대수선형모형 분석에 연관 그래프의 적용을 제안한 이래 많은 연구가 이루어지고 있으며, Edward와 Kreiner (1983)는 그래프 대수선형모형을 이용한 분할표 분석과 모형선택에 관한 내용을 소개하였다. 연관 그래프를 이용한 최근의 연구결과들은 Christensen (1990), Whittaker (1990) 그리고 Edwards (1995) 등을 참고할 수 있다.

그래프 대수선형모형 분석에서 버텍스 (vertex)와 엣지 (edge)로 구성된 연관 그래프는 분석에 중요한 도구이다. 버텍스들은 대수선형모형의 변수 혹은 요인을 나타내며, 엣지는 모형에 포함된 일차 교호작용항을 나타낸다. 연관 그래프와 그래프 대수선형모형과의 관계를 위하여 삼차원 분할표를 위한 그래프 대수선형모형을 고려해보기로 한다. 세 범주형 변수 A , B 그리고 C 에 의한 $I \times J \times K$ 분할표의 포화모형 (saturated model)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\log m_{ijk} = u + u_{A(i)} + u_{B(j)} + u_{C(k)} + u_{AB(ij)} + u_{AC(ik)} + u_{BC(jk)} + u_{ABC(ijk)},$$

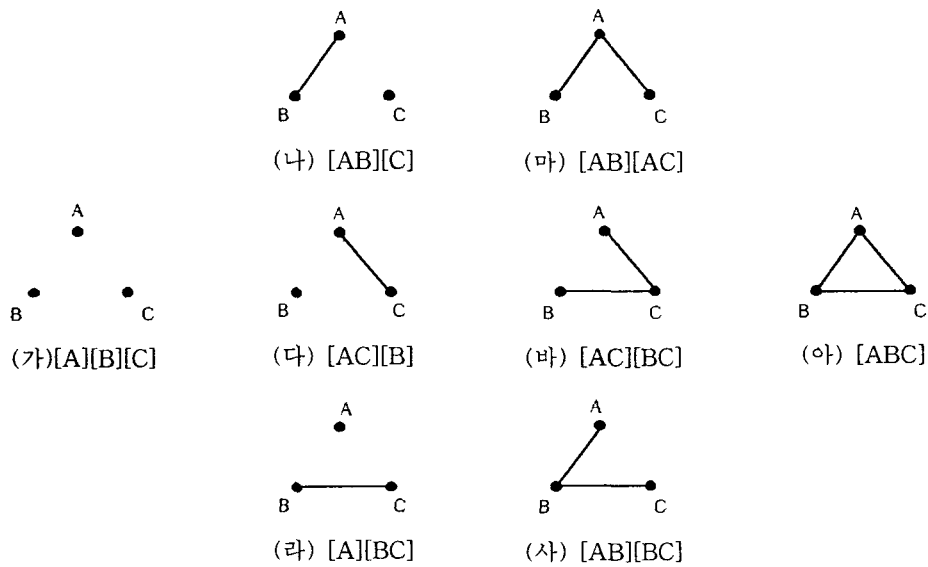
1) 이 논문은 1997년도 한국학술진흥재단 자유공모 연구비에 의해 연구되었으며, 본 논문에서 소개된 분석시스템은 <http://stat.kyonggi.ac.kr/GrModel>에서 이용할 수 있다.

2) (440-760) 경기도 수원시 경기대학교 경제학부 응용정보통계전공 교수

3) (440-760) 경기도 수원시 경기대학교 경제학부 응용정보통계전공 전임강사

여기서 $i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J, k = 1, 2, \dots, K$ 이며, m_{ijk} 는 기대 칸 도수 (expected cell count) 그리고 각 u 항은 교호작용항을 나타낸다. 이 모형에 대한 모형식은 최고차 교호작용항의 첨자를 이용하여 $[ABC]$ 와 같이 나타내기로 한다.

위와 같은 모형식에 의해 삼차원 분할표에 대한 모든 가능한 그래프 대수선형모형과 연관 그래프를 <그림 1>과 같이 정리할 수 있다.



<그림 1> 모든 가능한 삼차원 분할표의 그래프 모형

<그림 1>의 각 연관 그래프에 있는 세 점을 버텍스라고 하며, 이들은 모형에 포함된 변수 A, B, C 를 각각 나타낸다. 그리고 두 버텍스를 연결한 선은 엣지로 해당 모형에 두 변수간의 교호작용항이 포함되었음을 의미한다.

<그림 1>의 (가)에는 엣지가 하나도 포함되어 있지 않다. 따라서 이 모형은 세 변수간 교호작용항이 하나도 존재하지 않은 완전 독립성 모형 (complete independence model)으로 해석한다. 연관 그래프 (나), (다)와 (라)에는 하나의 엣지만이 존재한다. 이들 중에서, 예를 들어 연관 그래프 (나)에는 버텍스 A 와 B 의 엣지와 버텍스 C 가 서로 떨어져 있기 때문에 두 변수의 교호작용항이 존재하며 다른 한 변수와 서로 독립인 모형을 의미한다. 이들 모형에 한 개 엣지가 더 추가된 연관 그래프 (마), (바)와 (사) 중에서 (마)는 버텍스 B 에서 버텍스 C 에 닿기 위해서는 반드시 A 를 거쳐야 하기 때문에 A 가 주어진 B 와 C 의 조건부 독립성 모형 (conditional independence model)으로 해석한다. 마찬가지로 (바)와 (사)에 대해서도 연관 그래프로부터 직접 조건부 독립 관계를 해석할 수 있다.

마지막으로 (아)는 모든 일차 교호작용항이 포함된 모형에 대한 연관 그래프이다. 이때 그래프 모형은 모든 일차 교호작용항이 포함되면 반드시 그들에 의한 고차항이 포함되어야 한다는 의미에서 포화모형을 나타내며, 앞의 경우에 이차 교호작용항 u_{123} 가 포함되지 않은 모형인 부분연관

모형 (partial association model)은 그래프 모형에 속하지 않는다 (Chirstensen (1990), p. 103).

이와 같이 그래프 대수선형모형은 연관 그래프로 모형을 나타낼 수 있고, 연관 그래프로부터 직접 모형의 조건부 독립관계를 해석할 수 있다. 또한 그래프 대수선형모형은 정해진 어떤 한 연관 그래프에서 엣지를 추가하거나 제거하면 상이한 모형을 생성하고, 모형에 대한 해석이 달라진다는 것을 알 수 있다. 그러므로 주어진 분할표에 가장 잘 적합 하는 그래프 대수선형모형을 찾는 과정은 연관 그래프에서 엣지를 추가하거나 제거하는 과정으로 이해할 수 있으며, 분석자는 연관 그래프가 가지고 있는 엣지들을 관리하는 것으로 분석을 수행할 수 있다. 이때 대부분의 그래프 모형 분석 단계는 분석자에 따라 차이가 있을 수 있으나 일반적으로 다음과 같이 정리될 수 있다.

- i) 초기모형 설정과 모형에 대한 적합도 검정
- ii) 연관 그래프 작성과 모형의 해석
- iii) 작성된 연관 그래프에 포함된 엣지들의 유의성 파악을 위한 적합도 검정
- iv) 추가 혹은 제거 대상 엣지 결정
- v) iv)에서 결정된 엣지의 추가 혹은 제거가 이루어진 모형에 대한 적합도 검정

모형 분석은 마지막 v)번째의 단계 후에 다시 ii)로 되돌아가 주어진 분할표에 가장 잘 적합 하는 최적모형 (optimal model)이 결정될 때까지 ii)~v)를 반복하는 과정으로 이해할 수 있다. 따라서 만일 연관 그래프에서 직접 엣지를 추가·제거하고, 또한 추가·제거에 의한 분석결과를 연관 그래프 내에서 식별할 수 있다면 앞에서 정리한 분석 단계들은 실시간에 동적으로 수행될 수 있다.

본 연구에서는 그래프 대수선형모형이 갖는 이러한 특징을 이용하여 연관 그래프와 상호작용하며 분석을 수행할 수 있는 동적인 분석 시스템을 구현하였다. 구현된 시스템에서는 분석자의 요구에 따라 엣지의 추가와 제거에 따른 모든 분석결과를 실시간에 연관 그래프에 보여주는 동적 연관 그래프 (dynamic association graph)를 제공하며, 이에 는 다음과 같은 요소들이 고려되었다.

- 자유로운 버텍스 배치
- 연관 그래프와 상호작용을 통한 엣지의 추가·제거
- 연관 그래프 상의 엣지를 통해 모형식 식별
- 연관 그래프 상의 엣지를 통해 모형의 적합도 검정 결과 식별

시스템의 사용환경은 동적 연관 그래프를 통해 단순한 마우스 조작에 의해 명령어 없이 자료입력만으로도 분석을 수행할 수 있도록 설계되었다. 따라서 그래프 대수선형모형에 관한 전문적인 지식 없이 모형의 적합도 검정에 대한 통계지식, 모형과 연관 그래프와의 관계 그리고 연관 그래프에서 모형의 조건부 독립 관계를 해석할 수 있는 사용자이면 누구나 쉽게 이용할 수 있다. 또한 시스템은 자바 애플릿과 어플리케이션으로 구현되었기 때문에 월드 와이드 웹에서 운영할 수 있다. 단, JDK 1.1을 이용하여 개발하였으므로 JDK 1.1을 지원하는 웹 브라우저 (예 : HotJAVA, MSIE 4.0 그리고 Netscape 4.05 등)를 이용하여야 한다.

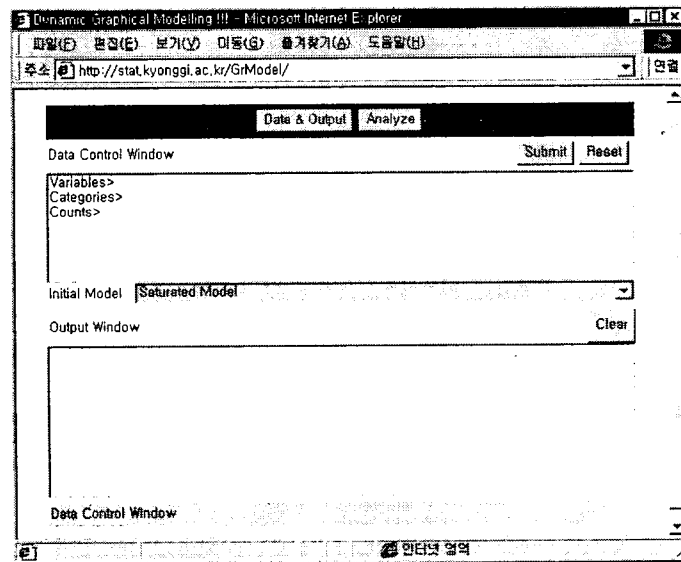
2절에서는 분석 시스템의 구조를 소개하고, 3절에서는 분석 시스템을 이용한 실제자료분석 예를 소개한다. 마지막 4절에서는 연관 그래프를 제공하는 분석 시스템들을 소개하고, 특징을 간략히 요약하였다.

2. 분석 시스템의 구조

시스템은 자료의 입력과 분석결과를 출력하는 창과 동적 연관 그래프를 제공하는 분석 창으로 구성되어 있다. 이 절에서는 이들 창들의 구성과 시스템의 운영방법, 그리고 동적 연관 그래프에서 제공하는 분석도구들을 소개한다.

2.1 자료입력과 분석결과 출력 창 (Data and Output Window)

시스템이 위치한 웹 사이트에 브라우저를 통해 접속하면 <그림 2>와 같은 시스템 환경을 접하게 된다. 이 창에서는 자료의 입력과 분석결과에 대한 출력결과를 얻을 수 있고, 또한 분석을 시작하기 위한 초기모형을 선택할 수 있다.



<그림 2> 자료입력과 분석결과 출력 창

(1) 자료의 입력

자료는 다음과 같은 세 가지 태그 (tag)을 통해 입력하게 된다.

- Variables>

분할표를 구성하는 범주형 변수 이름을 지정한다. 빈칸이 없이 연결된 문자이면 문자수에 제약을 받지 않는다.

- Categories>

앞에서 입력한 각 변수가 가지고 있는 범주 수를 입력한다.

- Counts>

분할표의 관찰 칸 도수 (observed cell count)를 입력한다. 칸 도수의 입력 예는 3절에서 볼

수 있다.

(2) 초기모형 설정 목록

분석하게 될 초기모형을 선정한다. 포화모형과 완전 독립성 모형 중에서 분석자의 분석의도에 따라 초기모형을 설정한다. 자료입력이 끝나면 시스템에서는 설정된 초기모형에 대한 적합도 검정을 수행하며 동적 연관 그래프를 제공하는 것으로 분석과정을 시작한다.

자료입력과 초기모형이 설정되면 화면 오른쪽 상단의 "Submit" 버튼을 클릭하는 것으로 시스템에 자료에 관한 사항을 인식시키며, 시스템은 입력된 내용에 따라 분석을 시작하게 된다.

(3) 분석결과 출력 창

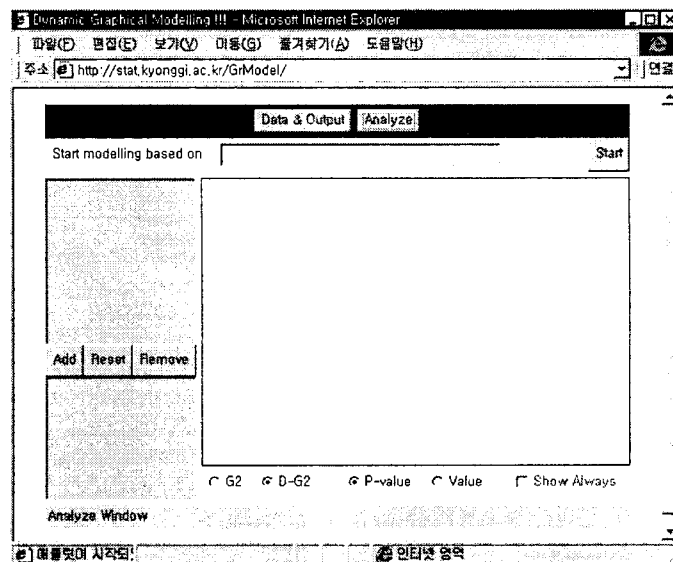
자료의 입력에 관한 사항 그리고 동적 연관 그래프를 통한 분석과정에서 얻은 분석결과를 출력한다. 출력결과는 모형분석을 위한 기초모형 (base model)에 대한 모형식과 검정결과 그리고 엣지의 추가나 제거에 따라 기초모형으로부터 생성될 수 있는 모든 모형에 대한 모형식과 검정결과들을 포함한다. 여기서 기초모형은 엣지의 추가나 제거가 이루어지게 될 현재 작성되어 있는 연관 그래프에 대한 모형을 말한다.

2.2 분석 창 (Analyze Window)

자료입력이 수행되면 <그림 3>과 같은 동적 연관 그래프가 통합된 분석 창을 통해 분석을 수행하게 된다. 분석의 시작은 화면 오른쪽 상단의 "Start" 버튼을 동작시키는 것으로 시작한다. 분석 창은 엣지 관리 상자, 동적 연관 그래프를 제공하는 판넬 그리고 작성된 연관 그래프에 대한 기초모형의 검정결과를 제공하는 상태 표시줄 (status line)로 구성된다.

(1) 엣지 관리 상자 (edge control box)

엣지 관리 상자의 두 개의 엣지 목록상자 (edge list box)와 목록을 관리할 세 개의 버튼을 통



<그림 3> 분석 창

해 모형에 포함된 혹은 포함 될 엷지를 관리한다. 위쪽 엷지 목록은 분석의 대상이 되는 모형에 속한 엷지들을 제시하며, 아래쪽에 위치한 "Remove" 버튼을 통해 선택한 엷지들을 제거할 수 있다. 이때 "Remove" 버튼을 동작시키는 것으로 해당 엷지들을 제거한 모형에 대한 분석이 수행되며, 실시간에 해당 모형에 대한 연관 그래프가 작성된다. 아래쪽에 위치한 목록상자에는 모형에 포함될 수 있는 엷지들이 나타나고 "Add" 버튼을 통해 모형에 엷지를 추가할 수 있다. 역시 버튼을 동작시키는 것으로 현재 모형에 엷지를 추가할 수 있고, 실시간에 엷지가 추가된 연관 그래프와 분석결과를 얻을 수 있다.

(2) 연관 그래프 판넬 (association graph panel)

동적 연관 그래프를 제공하는 영역과 엷지에 나타낼 통계량을 설정하는 선택상자를 가지고 있다. 동적 연관 그래프에는 다음과 같은 도구들이 포함되어 있다.

가) 벡터의 배치

분석자는 연관 그래프의 해석을 위해 필요에 따라 마우스 조작을 통해 자유롭게 벡터를 재배열할 수 있다. 이때 각 벡터는 입력된 변수 이름으로 나타내어지므로 해당 벡터를 쉽게 식별할 수 있다.

나) 모형의 식별

연관 그래프로부터 분석자는 단순히 마우스 포인터를 엷지에 위치시키는 것으로 현재 작성된 연관 그래프에 속해 있는 엷지를 제거한 후에 생성되는 모든 가능한 모형의 모형식을 식별할 수 있다. 마우스 포인터가 위치한 엷지가 제거된 뒤 생성되는 모형의 모형식은 연관 그래프가 작성되는 영역 상단에 나타난다.

다) 분석 결과 식별

연관 그래프에 속해 있는 엷지들의 제거를 통해 생성될 수 있는 모든 가능한 모형에 대한 검정 결과를 엷지를 통해 식별할 수 있다. 엷지에 나타낼 수 있는 통계량으로는 모형의 적합도 검정 통계량 G^2 혹은 그에 대한 p -값, 기초모형과 엷지 제거후의 모형에 대한 우도비 검정 통계량 혹은 그에 대한 p -값 등이며, 이들은 연관 그래프 아래에 위치한 선택 상자 (choice box)를 통해 선택할 수 있다. 기초모형과 엷지 제거후의 모형에 대한 우도비 검정 통계량의 p -값이 기본으로 설정되어 있다.

다) 엷지의 색상변화

분석을 시작하면 동적 연관 그래프는 각 엷지를 제거한 후 해당 엷지의 검정결과에 대한 p -값을 색상으로 반영한다. 즉, 엷지 제거후의 모형에 대한 p -값이 시스템에서 정한 유의수준 5%보다 적을 때에는 해당 엷지는 적색으로 나타난다.

(3) 상태 표시줄 (status line)

현재 작성된 연관 그래프의 모형에 대한 모형식과 적합도 검정통계량, 자유도 그리고 p -값을 출력한다. 따라서 분석자는 현재 고려되고 있는 기초모형에 대한 정보를 이곳에서 얻을 수 있다.

3. 동적 그래프 모형 분석 시스템을 이용한 분석 예

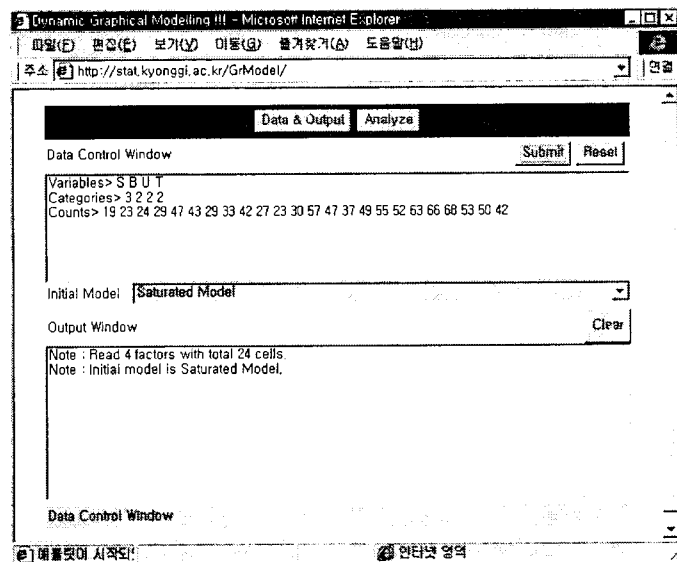
<표 1>은 Ries와 Smith (1963)에서 발췌한 세제 선호도 분석 자료로 네 개의 변수, 물의 부드러움 (water softness), 상표 선호도 (brand preference), 상표 M의 이전 사용 여부 (previous use of brand M) 그리고 물의 온도 (water temperature)에 의한 3×2^3 분할표이다. 네 변수는 각각 S, B, U 그리고 T로 나타내기로 한다.

<표 1> 세제 선호 자료

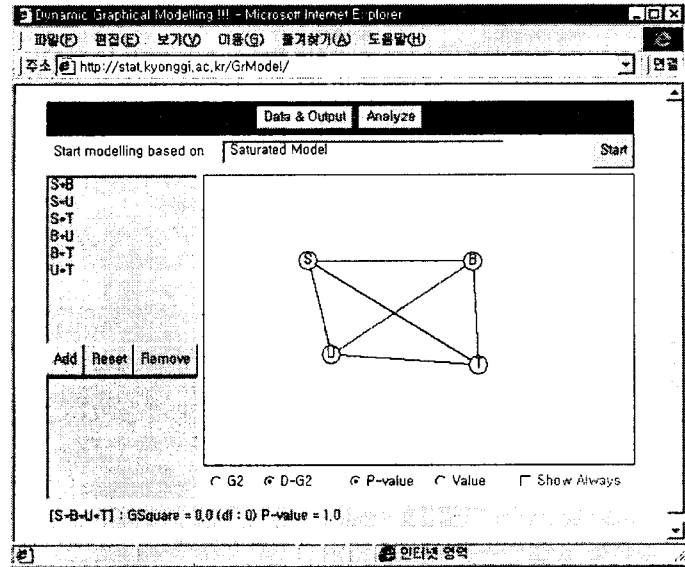
물의 온도 (T)	이전 사용여부 (U)	상표선호도 (B)	물의 부드러움 (S)		
			부드러움	중간	거침
높음	예	상표 X	19	23	24
		상표 M	29	47	43
	아니오	상표 X	29	33	42
		상표 M	27	23	30
낮음	예	상표 X	57	47	37
		상표 M	49	55	52
	아니오	상표 X	63	66	68
		상표 M	53	50	42

분석은 포화모형을 초기모형으로 엣지를 제거하는 방법을 택하기로 한다. <그림 4>는 분석을 위해 위 분할표 자료가 입력된 후 자료입력 창과 분석결과 출력 창을 보여주고 있다. 분석결과 출력 창에서 분할표에 관한 정보와 선택된 초기모형에 대한 정보를 볼 수 있다.

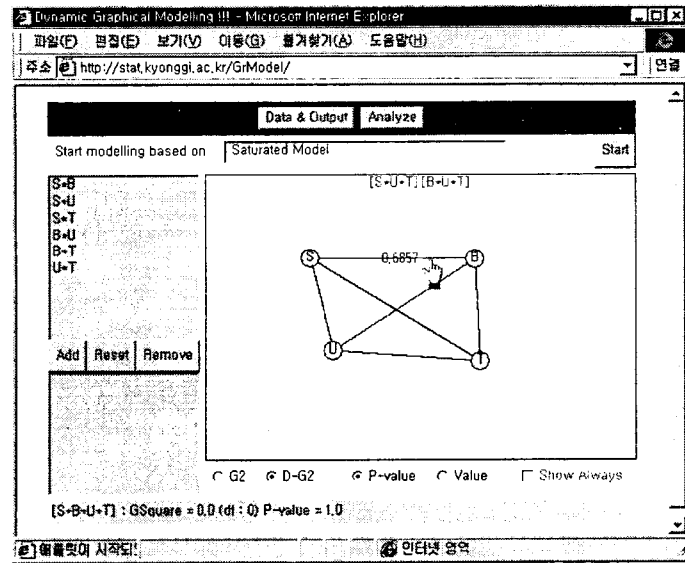
자료입력이 끝났으므로 분석 창으로 이동하여 "Start" 버튼을 누르면 분석이 수행되며, <그림 5>와 같은 포화모형에 대한 연관 그래프를 얻는다. 엣지 관리 상자의 위쪽 목록에 포화모형에서 고려될 수 있는 모든 가능한 엣지들의 목록을 얻을 수 있다. 또한 상태표시줄에서 현재 연관



<그림 4> 세제선호자료 입력 후 자료 입출력 창



<그림 5> 초기모형 분석이 완료된 분석 창

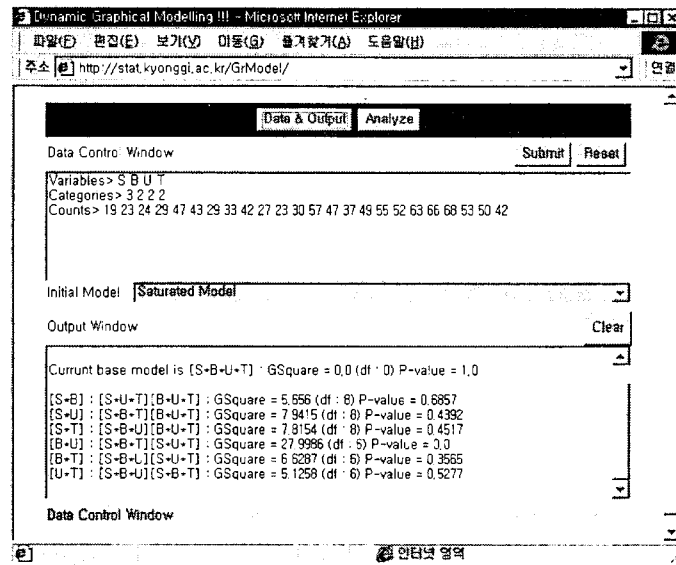


<그림 6> 엣지 [SB]에 의한 모형식과 검정결과의 식별

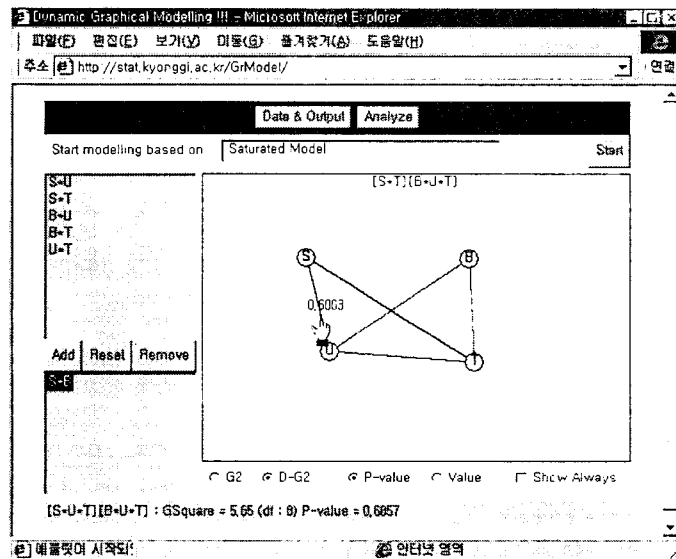
그래프가 작성된 기초모형인 포화모형에 대한 모형의 적합도 검정 결과를 찾을 수 있다.

이제 기초모형에 포함되어 있는 각 엣지들에 대한 정보를 마우스 포인터를 엣지 위에 위치하며 식별할 수 있다. <그림 6>은 엣지 $[S*B]$ 위에 마우스 포인터를 위치했을 경우에 시스템에서 제공하는 연간 그래프의 변화된 모습을 보여주고 있다. 엣지 $[S*B]$ 를 제거하며 모형 $[S*U*T][B*U*T]$ 이 된다는 것을 연관 그래프 상단에 나타난 모형식으로부터 식별할 수 있다

또한 옛지 위에 나타난 귀무가설 $H_0: [S*U*T][B*U*T]$ 과 대립가설 $H_1: [S*B*U*T]$ 에 대한 p -값을 통해 옛지 $[S*B]$ 의 제거 여부를 결정할 수 있다. 이 경우에는 p -값이 0.6857로 상당히 크게 얻어지므로 옛지 $[S*B]$ 는 모형에 포함되지 않아도 무방하다고 판단할 수 있다.



<그림 7> 초기모형에 분석에 대한 출력 결과



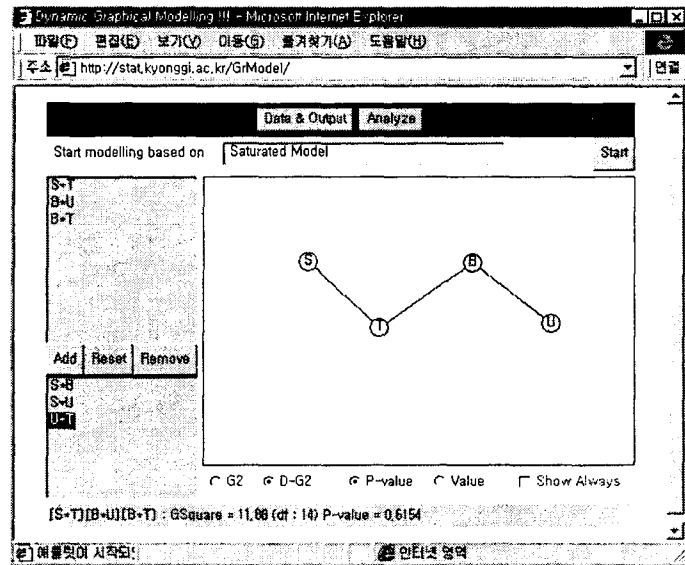
<그림 8> 옛지 [SB] 제거후의 연관 그래프

<그림 6>에서 적색으로 나타난 옛지 $[B*U]$ 은 시스템에서 판단기준으로 선택한 유의수준 0.05 보다 p -값이 작다는 것을 나타낸다. 따라서 옛지 $[B*U]$ 은 자료구조를 설명하는데 중요한

엣지임을 판단할 수 있다.

<그림 7>은 분석이 시작된 후에 포화모형에 포함된 가능한 모든 엣지를 제거한 후에 생성되는 모형들에 대한 검정결과를 출력한 분석결과 출력 창을 보여주고 있다. 이들 중에서 예를 들어

$$[S*B] : [S*U*T][B*U*T] : G\text{Square} = 5.656 \text{ (df : 8) } P\text{-value} = 0.6857$$



<그림 9> 최종모형으로 선택된 모형의 연관 그래프와 분석결과

은 포화모형에서 엣지 $[S*B]$ 를 제거하면 모형 $[S*U*T][B*U*T]$ 이 되고 이 모형에 대한 귀무가설 $H_0: [S*U*T][B*U*T]$ 과 대립가설 $H_1: [S*B*U*T]$ 에 대한 G^2 값 그리고 그에 대한 자유도와 p -값을 나타낸다. 이들 정보로부터 엣지 관리 상자에서 엣지 $[S*B]$ 를 선택하고 제거하면 <그림 8>과 같은 연관 그래프를 실시간에 얻을 수 있다. 상태 표시줄에서 엣지 $[S*B]$ 가 제거된 후의 모형 $[S*U*T][B*U*T]$ 이 적합도 검정 결과를 볼수 있다.

<그림 8>의 연관 그래프에서 같은 요령으로 엣지들을 제거해나가면 <그림 9>와 같은 연관 그래프를 얻을 수 있다. 이때 모든 엣지가 적색으로 나타났으므로 분석을 멈추고 모형 $[S*T][B*U][B*T]$ 을 최종모형으로 선택할 수 있다. 결국 이 분석 시스템을 이용하여 최적모형을 선택하는 과정은 연관 그래프 상의 엣지가 모두 적색으로 나타날 때까지 연관 그래프와 상호작용하며 엣지를 제거하는 과정이 된다. 특히 포화모형에서 이렇듯 엣지를 제거해나가는 과정은 Wemuth (1979)의 후진 제거 방법 (backward elimination method)와 같다.

4. 그래프 모형 분석 시스템들

현재 이용되고 있는 SAS, S-PLUS, SPSS, BMDP 그리고 GLIM 등의 통계 분석 시스템들에서는 대수선형모형을 위한 분석 절차나 함수들을 포함하고 있다. 그래프 대수선형모형은 대수선형모형에 속하기 때문에 이들 통계 소프트웨어들을 이용하여 분석할 수 있다. 그러나 이들은 대부분

대수선형모형 분석을 위해 설계되었으므로 연관 그래프를 작성하기 위한 절차나 함수는 제공하지 않고 있다. 연관 그래프를 결과로 제공하는 분석 시스템으로는 다음과 같은 연구 결과들을 이용할 수 있다.

- DIGRAM (<http://biostat.mcw.edu/~klein/software.html>)

Svend Kreiner에 의해 범주형 자료분석을 위해 DOS 플랫폼을 위해 개발된 분석시스템으로 Klein, Keiding과 Kreiner (1995)에서 시스템에 대한 일반적인 정보와 적용사례를 접할 수 있다. 이 시스템은 주어진 모형에 대한 연관그림을 포스트 스트립트 파일로 제공한다.

- CoCo (<http://www.math.auc.dk/~jhb/CoCo/cocoinfo.html>)

Jens Henrik Badsberg에 의해 UNIX 플랫폼에서 개발된 범주형 자료 분석 시스템으로 개발자 사이트에서 PASCAL과 C 언어로 작성된 원시코드 파일을 구할 수 있다. Xlisp과의 연계를 통해 연관그래프를 얻을 수 있으며, Badsberg (1995)에서 시스템에 관한 정보와 그래프 모형을 위한 분석시스템 환경에 대한 연구결과를 얻을 수 있다.

- MIM (<http://temper.stat.cmu.edu/graphmod/>)

Dave Edwards에 의해 DOS와 Windows 3.x 플랫폼에서 개발된 그래프 모형 분석 시스템으로 그의 저서 Edwards (1995)를 통해 시스템에 관한 일반사항과 그래프 모형에 관한 정보를 얻을 수 있다.

이들 시스템에 대한 자세한 특징과 운영방법 그리고 참고자료 등은 모두 개발자 웹 사이트에서 구할 수 있다.

참고문헌

- [1] Badsberg, J. H. (1995). An Environment for Graphical Models, unpublished Ph. D. thesis, Aalborg University, Denmark.
- [2] Christense, R. (1990). *Log Linear Models*, Springer-Velag.
- [3] Darroch, J. N., Lauritzen, S. L., and Speed, T. P. (1980). Markov fields and Log Linear Interaction Models for Contingency Tables, *Annals of Statistics*, Vol. 8, 522-539.
- [4] Edwards, D. (1995). Introduction to Graphical Modelling, Springer-Velag.
- [5] Edwards, D., and Kreiner, S. (1983). The Analysis of Contingency tables by Graphical Models, *Biometrika*, Vol. 70, 553-566.
- [6] Klein, J. P., Keiding, N., and Kreiner, S. (1995). Graphical Models for Panel Studies, Illustrated on Data from the Framingham Heart Study, *Statistics in Medicine*, Vol. 14, 1265-1290.
- [7] Ries, P. N., and Smith, H. (1963). The Use of Chi-square for Preference Testing in Multidimensional Problems, *Chemical Engineering Progress*, 59, 39, 43.
- [8] Wermuth, N. (1976). Model Search among Multiplicative Models, *Biometrics*, Vol. 32, 253-263.
- [9] Whittaker, J. (1990). *Graphical Models in Applied Multivariate Statistics*, Wiley.