

화상복원에서 변형된 OSL 알고리즘에 대한 연구

김 승 구¹⁾, 송 민 구²⁾, 염 준 근³⁾

요 약

EM 알고리즘은 통계적 화상복원에서 흔히 사용되는 방법이다. 특히 OSL 알고리즘은 다소 복잡한 형태의 페널티 함수가 주어지더라도 쉽게 반복 알고리즘을 유도할 수 있다는 장점을 갖는다. 그러나 이 알고리즘은 평활상수의 매우 제한된 영역에서만 수렴이 허용되어, 화상복원시 실험자의 경험의 폭을 상당히 제약하는 단점을 가지고 있다. 본 논문에서는 OSL 알고리즘을 변형하여, 수렴 허용영역이 확대된 평활상수를 갖는 알고리즘을 제시하고 그 수렴성질을 밝히며, 화상실험을 통해 제안된 알고리즘의 유용성을 밝힌다.

1. 서 론

통계적 화상복원은 N 개의 독립관측 화소(pixel)로 구성된 관측화상 $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ 를 사용하여 P 개의 화소를 갖는 진화상(true image) $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P)^T$ 를 추정하는 문제로 귀결된다. 그런데 이 문제의 특징적 제한점은, 첫째 $N \approx P$ 이며, 둘째 P 는 진화소의 추정치를 동시에 계산할 수 없을 정도로 매우 크다는 것이다.

첫 번째 제한으로 인해 추정화상의 분산은 일반적으로 매우 크다. 따라서 다소의 잡음이 포함된 관측화상에 대한 추정화상 즉 복원화상은 매우 불안정한 상태를 보이게 된다. 그러나 대수우도 방정식으로부터 해를 얻는 대신, 특별히 고안된 페널티를 도입한 페널티 대수우도(penalized log-likelihood) 방정식

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{L(\theta) - \lambda J(\theta)\} = 0 \quad (1.1)$$

을 만족하는 해 $\hat{\theta}$ 즉 최대페널티 대수우도 추정량(mple; maximum penalized log-likelihood estimator)를 구하므로써 첫 번째 문제점은 효과적으로 해결된다. 단, y 의 밀도함수 $g(y|\theta)$ 에 대해 대수우도 $L(\theta) = \ln g(y|\theta)$ 이고, $J(\theta)$ 는 일반적으로 화상의 경계를 보존하면서 잡음을 효과적으로 평활하도록 고안된 페널티 함수이며, 방정식 (1.1)에서 유일해가 얻어지도록 2차 미분 가능한 완전오목함수(strictly concave function)로 선택된다. 그리고 상수 $\lambda > 0$ 는 해상도와 잡음의 정도에 따른 복원상태를 고려하여 실험자가 경험적으로 결정하는 값이다. 이때, λ 값을 어느 정도로 결정하느냐에 따라 화상의 복원상태는 크게 달라지게 된다.

1) (220-702) 강원도 원주시 우산동 660번지 상지대학교 응용통계학과 조교수

2) (100-715) 서울시 중구 필동 3가 26번지 동국대학교 통계학과 강사

3) (100-715) 서울시 중구 필동 3가 26번지 동국대학교 통계학과 교수

두 번째 제한은 방정식 (1.1)로부터 해를 직접 계산할 수 없게 한다. 그 주된 이유는 해를 얻기 위해서는 $P \times P$ 의 크기를 갖는 역행렬 계산이 요구되기 때문이다. 이 문제점에 대한 대표적 해결 방법으로 Geman과 Geman(1984)의 깁스샘플링(Gibbs sampling)에 기초한 방법이나 Besag(1986)의 ICM(iterative coding method) 등을 사용할 수 있다. 그리고 Abdalla와 Kay(1990)의 ICM과 EM 알고리즘을 결합한 방법도 고려할 수 있을 것이다. 그러나 최근 알고리즘 유도 of 단순성이 보장되는 Green(1990a)의 OSL(one-step lated) 알고리즘이 가장 많이 이용되고 있다. OSL 알고리즘을 설명하기 전에 먼저 PEM(penalized EM) 알고리즘의 개념을 간략히 살펴보자.

EM 알고리즘은 관측화상 y 를 불완전자료로 그리고 관측불능화상 $x = \{ \{x_{ij}\}_{j=1}^{P_i} \}_{i=1}^N$ 을 완전자료로 다루게 된다. 이때, 서로 독립적으로 관측된 y_i 들은 P_i 개의 화소로 이루어진 완전자료 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iP_i})$ 와 $y_i = y_i(x_i) = y_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iP_i})$ 와 같은 함수 관계를 갖는다. 그리고 x 는 밀도함수 $f(x|\theta)$ 를 갖는다고 가정하고 평가함수 $Q(\theta|\theta^n) = E[\ln f(x|\theta)|y, \theta^n]$ 라 하자. 이때, PEM 알고리즘은 방정식 (1.1) 대신 n 번째 단계에서

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta)\} = 0 \quad (1.2)$$

을 만족하는 해 $\theta = \theta^{n+1}$ 을 반복적으로 구함으로써 식 (1.1)의 해에 수렴하게 한다. 그런데 화상 분석에서 자주 $\partial J(\theta)/\partial \theta$ 항이 θ 에 대해 전개되지 않으므로써 PEM 알고리즘의 사용을 불가능하게 하는데, 이를 극복하는 대안으로서 방정식 (1.2) 대신 직전 단계 추정치 θ^n 에 대해

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Q(\theta|\theta^n) - \lambda dJ(\theta^n) = 0 \quad (1.3)$$

를 사용하는 OSL 알고리즘을 고려할 수 있다. 단, $dJ(\theta^n) = [\partial J(\theta)/\partial \theta]_{\theta=\theta^n}$ 을 나타낸다. 이 알고리즘의 가장 큰 장점은 $\partial J(\theta)/\partial \theta$ 항의 직전 단계(one-step lated) 값을 사용함으로써, θ 에 대한 전개의 필요성을 배제한 것이라 할 수 있다. 한편 이 알고리즘이 수렴할 때는 PEM 알고리즘과 같은 정유점(停留點, stationary point)에 수렴한다. 그럼에도 불구하고 PEM 알고리즘이 λ 크기에 무관하게 수렴하는 반면, OSL 알고리즘은 수렴 λ 에 대한 아주 작은 범위 내에서만 수렴한다. 이 성질은 곧 분석자로 하여금 λ 를 다양한 값으로 조율하므로써 주어진 화상을 가장 잘 적합시키는 식 (1.1)의 페널티 대수우도를 찾는 추정작업을 제한한다. 예를들어서 화상자료가 $\lambda \geq 0.1$ 인 어떤 λ 에 대응한 확률모형으로부터 관측되었다 하자. 그런데 주어진 확률모형하에서 OSL 알고리즘이 $0 < \lambda < 0.1$ 에서만 수렴한다면, 최적해를 얻을 수 없게 된다. Green(1990b)도 토모그래피(tomography) 문제를 다루면서 이러한 문제점을 스스로 지적한 바 있지만 해결방안을 제시하지는 않았다. 특히 상대적으로 큰 λ 값이 요구되는 잡음이 큰 오염화상에 대한 복원문제에서는 OSL 알고리즘의 문제점은 두드러질 수 밖에 없다.

본 논문에서는 OSL 알고리즘의 장점을 해치지 않으면서 평활상수 λ 에 대해 수렴영역이 확대

된 알고리즘을 제시하고자 한다. 다음 절에서는 PEM 및 OSL 알고리즘의 그래디언트(gradient) 형태를 소개하고 MOSLG 알고리즘이라 명명한 알고리즘을 제안하며, 3 절에서는 MOSLG 알고리즘의 수렴성질을 밝히고 OSL 및 OSLG 알고리즘과 함께 수렴범위 등을 비교한다. 그리고 4 절에서는 화상실험을 통해 제안된 알고리즘의 유용성을 보이고자 한다.

한편, 본 논문에서 표기된 역행렬은 모두 존재함을 가정하며, 0은 스칼라나 행렬을 구분하지 않고 사용한다.

2. 변형된 OSL 그래디언트(MOSLG, modified OSL gradient) 알고리즘

본 논문에서 제안하고자 하는 MOSLG 알고리즘을 설명하기 위해서는 PEM 이나 OSL 알고리즘을 그래디언트 형태로 표현하여야 한다. 그리고 이 후부터 $L_\lambda(\theta) = L(\theta) - \lambda J(\theta)$, $Q_\lambda(\theta|\theta^n) = Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta)$ 라 표기하고 $d^j f(a|b) = [\partial^{i+j} f(x|y) / \partial x^i \partial y^j]_{x=a, y=b}$ 를 나타낸다.

먼저 식 (1.2)의 PEM 알고리즘은 Lange(1995)에 의해 그래디언트 형태로 표현하면

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{d^{20} Q_\lambda(\theta^n|\theta^n)\}^{-1} d^{10} Q_\lambda(\theta^n|\theta^n) \tag{2.1}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 그런데 이 알고리즘은 현실적으로 유용성을 갖기 어렵다. 왜냐하면, 항행렬(directional matrix)

$$d^{20} Q_\lambda(\theta^n|\theta^n) = d^{20} Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda d^2 J(\theta^n) \tag{2.2}$$

가 대각행렬이 아니기 때문이다. 이 것은 앞 절에서 피력하였던 두 번째 제한때문이다. 사실 화상 관련분야의 대부분의 문제에서 식 (2.2)의 우변의 $d^{20} Q(\theta^n|\theta^n)$ 성분은 대각행렬로 정의되는 반면 $d^2 J(\theta^n)$ 은 비대각행렬로 이루어진다.

한편 OSL 알고리즘의 그래디언트 형태를 김승구(1996)는 다음과 같이 나타내었다.

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{d^{20} Q(\theta^n|\theta^n)\}^{-1} d^{10} Q_\lambda(\theta^n|\theta^n) \tag{2.3}$$

우선 식 (2.1)과 (2.3)의 알고리즘을 각각 PEMG(PEM gradient) 및 OSLG(OSL gradient) 알고리즘이라 부르기로 하자. 식 (2.3)의 OSLG 알고리즘에서 주목할 것은 항행렬의 역행렬 성분에 비대각 성분인 $\lambda d^2 J(\theta^n)$ 가 빠져있어 식 (2.1)에서의 계산상의 문제점이 해결된다는 것이다. 또한 주목할 것은 PEM과 OSL의 수렴성질은 각각 PEMG와 OSLG의 그것과 정확히 같다는 사실이다. 다시말해서 식 (2.3)의 OSLG 알고리즘은 OSL 알고리즘과 마찬가지로 주어진 조건행렬이 최소한 비음정치를 만족시키는 λ 에 대해 페널티 대수우도의 단조증가성과 $\hat{\theta}$ 으로의 수렴을 보장한다(김승

구, 1996). 그러나 OSLG 알고리즘의 수렴범위가 현실적으로 지나치게 좁다는 것이다. 이것은 오염도가 높은 화상인 경우의 복원에는 비교적 큰 λ 값이 요구되나 수렴구간이 좁기 때문에 폭넓은 λ 값을 부여할 수 없으므로 양질의 복원화상을 구하지 못함을 의미한다.

이러한 문제를 해결하기 위해서 본 논문에서는 MOSLG 알고리즘을 제안한다. MOSLG 알고리즘을 소개하기 전에 먼저 비대각행렬인 페널티 함수의 2차 미분행렬을

$$d^2J(\theta) = d^2J_D(\theta) + d^2J_O(\theta) \quad (2.4)$$

과 같이 분해하자. 여기서 $d^2J_D(\theta)$ 는 대각행렬로서 비음정치행렬이며, $d^2J_O(\theta)$ 는 식 (2.4)에 대응하는 비대각행렬이며 대칭행렬이라 가정하자. 이때 만약 함수 J 가 완전오목함수로 주어지면 $d^2J(\theta)$ 은 양정치행렬이 되고, 식 (2.4)의 관계에 따라 $d^2J_O(\theta)$ 는 비음정치, 비양정치 혹은 부정치 행렬이 될 수 있다.

이때, MOSLG 알고리즘을

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{d^{20}Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda d^2J_D(\theta^n)\}^{-1} d^{10}Q_\lambda(\theta^n | \theta^n) \quad (2.5)$$

과 같이 정의한다. 이 알고리즘은 항행렬이 대각행렬이므로 OSLG 알고리즘과 마찬가지로 계산상의 문제를 초래하지 않음을 알 수 있다.

3. MOSLG 알고리즘의 수렴성질

식 (2.5)에서 $\hat{\theta}$ 은 MOSLG 알고리즘의 고정점(fixed point)이므로, $n \rightarrow \infty$ 에 따라 θ^n 이 $L_\lambda(\theta^n)$ 가 단조증가하는 방향으로 수렴한다면 $\theta^\infty = \hat{\theta}$ 를 만족하게 된다. 정리 1과 정리 2는 MOSLG 알고리즘의 페널티 대수우도 $L_\lambda(\theta^n)$ 에 대한 단조증가성과 $\theta^\infty = \hat{\theta}$ 에서의 수렴성을 보장하고 있다. 이 사실을 보이기 전에 먼저 불완전자료 y 에 대한 완전자료 x 의 조건부밀도를 $h(x|y, \theta^n)$ 하자. 여기서 $y = y(x)$ 이므로 결합밀도 $f_{x,y}(x, y|\theta) = f(x|\theta)$ 이고 결국 완전자료의 밀도는 $f(x|\theta) = g(y|\theta)h(x|y, \theta)$ 의 등식으로 나타낼 수 있다. 이 등식의 양변에 대수를 취하고 $-\lambda J(\theta)$ 를 더한 후 조건부 기대값을 취하면,

$$Q_\lambda(\theta | \theta^n) = L_\lambda(\theta) + H(\theta | \theta^n) \quad (3.1)$$

을 얻게 된다. 단, $H(\theta | \theta^n) = E[\ln h(x|y, \theta) | y, \theta^n]$ 이다. 그리고 $d^{20}H(\theta | \theta)$ 는 음정치, $d^2L(\theta)$ 은 비음정치 행렬이라 가정하면 다음 성질을 얻을 수 있다.

정리 1. MOSLG 알고리즘은

$$-r_n^T d^{20} H(\theta^n | \theta^n) r_n - \lambda r_n^T d^2 J_O(\theta^n) r_n > 0 \tag{3.2}$$

이 만족되는 모든 λ 에 대해 $L_\lambda(\theta^{n+1}) > L_\lambda(\theta^n)$ 을 만족한다. 단, $r^n = (\theta^{n+1} - \theta^n)$. □ (증명은 부록 참조.)

정리 1에서 MOSLG 알고리즘은 식 (3.2)와 같은 제약을 갖고 있지만, 만약 행렬 $d^2 J_O(\theta)$ 이 비음정치이면 부록의 관계식 (부.3)은 항상 만족되므로 이 제약식은 불필요하게 된다. 다시말해서 MOSLG 알고리즘은 $\lambda \in [0, \infty)$ 에 관계없이 페널티 대수우도에 대한 단조증가성을 만족한다.

다음은 MOSLG 알고리즘이 $\theta^\infty = \hat{\theta}$ 에 수렴함을 보이기 위해 먼저 수렴률을 구해보도록 하자. 우선 $\theta^{n+1} = M(\theta^n)$ 라 놓자. $M(\theta^n)$ 을 θ^n 에 대해 미분한 후 $\theta^{n+1} = \theta^n = \hat{\theta}$ 을 대입하고 $dL_\lambda(\hat{\theta}) = 0$ 임을 주목하면, 수렴률은 Lange(1995) 혹은 김승구(1996)와 유사한 방법으로

$$dM(\hat{\theta}) = (B + C + \lambda D_1)^{-1} (C - \lambda D_2) \tag{3.3}$$

과 같이 얻을 수 있다. 단, $d^2 J(\hat{\theta}) = d^2 J_D(\hat{\theta}) + d^2 J_O(\hat{\theta}) = D_1 + D_2 = D$, $-d^{20} H(\hat{\theta} | \hat{\theta}) = C$ 및 $-d^{20} Q(\hat{\theta} | \hat{\theta}) = B + C$ 을 나타낸다. 여기서 C 와 D 는 양정치, B 와 D_1 은 비음정치행렬이며 모두 대칭행렬이라 하자. 그런데 식 (3.3)의 우변은 대칭행렬의 곱이므로 이 행렬의 고유치 α 는 실수이다. 따라서 $dM(\hat{\theta})$ 의 양의 최대고유치는 MOSLG에 대한 $\hat{\theta}$ 로의 수렴여부를 결정한다.

정리 2. 행렬 $C - \lambda D_2$ 이 비음정치가 되는 모든 λ 에 대해

$$dM(\hat{\theta}) = (B + C + \lambda D_1)^{-1} (C - \lambda D_2)$$

의 최대고유치는 $0 \leq \alpha_{\max} < 1$ 을 만족한다. □ (증명은 부록 참조.)

정리 1과 정리 2를 통해, $Q_\lambda(\theta | \theta)$ 가 단봉함수(unimodal function)로 주어지면 MOSLG 알고리즘은 유일하게 $\hat{\theta}$ 에 수렴함을 보장하고 있다. 한편 OSLG 알고리즘을 $\theta^{n+1} = N(\theta^n)$ 라 표현할 때, 이들의 수렴률은

$$dN(\hat{\theta}) = (B + C)^{-1} (C - \lambda D) \tag{3.4}$$

이며, 행렬 $C - \lambda D$ 이 비음정치가 되는 λ 에 대해서 수렴한다(Green, 1990a).

정리 3. 영집합이 아닌 두 집합을 각각 $\lambda > 0$ 에 대해

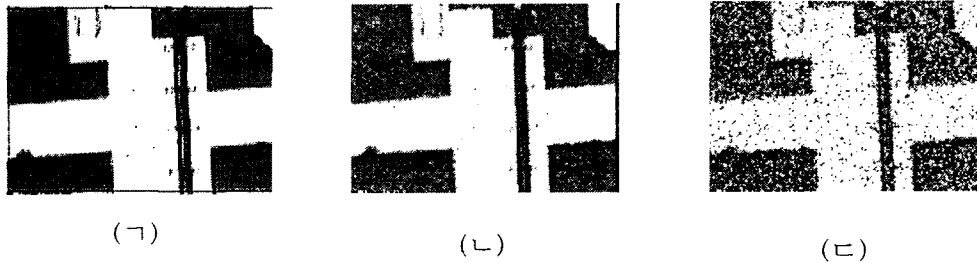
$$\Lambda_M = \{ \lambda \text{행렬 } C - \lambda D_2 \text{가 비음정치} \}, \Lambda_O = \{ \lambda \text{행렬 } C - \lambda D \text{가 비음정치} \}$$

과 같이 정의 할 때, $\Lambda_O \subset \Lambda_M$ 이 성립한다. □ (증명은 부록 참조.)

본 논문에서 λ 는 비음의 실수이므로 MOSLG와 OSLG 알고리즘의 수렴구간을 각각 $\Lambda_M = [0, \lambda_M]$ 및 $\Lambda_O = [0, \lambda_O]$ 과 같이 나타내면, 정리 3에 의해 $\lambda_O < \lambda_M$ 을 의미한다. 이것은 곧 보다 폭넓은 크기의 페널티를 부과하므로써, 주어진 자료에 합당한 페널티 대수우도(베이지안 입장에서는 합당한 사후밀도)를 추측하는 경험의 폭을 확장한다는 의미이다. 특히 정리 3은, 평활상수 λ 를 증가시키면서 여러번의 시행착오적 실험을 통해 최적의 화상을 결정하는, 화상복원에서 보다 중요한 의미를 갖게 된다.

4. MOSLG 알고리즘을 이용한 화상복원 실험

이 절에서는 화상실험을 통해 화상복원에서 OSLG(혹은 OSL) 알고리즘의 부적합성을 보이고, 상대적으로 MOSLG 알고리즘의 유용성을 보이게 한다. 본 실험의 주된 목적은 OSLG 알고리즘이 잡음에 대해 평활한계성을 갖는 반면, MOSLG 알고리즘은 이것을 극복하는 대안임을 보이는 것이다. 따라서 양질의 복원화상을 제공하려고 관측화상에 대해 사전처리 혹은 사후처리 과정이나 모서리-보존(edge-preserving) 등의 보완적 기능을 포함하지 않았다.



<그림 1> (ㄱ) 진화상, (ㄴ) Blur+잡음 : $\sigma^2 = 0.008$, (ㄷ) Blur+잡음 : $\sigma^2 = 0.05$

<그림 1>의 (ㄱ)은 85×80 크기의 진화상(true image) $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P)^T$ 로서 반도체 회로의 일부분을 찍은 사진이다. 이때 $P = 85 \times 80 = 6800$ 이다. 그리고 (ㄴ)과 (ㄷ)은 진화상을 psf(point spread funtion)

$$\eta = \begin{bmatrix} 0.0452 & 0.1222 & 0.0452 \\ 0.1222 & 0.3304 & 0.1222 \\ 0.0452 & 0.1222 & 0.0452 \end{bmatrix}$$

으로 브러링(blurring) 한 후, 평균이 0이고 각각 분산이 $\sigma^2 = 0.008$ 및 0.05 인 정규분포 잡음으로 오염시킨 화상이다. 두 오염화상 $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ 는 η 에 관한 선형시스템을 가정한다. 따라서 psf η 에 대응하는 크기 $N \times P$ 의 psf 행렬 $H = [h_{ij}]$ 에 대해, 독립적으로

$$y_i \sim N\left(\sum_{j \in B_i} h_{ij}\theta_j, \sigma^2\right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

임을 가정한다(김승구, 1997 참조). 여기서 $N = 87 \times 82 = 7154$ 이며, B_i 는 psf η 에 의해 관측치 y_i 에 영향을 미친 화소들의 집합을 나타낸다. 한편, 페널티 함수는 Green(1990b)에서처럼

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^P \sum_{k \in \partial_j} \ln \cosh(\theta_j - \theta_k) \quad (4.2)$$

을 사용하기로 한다. 여기서 ∂_j 는 j 번째 화소의 근방으로서 실험에서는 1차 근린(1st order nearest neighbors)을 사용하였다. 이와 같은 페널티 함수가 주어지면, 1차 도함수

$$\partial J(\theta) / \partial \theta_j = \sum_{k \in \partial_j} \tanh(\theta_j - \theta_k), \quad j = 1, 2, \dots, P$$

를 θ_j 에 대해 전개한다는 것은 거의 불가능하다. 따라서 식 (1.2)의 순수한 PEM 알고리즘을 사용할 수 없다. 한편 완전자료 $x = \{x_{ij}\}$ 를 $y_i = \sum_{j \in B_i} x_{ij}$ 의 관계로 정의할 때, 독립적으로

$$x_{ij} \sim N\left(h_{ij}\theta_j, \frac{\sigma^2}{p_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, P \quad (4.3)$$

을 따른다. 여기서 p_i 는 집합 B_i 의 원소수를 나타낸다. 이때,

$$d^{20} Q(\theta^n | \theta^n) = \text{diag} \left\{ - \sum_{i=1}^N p_i h_{ij}^2; \quad j = 1, 2, \dots, P \right\} \quad (4.4)$$

과 같은 대각행렬이 얻어진다. 그런데 이 문제에서 $d^2 J(\theta^n) = \partial^2 J(\theta^n) / \partial \theta_j \partial \theta_k$ 은 대칭이며 비음정치행렬이지만 대각행렬은 아니다. 여기서 $d^2 J_D(\theta^n)$ 은 양정치인 대각행렬이 되도록 선택하는 방법은 많을 수 있으나 여기서는 편리하게 $d^2 J(\theta^n)$ 의 대각원소만을 취하여

$$d^2 J_D(\theta^n) = \text{diag} \left\{ \sum_{k \in \partial_j} [1 - \tanh^2(\theta_j^n - \theta_k^n)]; \quad j = 1, 2, \dots, P \right\} \quad (4.5)$$

으로 선택하였다. 따라서 자연히 $d^2 J_O(\theta^n)$ 는 $d^2 J(\theta^n)$ 의 대각원소가 0인 행렬이 될 것이다. 결국 MOSLG 알고리즘은

$$\begin{aligned} \theta_j^{n+1} &= \theta_j^n - \{d^{20} Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda d^{20} J_D(\theta^n)\}_{jj}^{-1} \{d^{10} Q_\lambda(\theta^n | \theta^n)\}_j \\ &= \theta_j^n + \frac{\sum_{i=1}^N h_{ij} R_i^{(n)} - \sigma^{2(n)} \lambda \sum_{k \in \partial_j} \tanh(\theta_j^n - \theta_k^n)}{\sum_{i=1}^N p_i h_{ij}^2 + \sigma^{2(n)} \lambda \sum_{k \in \partial_j} [1 - \tanh^2(\theta_j^n - \theta_k^n)]}, \quad j = 1, 2, \dots, P \quad (4.6) \end{aligned}$$

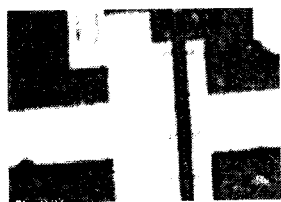
과 같이 결정된다. 단, $R_i = y_i - \sum_{j \in B_i} h_{ij} \theta_j^n$ 로서 n 번째 단계에서 i 번째 관측화소의 잔차를 의미한다. 그리고 $\sigma^{2(n)}$ 은 n 번째 단계에서 σ^2 의 추정치로서

$$\sigma^{2(n)} = \sum_i^N (R_i^{(n)})^2 / N = \frac{1}{N} \sum_i^N \left(y_i - \sum_{j \in B_i} h_{ij} \theta_j^n \right)^2 \quad (4.7)$$

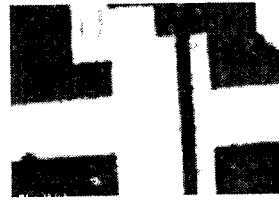
을 나타낸다. 한편 OSLG 알고리즘은

$$\begin{aligned} \theta_j^{n+1} &= \theta_j^n - \{d^{20} Q(\theta^n | \theta^n)\}_{jj}^{-1} \{d^{10} Q_\lambda(\theta^n | \theta^n)\}_j \\ &= \theta_j^n + \frac{\sum_{i=1}^N h_{ij} R_i^{(n)} - \sigma^{2(n)} \lambda \sum_{k \in \partial_j} \tanh(\theta_j^n - \theta_k^n)}{\sum_{i=1}^N p_i h_{ij}^2}, \quad j = 1, 2, \dots, P \quad (4.8) \end{aligned}$$

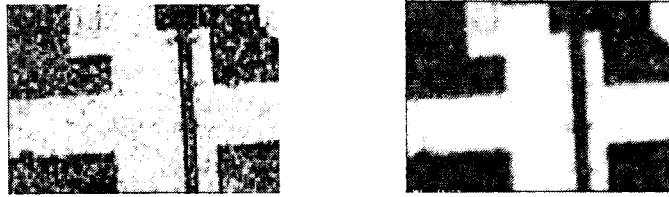
으로 주어진다.



(ㄱ)



(ㄴ)

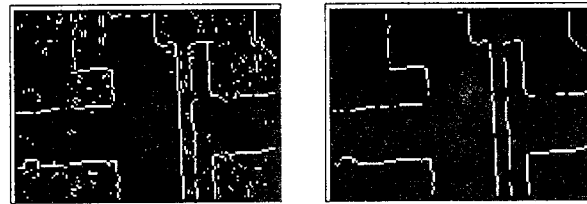


(a)

(b)

<그림 2> (a)과 (b)은 $\sigma^2 = 0.008$ 일 때 각각 $\lambda = 0.06$ 과 $\lambda = 0.10$ 에 대한, (c)과 (d)은 $\sigma^2 = 0.05$ 일 때 각각 $\lambda = 0.06$ 과 $\lambda = 0.15$ 에 대한 복원결과. (a)과 (c)은 OSLG, (b)과 (d)은 MOSLG 알고리즘을 사용한 결과.

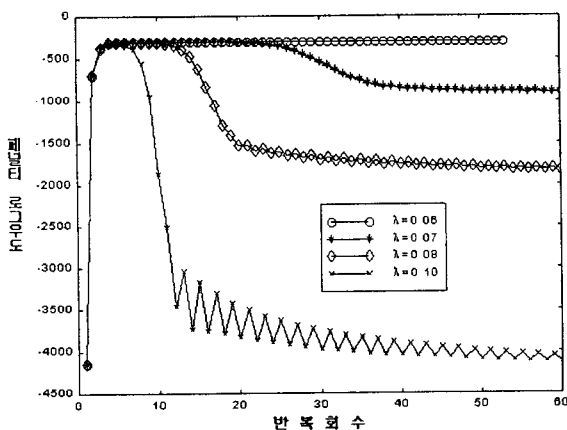
<그림 2>의 (a), (c)은 $\sigma^2 = 0.008$ 인 오염화상에 대해 각각 OSLG 및 MOSLG 알고리즘으로 복원한 화상이다. 이 오염화상에 대해 OSLG 알고리즘은 대략 $\lambda \in [0, 0.06]$ 내에서만 사용이 가능하다. 다시말해서 최대 $\lambda \approx 0.06$ 까지의 평활만 허용하며, 그 이상의 평활상수에 대해서는 <그림 3>의 (a)에서 제시한 것처럼 페널티 대수우도의 단조증가성이 파괴되면서 발산하게 된다.



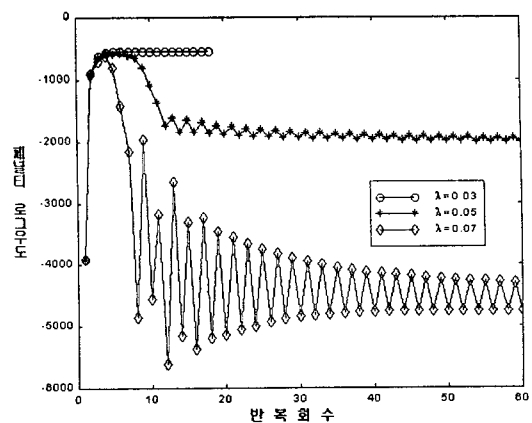
(a)

(b)

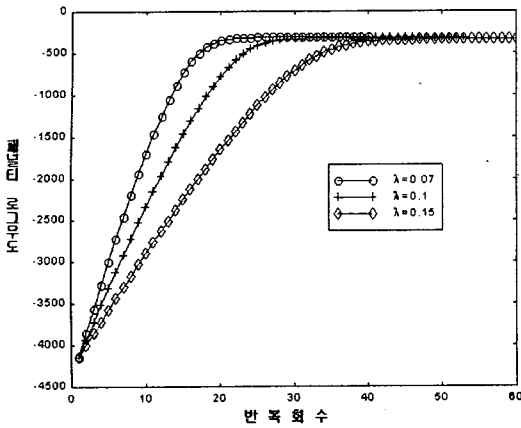
<그림 3> (a)과 (b)은 각각 <그림 2>의 (c)과 (d)에 대한 경계선추출 결과



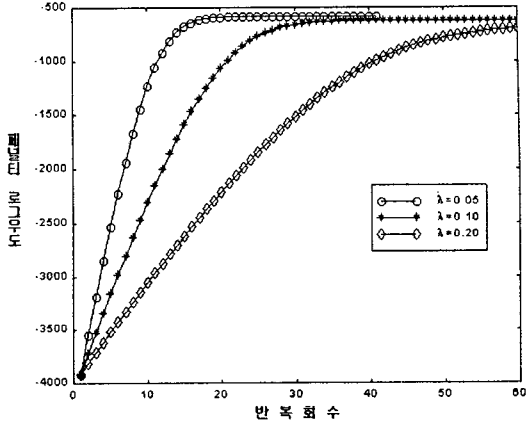
(a) $\sigma^2 = 0.008$ 일 때 OSLG알고리즘의 λ 값에 따른 페널티 로그우도변화



(b) $\sigma^2 = 0.05$ 일 때 OSLG알고리즘의 λ 값에 따른 페널티 로그우도변화



(c) $\sigma^2 = 0.008$ 일 때 MOSLG 알고리즘의 λ 값에 따른 페널티 로그우도 변화



(d) $\sigma^2 = 0.05$ 일 때 MOSLG 알고리즘의 λ 값에 따른 페널티 로그우도 변화

<그림 4> 서로다른 λ 값에서 알고리즘의 반복에 대한 페널티 내수우도의 수렴상태; (c), (d)에서 λ 에 대한 OSLG 알고리즘의 수렴제한성을 볼 수 있음. (c), (d)에서 MOSLG 알고리즘의 λ 에 대한 수렴영역 확장을 볼 수 있음

반면, <그림 2>의 (c)에서 보는 바와같이 MOSLG 알고리즘을 사용하면 $\lambda=0.1$ 에 대해서도 복원이 가능하다. 두 화상을 비교해 볼 때, 작은 λ 값이 요구되는 경우 두 알고리즘에 대응한 복원화상은 큰 차이를 보이지 않는다. 그러나 잡음이 보다 큰 화상에 대해서, 다시말해서 큰 값의 λ 를 요구하는 화상에서는 MOSLG 알고리즘이 확실히 설득력을 갖는다. 그림 (c)과 (d)은 $\sigma^2 = 0.05$ 인 오염화상에 대한 복원 결과이다. 이 오염화상은 보다 큰 λ 에 대해 평활이 필요함에도, <그림 4>의 (c)에 나타난 바와 같이 OSLG 알고리즘은 약 $\lambda < 0.03$ 이내에서만 사용할 수 있기 때문에 <그림 2>의 (c)에서 보는 바와 같이 잡음이 충분히 평활되지 못한 화상을 제공할 수 밖에 없다. 이때, MOSLG 알고리즘을 이용하면, <그림 2>의 (d)과 같이 $\lambda = 0.15$ 수준에서의 복원화상을 얻을 수 있다. 오염화상에 대한 충분한 잡음제거는 자동인식 분야에서 중요하게 사용되는 경계선 추출(edge-extraction)을 위해 반드시 필요하다. (c)과 (d)의 두 화상은 경계선추출을 하였을 때 결과를 비교해보자. <그림 3>의 (a)과 (b)은 각각 <그림 2>의 (c)과 (d)에 대하여 소벨기법(Sobel's method, A.K. Jain, 1989)을 사용하여 최적상태에서 얻은 경계선추출 결과이다. <그림 3>의 두 결과는 충분히 잡음을 평활하지 못하면 (a)과 같이 상태가 나쁜 경계추출 결과를 초래하게 됨을 뚜렷이 보여주고 있다.

5. 결론

OSL 혹은 OSLG 알고리즘은 $dJ(\theta) = 0$ 으로부터 θ 에 관한 전개식을 얻을 수 없는 경우에도 EM 알고리즘이 유도된다는 장점을 가지고 있다. 이러한 편리성때문에 이 알고리즘은 화상복원에서 매우 유용하게 사용된다. 그러나 이러한 장점에도 불구하고, OSLG 알고리즘은 평활상수 λ 에 대한 수렴 제한성 때문에 잡음에 대한 평활의 한계를 갖는다. 따라서 상대적으로 큰 잡음을 갖는

오염화상에 대해서는 충분한 복원력을 갖지 못한다. 반면 제안된 MOSLG 알고리즘은 함수 $J(\theta)$ 의 2차 미분이 존재하면, OSLG 알고리즘의 장점을 그대로 유지하면서 보다 확장된 λ 의 범위에서 잡음이 큰 오염화상에 대한 설득력있는 복원결과를 제공할 수 있다. 여기서 '보다 확장된 λ 의 범위'란, 화상실험을 통한 우리의 경험에 따르면, 실용적으로 타당한 복원결과를 제공해주는 λ 의 전역에 해당한다. 특히 $d^2J_0(\hat{\theta})$ 가 음정치행렬이면 MSOLG 알고리즘은 $\lambda \in [0, \infty]$ 에서 페널티 우도에 대한 단조증가와 수렴이 보장된다.

한편, 양질의 복원화상을 보장하고 큰 λ 에 대해서도 OSL 혹은 OSLG가 수렴하는 페널티 함수를 찾는 것은 이 분야에서 또 다른 과제라 할 수 있습니다.

본 논문에서는 수렴속도에 관해서는 자세하게 언급하지 않았지만, MOSLG 알고리즘은 OSL 또는 OSLG 알고리즘보다는 수렴속도가 느리다. 그러나 PEM 알고리즘과 비교해 볼때, $d^2J_0(\hat{\theta})$ 가 양정치행렬이면 PEM 알고리즘보다 수렴속도가 빠르나, $d^2J_0(\hat{\theta})$ 가 음정치행렬인 경우 PEM 알고리즘보다 수렴속도가 느리다는 사실을 알 수 있다. 수렴속도에 관한 자세한 논의는 다음의 연구과제에서 자세하게 다루도록 하겠다.

참 고 문 헌

- [1] Abdalla, M. and Kay, J. (1990). Edge Preserving Image Restoration, *Stochastic Models, Statistical Methods, and Algorithm in Image Analysis*, P. Barone et al.(Eds.), Springer -Verlag, 1-13.
- [2] Besag, J.E.(1986). On the statistical analysis of dirty pictures(with discussion). *Journal of Royal Statistical Society B*, 259-302.
- [3] Geman, S., and Geman, D.(1984). Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 6, 721-741
- [4] Green, P.J. (1990a). On use of the EM algorithm for penalized likelihood estimation, *Journal of Royal Statistical Society B*, Vol. 52, 443-452.
- [5] Green, P.J. (1990b). Bayesian Reconstruction from Emission Tomography data using a Modified EM Algorithm, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 9(1), 84-93.
- [6] Jain, A.K. (1989). *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice-Hall.
- [7] 김승구(1996). PEM 그래디언트 알고리즘에 관한 연구, 「한국통계학회논문집」, 제3권, 2호, 239-247.
- [8] 김승구(1997). EM알고리즘을 이용한 중도절단화상에 대한 복원, 「응용통계연구」, 제10권 2호, 309-323.
- [9] Lange, K(1995). A Gradient Algorithm Locally Equivalent to the EM Algorithm, *Journal of Royal Statistical Society B*, Vol. 57, 425-437.

부 록

정리1의 증명. 먼저 $Q_\lambda^*(\theta^n | \theta^n) \equiv Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda J_D(\theta^n)$ 라 쓰고, $\theta = \theta^n$ 에서 $L_\lambda(\theta^{n+1})$ 에 대한 Taylor 2차 전개식은

$$\Delta L_\lambda(\theta^n) \equiv L_\lambda(\theta^{n+1}) - L_\lambda(\theta^n) = dL_\lambda(\theta^n)^T r_n + (1/2) r_n^T d^2 L_\lambda(\theta^n) r_n + O(\|r_n^T r_n\|) \quad (\text{부.1})$$

에

$$r_n = (\theta^{n+1} - \theta^n) = -\{d^{20} Q_\lambda^*(\theta^n | \theta^n)\}^{-1} dL_\lambda(\theta^n) \quad (\text{부.2})$$

를 대입하여 정리하고 김승구(1996)의 정리 1의 증명과정을 따르면, 조건에 의한 λ 의 범위에서 $\Delta L_\lambda(\theta^n) > 0$ 임을 보일 수 있다. □

정리2의 증명. 행렬 $C - \lambda D_2$ 이 비음정치이면 $(B + C + \lambda D_1)^{-1} (C - \lambda D_2)$ 역시 비음정치행렬이다. 따라서 $dM(\hat{\theta})$ 의 모든 고유치는 $\alpha \geq 0$ 이다. 그리고

$$0 = |dM(\hat{\theta}) - \alpha I| = |C - \lambda D_2 - \alpha(B + C + \lambda D_1)| = |(1 - \alpha)(C + \lambda D_1) - \lambda D_2 - \alpha B|$$

이므로, 이는 α 에 대응하는 고유벡터 $x \neq 0$ 에 대해

$$(1 - \alpha)x^T(C + \lambda D_1)x - \alpha x^T B x = \lambda x^T D_2 x > 0 \quad (\text{부.3})$$

을 의미한다. 그리고 $B + C + \lambda D_1$ 은 양정치행렬이고 B 는 비음정치행렬이므로 관계식 (3.7)은

$$\alpha < \frac{x^T(C + \lambda D_1)x}{x^T(B + C + \lambda D_1)x} \leq 1$$

이 성립한다. □

정리3의 증명. $C - \lambda D = C - \lambda(D_1 + D_2) = (C - \lambda D_2) - \lambda D_1$ 이다. 먼저 $\lambda_0 \in \Lambda_O$ 이면, 임의의 벡터 $x \neq 0$ 에 대해, $0 \leq x^T(C - \lambda_0 D)x = x^T(C - \lambda_0 D_2)x - \lambda_0 x^T D_1 x \Rightarrow x^T(C - \lambda_0 D_2)x \geq 0$.

즉, 반드시 $\lambda_0 \in \Lambda_M$ 임을 의미한다. 역으로 $\lambda_0 \in \Lambda_M$ 이면, 임의의 벡터 $x \neq 0$ 에 대해,

$$0 \leq x^T(C - \lambda_0 D_2)x = x^T(C - \lambda_0 D)x + \lambda_0 x^T D_1 x \not\Rightarrow x^T(C - \lambda_0 D)x \geq 0. \text{ 즉, 반드시 } \lambda_0 \in \Lambda_O$$

임을 의미하지 않는다. 결국 $\Lambda_O \subset \Lambda_M$. □