

## 임의중단모형에서 신뢰도의 비모수적 통합형 추정량

이 재 만<sup>1)</sup>, 차 영 준<sup>2)</sup>, 장 덕 준<sup>3)</sup>

### 요약

임상실험이나 신뢰성공학 분야에서 임의 중단자료를 이용한 비모수적 신뢰도 추정량으로 Kaplan-Meier 추정량과 Nelson형 추정량이 많이 사용되고 있다. 그러나 Nelson형 추정량은 평균제곱오차의 관점에서 Kaplan-Meier 추정량보다 추정능력이 우수한 반면 편향의 신뢰도가 감소함에 따라 양의 방향으로 점증하는 소표본 특성을 갖는다. Nelson형 추정량의 이러한 특성 때문에 신뢰도의 함수로 표현되는 잔여수명 분위수함수 등의 추정시에는 평균제곱오차의 관점에서 Kaplan-Meier 추정량보다 추정능력이 떨어짐을 볼 수 있다. 이러한 점을 고려하여 이 두 추정량을 가중평균으로 통합한 새로운 비모수적 신뢰도 추정량을 제안하고 추정량의 특성을 비교 분석하였다.

### 1. 서론

컴퓨터, 자동차, 통신시스템 등의 부품, 장치, 장비, 혹은 체계의 신뢰성에 대한 정량적 측도 중에 하나가 신뢰도이다. 신뢰도는 부품, 혹은 체계가 주어진 조건하에서 특정 기간동안 의도된 기능을 수행할 확률로 정의된다. 따라서 부품 혹은 체계 신뢰도의 추정은 부품이나 체계의 신뢰성에 대한 정량적 비교를 필요로 하는 생산자나 사용자 모두에게 중요한 문제이다.

신뢰도에 대한 추정은 주로 모수적 모형에서 이루어져 왔다. 그러나 근래에는 수명분포에 대한 가정을 크게 완화한 비모수적 모형에서도 활발히 연구되고 있는 실정이다. 한편 추정에 이용되는 부품이나 체계의 수명 관측치는 시간에 관련된 자료로서 모든 실험대상의 수명을 관측한다는 것은 현실적으로 어렵다. 따라서 여러 가지 형태의 관측 중단 하에서 수집되는 불완전한 자료에 의존하는 신뢰도의 추정방법이 요구된다.

Kaplan과 Meier(1958)는 수명관측의 중단이 임의로 일어나는 임의중단모형에서 얻은 수명 관측치를 이용하여 신뢰도의 비모수적 추정량을 제안하였다. Nelson(1972)은 누적고장률에 대한 비모수적 추정량을 제안하였는데 이를 이용하면 누적고장률의 함수로 표현되는 신뢰도에 대한 추정량으로 Kaplan-Meier 추정량과는 다른 형태인 Nelson형 추정량을 구성할 수 있다. 이들 신뢰도의 비모수적 추정량들에 대한 점근적 특성은 Breslow와 Crowley(1974) 이래로 많은 연구자들에 의해 연구되고 있다.

Fleming과 Harrington(1984)은 평균제곱오차 관점에서 Nelson형 추정량이 Kaplan-Meier 추정량보다 추정능력이 높음을 보였다.

- 
- 1) (760-749) 경북 안동시 송천동 안동대학교 자연과학대학 통계학과 부교수
  - 2) (760-749) 경북 안동시 송천동 안동대학교 자연과학대학 통계학과 교수
  - 3) (641-773) 경남 창원시 사림동 창원대학교 자연과학대학 통계학과 부교수

한편 수명관측의 중단이 임의로 일어나는 임의중단모형에서 얻은 수명 관측치를 이용한 신뢰도의 비모수적 추정 방법으로 Buckley-James(Buckley and James(1979))형 추정량을 들 수 있다. 이 추정량은 관측된 수명자료에서 관측 중단이 일어난 관측수명을 '수명이 관측중단시점보다 크다'는 조건이 주어지는 수명의 조건부 기대값의 추정치로 대치하여 재구성한 수명 자료를 이용하는 방법이다.

Song(1987)은 신뢰도의 Kaplan-Meier 추정량, Nelson형 추정량, Buckley-James형 추정량을 이용한 잔여수명분위수함수(Percentile Residual Lifetime Function)에 대한 추정량들을 제안하고 이들 중에 Buckley-James형 추정량을 이용한 잔여수명 분위수 함수에 대한 추정량이 평균제곱오차의 관점에서 추정능력이 높은 반면 Nelson형 추정량을 이용한 추정량의 추정능력이 가장 떨어짐을 보였다.

본 논문에서는 Nelson형 추정량이 평균제곱오차의 관점에서 추정능력이 우수함에도 불구하고 Nelson형 추정량을 이용한 평균잔여수명함수 등에 대한 추정량의 추정능력이 Kaplan-Meier 추정량이나 Buckley-James형 추정량을 이용하는 경우보다 떨어짐에 주목하여 Nelson형 추정량의 이와 같은 문제점을 보완한 새로운 추정량을 제안하고자 한다.

2 절에서는 본 논문에서 사용되는 기호와 널리 알려진 신뢰도에 대한 Kaplan-Meier 추정량, Nelson형 추정량, Buckley-James형 추정량을 소개한다. 3절에서는 임의중단모형에서 신뢰도의 비모수적 통합형 추정량을 제안하고 추정량의 특성을 편의와 평균제곱오차의 관점에서 Kaplan-Meier 추정량, Nelson형 추정량, Buckley-James형 추정량의 특성과 비교 분석한다.

## 2. 신뢰도의 비모수적 추정량

부품이나 체계의 수명이 임의 중단모형에서 관측된다고 하자. 즉 각 부품이나 체계의 수명을 연속인 분포 함수  $F(t)$ 를 갖는 확률변수  $T_i, i=1, \dots, n$ ,이라 하고 각 부품에 대한 수명 관측 시간을 분포함수가  $G(c)$ 인 확률변수  $C_i, i=1, \dots, n$ 이라고 할 때 이들 부품의 수명과 관측시간은 서로 독립이고 관측 자료는 다음과 같은  $(X_i, \delta_i)$ 로 나타낼 수 있다.

$$X_i = \min(T_i, C_i) ; \delta_i = \begin{cases} 1, & T_i \leq C_i \text{ 일 때} \\ 0, & T_i > C_i \text{ 일 때,} \end{cases}$$

$i=1, \dots, n$ .

부품이나 체계의 관측 수명  $X_1 \dots X_n$ 의 순서 통계량을  $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$ 라하고 이들 순서 통계량의 관측 중단여부를 나타내는 지시함수를  $\delta_{(1)}, \dots, \delta_{(n)}$ 라고 하면 부품이나 체계의 신뢰도  $S(x) = 1 - F(x)$ 의 Kaplan Meier의 추정량  $\hat{S}_{KM}$ 은 다음과 같다.

$$\hat{S}_{KM}(x) = \prod_{i: X_{(i)} \leq x} \left(1 - \frac{\delta_{(i)}}{n - i + 1}\right) .$$

한편 부품이나 체계의 누적위험률  $\Lambda(x) = -\log S(x)$ 에 대한 Nelson 추정량  $\widehat{\Lambda}(x)$ 은 다음과 같다.

$$\widehat{\Lambda}(x) = \sum_{i: X_{(i)} \leq x} \frac{\delta_{(i)}}{n-i+1}.$$

$S(x) = e^{-\Lambda(x)}$  이므로 누적 위험률  $\Lambda(x)$ 의 Nelson 추정량을 이용한 신뢰도  $S(x)$ 의 Nelson형 추정량  $\widehat{S}_N$ 은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{S}_N(x) &= e^{-\widehat{\Lambda}(x)} \\ &= \prod_{i: X_{(i)} \leq x} e^{-\frac{\delta_{(i)}}{n-i+1}} \end{aligned}$$

Kaplan Meier의 추정량  $\widehat{S}_{KM}(x)$ 과 Nelson형 추정량  $\widehat{S}_N(x)$ 을 비교해보면  $0 \leq x \leq 1$ 일 때,  $e^{-x}$ 는  $1-x$ 보다 크고  $\delta_{(i)}/(n-i+1)$ 이 0보다 크거나 같고 1보다 작거나 같으므로  $\widehat{S}_{KM}(x) \leq \widehat{S}_N(x)$  이고  $\delta_{(i)}/(n-i+1)$ 가 0에 가까운 값일 때

$$e^{-\frac{\delta_{(i)}}{n-i+1}} \simeq 1 - \frac{\delta_{(i)}}{n-i+1}$$

이므로  $\widehat{S}_{KM}(x) \simeq \widehat{S}_N(x)$  이다. Fleming과 Harrington(1984)은 소표본에서 Nelson형 추정량이 Kaplan-Meier 추정량보다 더 작은 평균제곱오차를 갖는 것을 보였다. 두 추정량  $\widehat{S}_{KM}(x)$ 과  $\widehat{S}_N(x)$ 는 다음과 같은 동일한 점근적 분포를 갖는 일치추정량이다.(Miller (1981))

$$N(S(x), \frac{S^2(x)}{n} \int_0^x \frac{dF_u(u)}{[1-H(u)]^2}),$$

여기서

$$F_u(x) = \int_0^x [1-G(u)]dF(u),$$

$$1-H(u) = [1-F(u)][1-G(u)].$$

한편 Buckley-James형 추정량  $\widehat{S}_{BJ}(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\widehat{S}_{BJ}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(T_i^* \geq x),$$

여기서

$$T_i^* = T_i \delta_i + \widehat{E}(T_i | T_i \geq C_i) (1 - \delta_i), i = 1, \dots, n,$$

$$\widehat{E}(T_i | T_i \geq C_i) = C_i + \frac{\int_{C_i}^{X_{(n)}} \widehat{S}_{KM}(u) d(u)}{\widehat{S}_{KM}(C_i)}.$$

다음 절에서는 임의중단모형에서 신뢰도의 비모수적 통합형 추정량을 제안하고 추정량의 특성을 편

의와 평균제곱오차의 관점에서 Kaplan-Meier 추정량, Nelson형 추정량, Buckley-James형 추정량의 특성과 비교 분석한다.

### 3. 신뢰도의 비모수적 통합형 추정량

2절에서 소개한 비모수적 추정량에 대한 점근적 성질은 많이 연구되어 잘 알려져 있지만 이들 추정량이 실제로 적용되는 임상실험이나 신뢰성 공학분야에서는 소표본에서의 추정 능력이 더 큰 관심사이다. 이들 추정량에 대한 소표본에서의 추정능력은 흔히 평균제곱오차의 관점에서 비교된다. 물론 일정 시점에서의 신뢰도를 분석하는 경우에는 추정량의 평균제곱오차만 고려하여도 충분히 추정능력을 평가할 수 있지만 평균수명, 평균잔여수명, 잔여수명 분위수 등과 같이 일정구간에서 신뢰도의 적분으로 표현되는 신뢰성 특성의 추정에 사용되는 경우에는 편의도 함께 고려하는 것이 바람직하다고 판단된다. 이러한 관점에서 Nelson형 추정량과 Kaplan-Meier 추정량을 평균제곱오차 뿐만 아니라 편의도 함께 고려하여 두 추정량의 추정능력을 비교하면 알려진 바와 같이 다음 그림1과 그림2로 요약된다. 그림 1은 신뢰도  $S(x) = e^{-x}$  일 때 표본의 크기를 20, 관측중단율을 30%로 한 모의실험에서 추정한 편의를 신뢰도의 참값으로 나눈 상대적 편의(relative bias), 그림 2는 두 추정량의 평균제곱오차를 나타내었다.

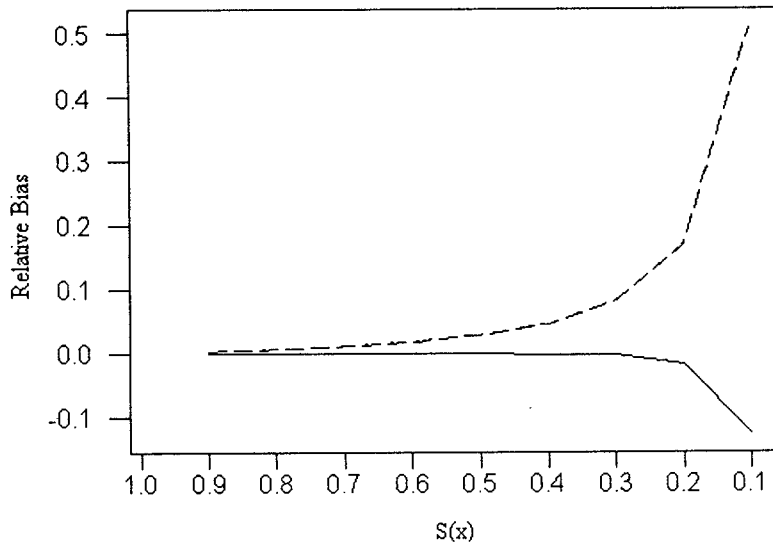
그림 1에서 Nelson형 추정량의 편의가 일정한 방향으로 점증하는 경향은 평균잔여수명함수, 잔여수명분위수함수 등을 Nelson형 추정량을 이용하여 추정할 때 그 추정능력이 현저히 저하되는 현상을 유발한다.

Nelson형 추정량이 갖는 이러한 소표본에서의 문제점을 고려하여 아래와 같이 평균제곱오차의 관점에서 추정능력이 우수한 Nelson형 추정량  $\hat{S}_N$ 과 불편성이 뛰어난 Kaplan-Meier 추정량  $\hat{S}_{KM}$ 을 가중평균으로 통합한 새로운 비모수적 추정량으로 제안한다.

$$\hat{S}_\alpha(x) = \alpha \cdot \hat{S}_{KM}(x) + (1 - \alpha) \cdot \hat{S}_N(x), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

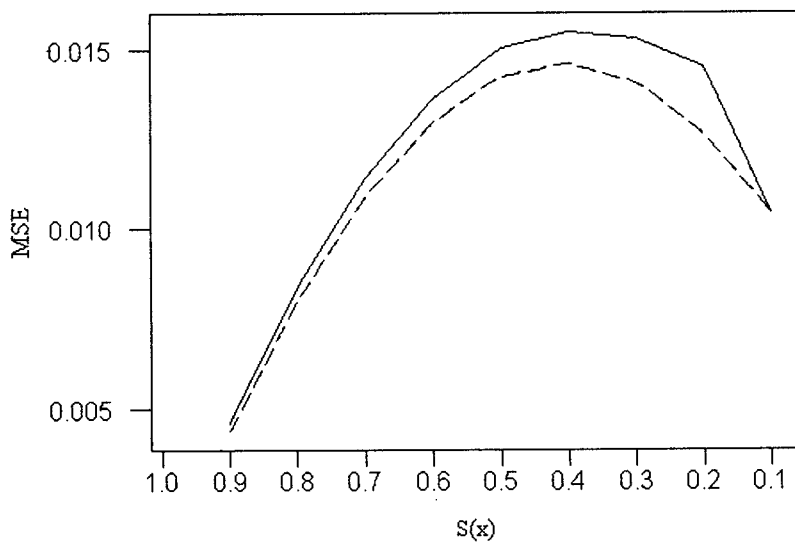
여기서  $\hat{S}_\alpha(x)$ 는  $\hat{S}_{KM}$ 과  $\hat{S}_N$ 의 선형결합으로  $\hat{S}_{KM}(x) \leq \hat{S}_\alpha(x) \leq \hat{S}_N(x)$ 이고, 점근적 특성은 Kaplan-Meier 추정량  $\hat{S}_{KM}$ 과 동일함을 쉽게 보일 수 있다.

한편 소표본에서 제안된 추정량  $\hat{S}_\alpha$ 와 Nelson형 추정량  $\hat{S}_N$ , Kaplan-Meier 추정량  $\hat{S}_{KM}$ 의 추정능력을 평균제곱오차와 편의의 관점에서 비교하여 바람직한 추정능력을 갖는 가중치



— : Kaplan-Meier      - - - : Nelson

그림 1. Kaplan-Meier 추정량과 Nelson형 추정량의 상대적 편의



— : Kaplan-Meier      - - - : Nelson

그림 2. Kaplan-Meier 추정량과 Nelson형 추정량의 평균제곱오차

$\alpha$ 를 선택하기 위하여 수명 분포를 평균이 1인 지수분포( $F(t) = 1 - e^{-t}$ ), 관측시간분포는 관측 중단율(Censoring rate)을 고려하여 평균이 9인 지수분포(관측중단율 10%), 평균이 7/3인 지수

분포(관측중단을 30%), 평균이 1인 지수분포(관측중단을 50%)를 가정하고 이들 수명분포와 관측시간분포로부터 크기가  $n$ 인 모의 표본을 생성시켜 신뢰도  $S(x)$ 가 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1이 되는 각 시점  $x$ 에서  $\hat{S}_{KM}(x)$ ,  $\hat{S}_N(x)$ ,  $\hat{S}_\alpha(x)$ ,  $\alpha = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8$ , 를 구하는 과정을 각각 10,000회씩 반복하여 각 추정량의 편의와 평균제곱오차를 추정하였다. 표본의 크기는 20, 35, 50을 고려하였다.

관측중단을 10%일 때의 모의실험 결과중 표본의 크기가 20인 경우는 표 1에, 35인 경우는 표 2에, 50인 경우는 표 3에 정리하였다. 관측중단을 10%인 경우와 유사한 결과를 보이는 30%와 50% 경우의 실험결과는 생략하였다.

표 1의 실험결과에서 Kaplan-Meier 추정량에 비하여 Nelson형 추정량이 대체로 신뢰도가 0.2이상인 구간에서 작은 평균제곱오차를 가짐을 볼 수 있다.

편의에 있어서는 Kaplan-Meier 추정량은 거의 편의를 가지지 않는 반면 Nelson형 추정량은 신뢰도가 떨어짐에 따라 점증하는 경향을 뚜렷하게 보이고 있다.

$\alpha$ 가 0.4, 0.5, 0.6일 때 대체로 비슷한 양상을 보이는  $\hat{S}_\alpha(x)$ 는 Nelson 추정량에 비하여 대체로 신뢰도가 0.2 이상인 구간에서는 거의 같은 수준의 평균제곱오차를 가진다. 그러나 신뢰도 0.2 이하인 구간에서는 오히려 더 낮은 수준의 평균제곱오차를 갖는 것으로 나타났으며, 편의에 있어서는 50%이상 크게 줄어들었음을 볼 수 있다.

가중치  $\alpha = 0.4$  일 때  $\hat{S}_\alpha(x)$ 와  $\hat{S}_{BJ}(x)$ 의 추정능력을 비교하기 위하여 앞에서와 동일한 실험 조건에서 각 추정량의 편의와 평균제곱오차를 추정하였다. 관측 중단을이나 표본의 크기에 따른 실험의 결과는 대체로 비슷한 경향을 보이고 있어 관측 중단을 30%, 표본의 크기 20인 경우의 결과만 그림 3과 그림 4에 나타내었다. 그림 3에는 각 신뢰도에 대한 추정량의 평균제곱오차를 그림 4에는 각 신뢰도에 대한 상대적 편의를 나타내었다.

평균제곱오차의 관점에서 볼 때 대체로 신뢰도가 0.6이상인 구간에서 제안된 추정량  $\hat{S}_{0.4}(x)$ 과  $\hat{S}_{BJ}(x)$ 는 거의 동일한 추정능력을 보이나 0.6 이하인 구간에서는 제안된 추정량  $\hat{S}_{0.4}(x)$ 가 더 높은 추정능력을 보이고 있음을 그림 3에서 관찰할 수 있다. 편의의 측면에서 보면 신뢰도가 0.2이상인 전 구간에서 제안된 추정량  $\hat{S}_{0.4}(x)$ 가 낮은 상대적 편의를 가짐을 그림 4에서 관찰할 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 수명관측의 중단이 임의로 일어나는 임의중단모형에서 얻은 수명 관측치를 이용한 신뢰도의 비모수적 추정 방법의 하나로 Nelson형 추정량과 Kaplan-Meier 추정량의 가중평균으로 통합한 새로운 비모수적 신뢰도 추정량을 제안하고 추정량의 특성을 비교 분

표 1. 표본의 크기가 20일 때,  $\hat{S}_{KM}$ ,  $\hat{S}_a$ ,  $\hat{S}_N$ 의 편의와 평균제곱오차의 추정치

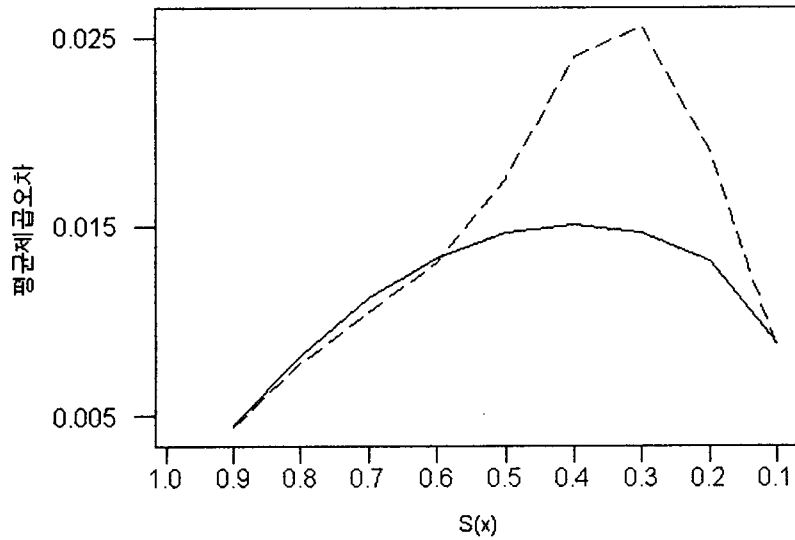
$S(x)$		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$\hat{S}_{KM}$	bias	-.00016	-.00010	-.00037	-.00028	-.00046	-.00086	-.00046	-.00032	-.00127
	MSE	.00452	.00807	.01069	.01235	.01312	.01281	.01142	.00911	.00561
$\hat{S}_{0.2}$	bias	.00064	.00107	.00119	.00173	.00206	.00228	.00333	.00426	.00458
	MSE	.00448	.00799	.01058	.01222	.01299	.01267	.01129	.00898	.00546
$\hat{S}_{0.4}$	bias	.00087	.00196	.00273	.00383	.00471	.00546	.00709	.00882	.01042
	MSE	.00443	.00791	.01048	.01211	.01287	.01255	.01119	.00889	.00540
$\hat{S}_{0.5}$	bias	.00092	.00227	.00345	.00488	.00602	.00707	.00904	.01112	.01335
	MSE	.00441	.00788	.01043	.01205	.01281	.01250	.01115	.00887	.00539
$\hat{S}_{0.6}$	bias	.00118	.00278	.00416	.00585	.00729	.00863	.01093	.01339	.01627
	MSE	.00439	.00784	.01038	.01200	.01276	.01245	.01112	.00886	.00541
$\hat{S}_{0.8}$	bias	.00152	.00379	.00570	.00789	.00988	.01184	.01481	.01801	.02211
	MSE	.00435	.00777	.01029	.01191	.01267	.01238	.01108	.00887	.00550
$\hat{S}_N$	bias	.00280	.00512	.00731	.00993	.01244	.01494	.01852	.02256	.02796
	MSE	.00430	.00770	.01021	.01182	.01259	.01233	.01107	.00892	.00568

표 2. 표본의 크기가 35일 때,  $\hat{S}_{KM}$ ,  $\hat{S}_a$ ,  $\hat{S}_N$ 의 편의와 평균제곱오차의 추정치

$S(x)$		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$\hat{S}_{KM}$	bias	-.00029	-.00046	.00012	-.00013	-.00003	-.00011	.00000	-.00004	-.00042
	MSE	.00258	.00465	.00612	.00707	.00748	.00730	.00653	.00519	.00316
$\hat{S}_{0.2}$	bias	.00002	.00021	.00098	.00100	.00144	.00170	.00215	.00254	.00279
	MSE	.00257	.00462	.00609	.00703	.00743	.00726	.00649	.00515	.00312
$\hat{S}_{0.4}$	bias	.00030	.00087	.00187	.00217	.00293	.00352	.00432	.00512	.00600
	MSE	.00255	.00460	.00606	.00699	.00740	.00722	.00646	.00513	.00310
$\hat{S}_{0.5}$	bias	.00036	.00107	.00230	.00280	.00368	.00442	.00540	.00642	.00761
	MSE	.00255	.00458	.00604	.00698	.00738	.00720	.00645	.00512	.00310
$\hat{S}_{0.6}$	bias	.00040	.00123	.00261	.00329	.00437	.00531	.00648	.00770	.00921
	MSE	.00254	.00457	.00602	.00696	.00736	.00719	.00644	.00512	.00310
$\hat{S}_{0.8}$	bias	.00121	.00195	.00357	.00455	.00590	.00714	.00865	.01028	.01243
	MSE	.00252	.00455	.00600	.00693	.00733	.00717	.00643	.00513	.00313
$\hat{S}_N$	bias	.00137	.00260	.00448	.00568	.00737	.00895	.01082	.01286	.01564
	MSE	.00251	.00452	.00597	.00690	.00731	.00715	.00643	.00515	.00317

표 3. 표본의 크기가 50일 때,  $\hat{S}_{KM}$ ,  $\hat{S}_a$ ,  $\hat{S}_N$ 의 편차와 평균제곱오차의 추정치

추정량	$S(x)$									
	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	
$\hat{S}_{KM}$	bias	.00008	.00005	.00002	.00007	.00016	.00000	-.00020	-.00034	-.00017
	MSE	.00181	.00326	.00432	.00498	.00521	.00509	.00457	.00360	.00219
$\hat{S}_{0.2}$	bias	.00016	.00043	.00063	.00090	.00120	.00127	.00132	.00146	.00204
	MSE	.00181	.00325	.00430	.00496	.00519	.00507	.00455	.00359	.00217
$\hat{S}_{0.4}$	bias	.00045	.00088	.00128	.00174	.00225	.00254	.00283	.00326	.00424
	MSE	.00180	.00323	.00428	.00494	.00518	.00505	.00453	.00358	.00217
$\hat{S}_{0.5}$	bias	.00052	.00102	.00155	.00212	.00276	.00317	.00359	.00416	.00535
	MSE	.00179	.00323	.00428	.00493	.00517	.00504	.00453	.00357	.00217
$\hat{S}_{0.6}$	bias	.00058	.00119	.00186	.00253	.00328	.00381	.00435	.00506	.00645
	MSE	.00179	.00322	.00427	.00492	.00516	.00503	.00452	.00357	.00217
$\hat{S}_{0.8}$	bias	.00083	.00161	.00248	.00335	.00432	.00507	.00587	.00687	.00866
	MSE	.00178	.00321	.00425	.00491	.00515	.00502	.00452	.00358	.00219
$\hat{S}_N$	bias	.00105	.00200	.00310	.00419	.00534	.00635	.00739	.00867	.01086
	MSE	.00178	.00320	.00424	.00489	.00513	.00502	.00452	.00358	.00221



—:  $\hat{S}_{0.4}(x)$     - - - :  $\hat{S}_{BJ}(x)$   
 그림 3.  $\hat{S}_{0.4}$ 과  $\hat{S}_{BJ}$ 의 평균제곱오차



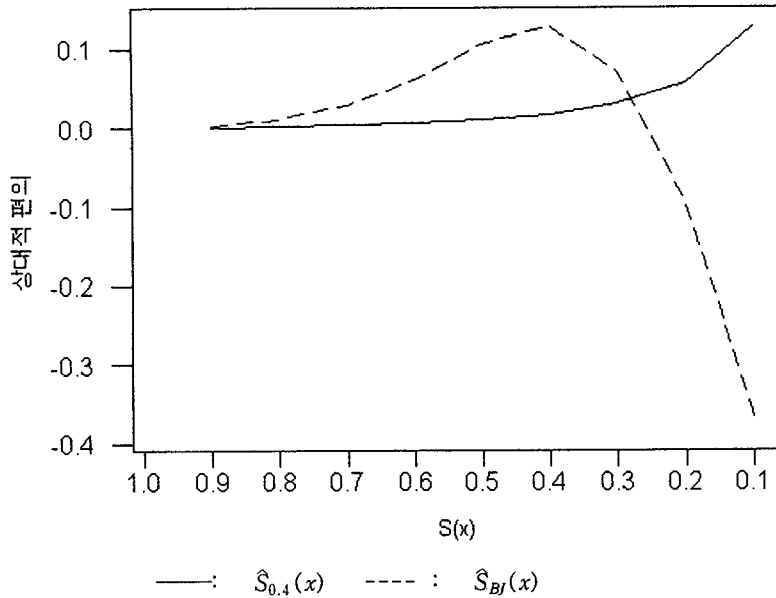


그림 4.  $\hat{S}_{0.4}$ 과  $\hat{S}_{BJ}$ 의 상대적편의

석한 결과 제안된 추정량이 평균제곱오차의 관점에서 추정능력이 우수한 Nelson형 추정량, 무시할 수 있는 정도의 편의를 가지는 Kaplan-Meier 추정량, 잔여수명분위수함수 등의 추정 시에 상대적으로 높은 추정능력을 보이는 Buckley-James형 추정량에 비하여 평균제곱오차나 편위의 측면에서 비슷하거나 높은 추정능력을 가짐을 알 수 있었다.

마지막으로 신뢰도의 함수로 표현되는 평균잔여수명함수나 잔여수명분위수함수 등의 추정량을 제안된 신뢰도의 추정량을 이용하여 구성하는 경우에 이 추정량들의 효율에 대한 고찰은 흥미있는 추후 연구 과제로 생각된다.

### 참고문헌

- [1] Breslow, N. E. and Crowley, J. (1974). A Large Sample Study of the Life Table and Product Limit Estimators under Random Censorship, *The Annals of Statistics*, Vol. 2, 435-453.
- [2] Buckley, J. and James, I. (1979). Linear regression with censored data, *Biometrika*, Vol. 66, 429-436.
- [3] Fleming, T. R. and Harrington, D. P. (1984). Nonparametric Estimation of the Survival Distribution in Censored Data, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 13, 2469-2486.
- [4] Kaplan, E. L. and Meier, P.(1957). Nonparametric Estimation From Incomplete Sample,

*Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53, 457-481.

[5] Miller, R. G. (1981). *Survival Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[6] Nelson, W. B. (1972). Theory and Applications of Hazard Plotting for Censored Failure Data, *Technometrics*, Vol. 14, 945-996.

[7] Song, J. K. (1987). *Statistical Inference in Models based on the Percentile Residual Lifetime Function*, Ph. D. Dissertation, Statistics in the Graduate division of the University of California, Berkeley.