The Korean Communications
in Statistics Vol. 5, No. 3, 1998
pp. 623-632

이원혼합모형에서 고정효과의 신뢰구간에 관한 분산성분추정량의 선택[1)]

이 장 택[2)]

요 약

이원혼합모형에서 고정효과의 추정가능한 함수에 대한 신뢰구간을 구하는 경우에 어떤 분산성분추정량을 선택하는 것이 가장 바람직한가를 모의실험을 통하여 살펴본다. 혼합모형에서는 t-분포와 일반화최소제곱추정량을 사용하여 신뢰구간을 구할 수 있는데, 일반적으로 분산성분을 알 수 없기 때문에 분산성분을 반드시 추정하여야만 한다. 이 경우 분산성분의 추정량으로 가장 많이 사용되는 추정량들인 Henderson의 방법 III 추정량, 사전추측값이 1인 MINQUE 추정량, MLE(최우추정량), REMLE(제한최우추정량)를 이용하여 분산행렬을 추정하고, 신뢰구간의 포함범위확률과 평균길이를 모의실험을 통하여 살펴본다. 모의실험의 결과는 4가지 추정량 모두 비슷한 신뢰구간의 포함범위확률과 평균길이를 갖는 것으로 판명되었다.

1. 서론

선형모형이론은 주로 고정효과모형을 기초로 논의되고 이용되어 왔으나 컴퓨터 하드웨어 및 소프트웨어의 눈부신 발전으로 혼합모형을 이용하여 자료를 분석하고 해석하고자 하는 필요성이 급격하게 대두되고 있다. 혼합모형의 중요 연구과제중의 하나는 고정효과의 추정가능한(estimable) 함수에 대한 신뢰구간에 관한 연구라고 할 수 있는 데, 연구자들은 관심을 가지고 있는 처리효과들 간의 차이에 대한 최적의 추정량과 표준오차를 구하고자 한다. 분산성분이 알려져 있는 혼합모형에 있어서 고정효과의 추정가능한 함수에 대한 분석은 일반화최소제곱추정량을 이용하여 쉽게 분석할 수 있다. 하지만 대부분의 경우는 분산성분을 알 수가 없기 때문에 분산성분을 추정하고, 또한 사용된 방법도 추정된 분산성분을 이용하기 때문에 통계적 최적성을 보장할 수 없다.

본 논문에서는 이원혼합모형에서 고정효과의 추정가능한 함수에 대한 신뢰구간을 구하는 경우에 분산성분추정량의 선택이 어떤 역할을 하는지를 살펴보고자 한다. 구체적인 방법으로 교호작용이 없는 이원혼합모형과 이원지분혼합모형에서 처리효과의 차이에 대한 신뢰구간을 Henderson의 방법 III 추정량, 사전추측값이 1인 MINQUE 추정량, MLE(최우추정량), REMLE(제한최우추정량)를 이용하여 추정하고, 모수의 참값을 포함하는 포함범위확률(coverage probability)과 평균길이를 비교하여 고정효과와 랜덤효과의 수준의 수, 오차분산에 대한 랜덤효과들의 분산성분의 비율, 대비의 종류, 자료의 불균형정도가 다른 경우에 어떤 분산성분추정량을 사용하는 것이 좋은지를 알아보고자 한다. 본 논문의 구성은 2절에서는 혼합모형과 4가지 분산성분추정량에 대하여 간략하게 서술하고, 3절에서는 모의실험의 디자인및 과정 그리고 그 결과에 대하여 서술한다. 끝으로 4절에

1) 이 연구는 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음
2) (140-714) 서울시 용산구 한남동 산8번지 단국대학교 전산통계학과 교수

서는 본 연구의 결론이 주어진다.

2. 혼합모형 및 분산성분추정량

이 절에서는 혼합모형과 모의실험에 고려된 분산성분추정량의 종류에 대하여 언급하기로 한다. 혼합모형과 분산성분추정량에 대하여 보다 자세한 내용은 Searle(1971,1987)과 Rao와 Kleffe (1988)의 책에서 찾아 볼 수 있다.

2.1 혼합모형

일반적으로 혼합모형은 다음과 같이 서술할 수 있는데,

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + Z\underline{\gamma} + \underline{e} \tag{2.1}$$

여기서 $\underline{y}$는 알려진 $n \times 1$ 자료벡터, X는 계수 $r(X) = r(r < p)$인 고정효과에 관련된 $n \times p$ 계획행렬, Z는 랜덤효과에 관련된 $n \times q$ 계획행렬, $\underline{\beta}$는 고정효과로 언급되는 $p \times 1$ 열벡터, $\underline{\gamma}$는 랜덤효과로 언급되는 $q \times 1$ 열벡터, 그리고 $\underline{e}$는 $n \times 1$ 오차벡터이다. 또한 $\underline{\gamma}$에 포함된 랜덤효과들에 대응되는 분산성분들을 표시하기 위하여 $\underline{\gamma}$를 c개의 부분벡터 $\underline{\gamma}' = (\underline{\gamma_1}' | \underline{\gamma_2}' | \cdots | \underline{\gamma_c}')$과 같이 분할하고 $\underline{\gamma_i}$에 대응되는 계획행렬을 Z_i로 두면 식(2.1)을 다음과 같은 식(2.2)로 표현할 수 있다.

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + Z_1\underline{\gamma}_1 + Z_2\underline{\gamma}_2 + \cdots + Z_c\underline{\gamma}_c + \underline{e}. \tag{2.2}$$

식(2.2)에서 Z_i의 차수는 $n \times m_i$, $\underline{\gamma}_i$는 $m_i \times 1$ 열벡터이며 $q = \sum_{i=1}^{c} m_i$이다. 아울러 식(2.2)의 분포에 관한 성질은 다음과 같은 가정이 성립한다고 한다.

$$\underline{\gamma}_i \sim N(0, \sigma_i^2 I_{m_i}), \tag{2.3}$$

$$\underline{e} \sim N(0, \sigma_e^2 I_n), \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Cov}(\underline{\gamma}_i, \underline{\gamma}_j) = 0, \quad \forall i \neq j \tag{2.5}$$

$$\mathrm{Cov}(\underline{\gamma}_i, \underline{e}') = 0. \tag{2.6}$$

여기서 I_{m_i}은 차수가 $m_i \times m_i$인 항등행렬이며, I_n은 차수가 $n \times n$인 항등행렬이고 따라서 $\underline{y}$는 평균이 $X\underline{\beta}$이고 분산행렬이 $H = \sigma_e^2 I_n + \sum_{i=1}^{c} \sigma_i^2 Z_i Z_i'$인 다변량정규벡터이다.

만일 $\underline{\lambda}'\underline{\beta}$가 추정가능한 함수라면, $\underline{\beta}$의 최소제곱추정량 $\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-}X'\underline{y}$를 이용한 $\underline{\lambda}'\hat{\underline{\beta}}$은 더이상 $\underline{\lambda}'\underline{\beta}$의 최량선형불편추정량(BLUE)이 되지 않으며, 여기서 $(X'X)^{-}$는 $(X'X)$의 일반화역행렬, 이 경우 $\underline{\lambda}'\underline{\beta}$의 BLUE는 $\underline{\lambda}'\tilde{\underline{\beta}}$, $\tilde{\underline{\beta}} = (X'H^{-1}X)^{-}X'H^{-1}\underline{y}$이 된다. 한편 $\underline{\lambda}'\tilde{\underline{\beta}}$의 기대값과 분산은 각각 $E(\underline{\lambda}'\tilde{\underline{\beta}}) = \underline{\lambda}'\underline{\beta}$, $\mathrm{Var}(\underline{\lambda}'\tilde{\underline{\beta}}) = \underline{\lambda}'(X'H^{-1}X)\underline{\lambda}$이 성립하기 때문에 추정가능한 함수 $\underline{\lambda}'\underline{\beta}$의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음 식(2.7)과 같이 구할 수 있다.

$$\underset{\sim}{\lambda}'\hat{\underset{\sim}{\beta}} \pm t(n-r, \alpha/2)\sqrt{\underset{\sim}{\lambda}'(X'H^{-1}X)\underset{\sim}{\lambda}}. \tag{2.7}$$

하지만 식(2.7)의 분산행렬 H에 포함된 분산성분 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots \sigma_c^2, \sigma_e^2$은 미지의 모수이기 때문에 주어진 자료를 이용하여 분산성분을 추정하고, 이를 분산행렬 H에 대입하여 구한 $\hat{H}$를 이용한 다음 식(2.8)을 사용하게 된다.

$$\underset{\sim}{\lambda}'\hat{\underset{\sim}{\beta}}_g \pm t(n-r, \alpha/2)\sqrt{\underset{\sim}{\lambda}'(X'\hat{H}^{-1}X)\underset{\sim}{\lambda}}, \tag{2.8}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_g = (X'\hat{H}^{-1}X)^{-1}X'\hat{H}^{-1}\underset{\sim}{y}. \tag{2.9}$$

한편 자료가 균형적인 경우에는 식(2.8)에서 $t(n-r, \alpha/2)$를 사용하는 것은 옳으나, 자료가 불균형적인 되면 식(2.8)는 t-분포의 자유도가 달라지기 때문에 단지 근사신뢰구간이 된다. 따라서 많은 학자들이 t-분포의 자유도를 조절하는데 관심을 가지고 있으나, 현재까지 혼합모형에서 완전하게 해결되지 않은 과제로 남아 있다. 자료가 불균형적인 경우에 t-분포의 자유도는 추정되어져야 할 모수인데, 일반적으로 사용되는 방법은 2가지이다. 첫째는 Satterthwaite 절차를 이용하여 구하는 방법인데, MLE 또는 REMLE는 역정보행렬로부터 알 수 있는 대표본 분산행렬을 이용하면 이와 같은 접근이 가능하나 일반적으로 Henderson의 방법과 같은 분산분석추정량이나 MINQUE는 분산성분추정량의 분포를 알 수 없기 때문에 이 방법을 사용하기가 어렵다. 특수한 혼합모형에 대하여 Satterthwaite 절차를 이용한 몇 가지 예는 불완비 블록계획인 경우에 Giesbrecht(1986), 일원변량모형인 경우에 Jeske와 Harville(1988)의 결과가 알려져 있다. 둘째는 불균형자료인 경우에도 식(2.8)의 자유도를 그냥 사용하는 방법인데, 쉽게 처리효과의 신뢰구간을 구할 수 있다는 장점은 있지만, 정확도가 떨어진다고 할 수 있다. 본 논문에서는 후자의 방법을 사용하여 모의실험을 하려고 한다. 왜냐하면 모의실험에 고려된 자료가 소표본이기 때문에 대표본이론에 근거한 전자의 방법이 잘 맞지 않을뿐더러 Henderson의 방법 III 추정량과 MINQUE에 대하여서는 자유도를 어떻게 정하여야 하는 것이 이상적이라는 결과가 아직 밝혀지지 않았기 때문이다.

2.2 고려된 추정량들

혼합모형에서 분산성분을 추정하는 경우에 자료가 균형적인 경우에는 오차벡터와 랜덤효과가 정규분포를 따른다는 가정아래에서 ANOVA 추정량은 최소분산불편추정량이 되기 때문에 일반적으로 가장 많이 사용되고 있으나, 불균형자료가 되면 ANOVA 추정량은 불편추정량이기는 하나 최소분산을 갖는 추정량이 되지는 못한다. 불균형자료에 대한 분산성분의 추정에 대한 시발점이며 가장 유명한 논문의 하나는 Henderson(1953)의 연구이다. 그는 불균형자료인 경우에 서로 상이한 3가지 방법을 사용하여 균형자료처럼 분산분석방법을 이용하였는데, 3가지 방법중 혼합모형에 적용이 가능한 것은 Henderson의 방법 III이다. 이 방법은 구해진 추정량은 모두 불편추정량이다는 장점은 있지만 다른 바람직한 통계적 성질이 밝혀진 것은 아직 없고, 또한 추정에 사용되는 관측치의 선형독립인 이차형식을 선택하는 방법이 많이 있기 때문에 구하여지는 추정량은 유일하지 않으며 여러가지 추정량중에서 어느 것을 사용하는 것이 가장 좋다는 것도 알려져 있지 않다. 이러한 이유로 많은 통계학자들은 불편성이외의 다른 통계적 최적성을 보장하는 방법들을 연구하였는데, 1967년부터 1972년까지 분산성분의 추정에 대하여 분산분석추정량의 아류보다 훨씬 이론적으로 잘 정립되어있는 추정량들이 제안되었다. 이 기간에 발표되어진 대표적인 분산성분추정량을 소개하면 Hartley와 J.N.K.Rao(1967)의 MLE(최우추정량), C.R.Rao(1971)의 MINQUE(최소노옴불

편추정량) 그리고 Patterson과 Thompson(1972)의 REMLE(제한최우추정량)이다. 세가지 추정량을 간단하게 소개하면 MLE는 혼합모형의 랜덤효과와 오차항이 정규분포를 따른다는 가정아래에서 분산성분을 최우추정법을 이용하여 구한다. REMLE 역시 혼합모형의 랜덤효과와 오차항이 정규분포를 따른다는 가정을 이용하기 때문에 MLE와 비슷하나, 고정효과 부분과 랜덤효과 부분을 따로 분리하여 추정하는 방법을 사용하는 것이 다르다. MINQUE는 관측치의 이차형식으로 표시되는 불편추정량중에서 노움을 가장 작게 하는 추정량을 의미하는 데, 랜덤효과와 오차항의 분포와 무관하게 사용될 수 있다는 장점이 있으나, 분산성분의 추측값을 사용하여야 하는 단점도 있다. 한편 MINQUE와 REMLE는 서로 밀접한 관련성이 있는 데, REMLE의 첫번째 단계의 값이 하나의 MINQUE 추정치가 될 수 있다.

위의 4가지 방법중 어느 추정량이 가장 좋은가 하는 질문은 통계학자들이 가장 빈번하게 하는 질문이다. 물론 4가지 추정량중 어떤 추정량을 사용하는 것이 가장 바람직하다는 것은 분석자의 선택이나, Searle(1988)은 REMLE 또는 MLE를 사용하는 것이 바람직하다는 이유를 상세하게 밝혔다. 확실히 REMLE와 MLE는 효율성, 충분성, 일치성, 근사정규성과 같은 좋은 성질들을 가질 수 있다. 하지만 Schall(1991)의 논문에 소개되어 있는 예를 살펴보면, 크기가 큰 실제 자료를 이용하여 MIVQUE0와 REMLE을 이용하여 분산성분을 추정하는 데, MIVQUE0는 28.64초가 걸린 반면 REMLE는 무려 91.44시간이 걸렸다고 한다. MIVQUE0는 분산성분을 추정하는 데 가장 빨리 추정값을 제공하는 방법으로 알려져 있으나 본질적으로 계산과정에서 반복이 필요하지 않으므로 Henderson의 방법 III과 비슷한 계산시간을 가질 것으로 예상되며, MLE는 REMLE과 비슷한 계산시간이 필요할 것으로 간주되는 데, 만일 사용자의 관심사에서 분산성분추정량의 종류에 크게 의존하지 않으면 REMLE 또는 MLE를 사용할 필요가 없는 것이다. 따라서 사용자는 엄청난 비용과 시간투자를 하지 않기 위하여 혼합모형의 주관심사에 대한 최적의 결과를 먼저 알아야 할 필요가 있다. 이 점이 본 연구를 수행하는 중요한 목적이라고 할 수 있다.

3. 모의실험

3.1 모의실험계획

모의실험에서는 고정인자가 한개인 이원혼합모형인 경우에 2가지 종류의 혼합모형을 고려하였는데, 2가지 모형은 교호작용이 없는 이원혼합모형, 이원지분혼합모형이며 각 효과들의 수준의 수, 오차항의 분산성분에 대한 랜덤효과에 관련된 분산성분의 비율, 그리고 자료의 불균형정도를 고려하였다.

<u>모형 1: 교호작용이 없는 이원혼합모형</u>

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}.$$

$$i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b; \quad k = 1, 2, \cdots, n_{ij};$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_\beta^2); \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2); \quad \beta_j, \varepsilon_{ijk}: \text{ 서로 독립}$$

디자인: $(a,b) = (3,5)$, $(a,b) = (5,3)$.

$$
\begin{aligned}
UD35A &= (2,2,3,2,2;\ 3,3,4,3,3;\ 4,4,4,4,3),\\
UD35B &= (2,3,4,3,5;\ 2,3,6,4,5;\ 3,5,4,3,6),\\
UD35C &= (1,2,3,4,5;\ 6,7,8,9,10;\ 11,12,13,14,15).\\
UD53A &= (2,2,3;\ 2,2,3;\ 3,4,3;\ 3,4,4;\ 4,4,3),\\
UD53B &= (2,3,4;\ 3,5,2;\ 3,6,4;\ 5,3,5;\ 4,3,6),\\
UD53C &= (1,2,3;\ 4,5,6;\ 7,8,9;\ 10,11,12;\ 13,14,15).
\end{aligned}
$$

위에 기술된 디자인이름 UD뒤의 35와 53은 각각 $(a,b)=(3,5)$와 $(a,b)=(5,3)$을 의미한다. 한편 불균형정도는 상대적인 세가지 경우로 정의하였는데, 세가지 타입의 디자인 A, B, C중 A는 디자인 B와 C보다 불균형정도가 약하고, B는 A보다는 불균형정도가 심하나 C보다는 약하고, C로 표시된 디자인은 불균형정도가 다른 두 디자인 A, B보다 심한 디자인이다. 그리고 각 디자인이름 뒤에 표시되어 있는 괄호안의 숫자는 각 셀당 자료의 개수를 표시한 것으로 사용되었는데, 예를 들면 UD35의 괄호는 $UD35=(n_{11}, n_{12}, n_{13}\, n_{14}, n_{15};\cdots; n_{31}, n_{32}, n_{33}\, n_{34}, n_{35})$의 의미로 사용되어졌다. 다음은 모형1에 대하여 모의실험에 사용된 고정효과의 조건, 랜덤효과의 조건, 대비의 조건, 신뢰구간을 구하는 데 사용되는 신뢰수준의 값을 요약 정리한 결과이다.

① 고정효과에 대한 조건:

- 디자인 UD35인 경우: $\mu=0;\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=-2.$
- 디자인 UD53인 경우: $\mu=0;\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=1,\ \alpha_4=1,\ \alpha_5=-4.$

② 랜덤효과에 대한 조건: $\sigma^2_\beta/\sigma^2_\varepsilon = 0.5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8;\quad \sigma^2_\varepsilon = 1.$

③ $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$에 대한 c_i의 값:

- 디자인 UD35인 경우:
  대비1: $c_1=2,\ c_2=-1,\ c_3=-1.$ 대비2: $c_1=1,\ c_2=-7,\ c_3=6.$
- 디자인 UD53인 경우:
  대비1: $c_1=1,\ c_2=-1,\ c_3=1,\ c_4=-2,\ c_5=1.$
  대비2: $c_1=1,\ c_2=-7,\ c_3=5,\ c_4=7,\ c_5=-6.$

④ 신뢰수준의 선택: 95% 및 90%

<u>모형 2: 이원지분 혼합모형</u>

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}.$$

$$i = 1, 2, \cdots, a;\quad j = 1, 2, \cdots, b_i;\quad k = 1, 2, \cdots, n_{ij};$$

$$\beta_{j(i)} \sim N(0,\sigma^2_\beta);\quad \varepsilon_{k(ij)} \sim N(0,\sigma^2_\varepsilon);\quad \beta_{j(i)},\ \varepsilon_{k(ij)}: \text{서로 독립}$$

$$\sigma^2_\beta/\sigma^2_\varepsilon = 0.5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8;\quad \sigma^2_\varepsilon = 1.$$

디자인: $a = 3.$

$$\begin{aligned} \text{ND3A} &= (2,\ 3,\ 4 : 1,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6), \\ \text{ND3B} &= (2,\ 3,\ 4 : 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3), \\ \text{ND3C} &= (1,\ 5,\ 8 : 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8), \\ \text{ND3D} &= (1,\ 5,\ 8 : 2,\ 3,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4). \end{aligned}$$

모형2는 이원지분 혼합모형으로 불균형정도를 나타내기 위하여 사용된 디자인은 두 인자 b_i와 n_{ij}를 동시에 고려한 $(b_1, b_2, \cdots, b_i : n_{11}, n_{12}, \cdots, n_{ab_a})$로 표기하였다. 따라서 디자인 ND3A와 ND3B는 ND3C과 ND3D와 비교하여 b_i에 대하여 상대적으로 불균형정도가 약하며, ND3B와 ND3D는 ND3A와 ND3C에 비하여 n_{ij}에 대하여 상대적으로 불균형정도가 약한 디자인이다. 그리고 모형2에 대하여 모의실험에 사용된 고정효과의 조건, 랜덤효과의 조건, 대비의 조건, 신뢰구간을 구하는 데 사용되는 신뢰수준의 값은 모형1의 디자인 UD35인 경우와 동일한 조건을 사용하였다.

3.2 모의실험의 과정

고려된 4가지 추정량은 통계패키지 SAS의 행렬계산 모듈 IML을 이용하여 계산되어졌다. Henderson의 방법 III 추정량은 이원혼합모형인 경우에 Searle(1971)의 11장에 서술되어 있는 식을 사용하였으며, 나머지 3가지 추정량은 행렬과 벡터를 이용하여 프로그램을 작성하여 구하였다. 모의실험에 필요한 정규분포난수는 통계패키지 SAS의 난수생성함수 RANNOR를 사용하였으며, MINQUE 추정량은 분산성분비율의 사전추측값을 1이라고 두고 구하였다. 한편 REMLE와 MLE를 구하는 경우에 두 추정량 모두 반복수렴해이기 때문에 수렴판정의 기준은 10^{-8}이하, 수렴조건을 만족하기 위한 최대반복횟수는 30번으로 제한하였다. 따라서 수렴조건을 만족하지 않는 경우에는 신뢰구간의 포함범위확률과 평균길이를 구하는데 제외되었다. 또한 분산행렬의 역행렬의 계산이 가능하도록 Henderson의 방법 III 추정량인 경우에 추정치의 값이 음수가 되는 경우에는 음수의 값을 모두 0으로 대체하였다.

두가지 모형에 대한 3.1절에서 고려한 여러 가지 디자인에 대하여 각각 3000개의 자료가 생성되었다. 자료의 개수 3000개는 95% 신뢰도로 추정하는 경우에 오차의 한계가 대략 0.78% 이내가 되는 표본의 크기이다. 다음은 모형1과 모형2에 대한 모의실험의 결과를 정리한 것이다.

3.3 모의실험의 결과

[표3.1]과 [표3.2]는 각각 모형1에 대한 4가지 추정량을 이용하여 추정한 95% 신뢰구간의 포함범위확률과 평균길이의 값을 각각 보여준다. 추정량의 종류에서 HEN은 Henderson III 추정량, MIN은 MINQUE, REM은 REMLE, MLE는 MLE를 의미하며, 모의실험의 결과를 통하여 알 수 있는 중요한 사실은 다음과 같다.

[1] 모형1에 대한 결과

고려된 4가지 추정량을 사용하여 구한 95% 신뢰구간의 포함범위확률과 평균길이는 모든 디자인에서 거의 비슷하다. 신뢰구간의 포함범위확률인 경우에 대비의 종류, 고정효과와 랜덤효과의 수

준의 값, 디자인의 불균형정도는 큰 영향을 주지 않는 것으로 나타났으나, 신뢰구간의 평균길이는 같은 셀의 개수인 경우에 랜덤효과의 수준의 값이 큰 쪽(UD35 디자인)이 작은 쪽(UD53 디자인)보다 값이 작게 나타났으며, 불균형정도의 효과는 신뢰구간의 포함범위확률보다 평균길이에 영향을 많이 미치는 것으로 나타났다. 한편 신뢰구간의 정확도는 분산성분의 비율값이 증가할수록 신뢰수준에 비하여 포함범위확률이 현저하게 떨어진다.

[표3.1] 모형1에 대한 추정된 95% 신뢰구간의 포함범위확률

실험계획	비율값	95% 포함범위확률 (대비1)				95% 포함범위확률 (대비2)			
		HEN	MIN	REM	MLE	HEN	MIN	REM	MLE
UD35A	0.5	0.9033	0.9033	0.9030	0.9037	0.9057	0.9057	0.9057	0.9063
	1	0.8427	0.8427	0.8423	0.8420	0.8423	0.8413	0.8420	0.8420
	2	0.7427	0.7427	0.7427	0.7427	0.7513	0.7510	0.7513	0.7510
	4	0.6267	0.6267	0.6270	0.6267	0.6380	0.6383	0.6380	0.6383
	8	0.4887	0.4887	0.4887	0.4873	0.5053	0.5053	0.5053	0.5053
UD35B	0.5	0.9003	0.9003	0.9003	0.9003	0.8980	0.8977	0.8983	0.8990
	1	0.8457	0.8447	0.8453	0.8447	0.8467	0.8463	0.8460	0.8457
	2	0.7500	0.7503	0.7500	0.7503	0.7613	0.7610	0.7623	0.7623
	4	0.6337	0.6337	0.6340	0.6337	0.6223	0.6223	0.6227	0.6227
	8	0.4983	0.4983	0.4987	0.4990	0.4907	0.4910	0.4913	0.4917
UD35C	0.5	0.8933	0.8933	0.8933	0.8927	0.8967	0.8967	0.8967	0.8967
	1	0.8310	0.8317	0.8303	0.8317	0.8437	0.8437	0.8440	0.8437
	2	0.7493	0.7497	0.7493	0.7507	0.7677	0.7680	0.7677	0.7677
	4	0.6240	0.6230	0.6250	0.6233	0.6187	0.6187	0.6187	0.6187
	8	0.4980	0.4977	0.4980	0.4963	0.4867	0.4867	0.4867	0.4870
UD53A	0.5	0.8970	0.8973	0.8970	0.8980	0.8990	0.8990	0.8990	0.8990
	1	0.8540	0.8540	0.8543	0.8533	0.8450	0.8450	0.8450	0.8453
	2	0.7640	0.7640	0.7640	0.7643	0.7643	0.7643	0.7643	0.7643
	4	0.6347	0.6343	0.6347	0.6337	0.6303	0.6300	0.6303	0.6317
	8	0.5047	0.5043	0.5047	0.5037	0.4980	0.4980	0.4980	0.4987
UD53B	0.5	0.8997	0.8997	0.8997	0.9000	0.9057	0.9057	0.9057	0.9043
	1	0.8533	0.8530	0.8533	0.8540	0.8483	0.8483	0.8483	0.8480
	2	0.7597	0.7597	0.7597	0.7593	0.7470	0.7470	0.7470	0.7473
	4	0.6253	0.6253	0.6250	0.6250	0.6477	0.6477	0.6480	0.6477
	8	0.4997	0.4997	0.4997	0.4977	0.4933	0.4933	0.4927	0.4937
UD53C	0.5	0.8963	0.8963	0.8963	0.8963	0.8870	0.8870	0.8870	0.8870
	1	0.8390	0.8390	0.8390	0.8390	0.8297	0.8297	0.8297	0.8297
	2	0.7480	0.7477	0.7480	0.7473	0.7443	0.7443	0.7443	0.7443
	4	0.6200	0.6200	0.6200	0.6217	0.6177	0.6177	0.6177	0.6177
	8	0.4927	0.4927	0.4927	0.4933	0.5060	0.5060	0.5060	0.5060

[표3.3]과 [표3.4]는 각각 모형2에 대한 4가지 추정량을 이용하여 추정한 95% 신뢰구간의 포함범위확률과 평균길이의 값을 각각 보여준다. 아울러 [표3.3]과 [표3.4]를 통하여 알 수 있는 중요한 결론들은 다음과 같다.

[2] 모형2에 대한 결과

전체적으로 모형1에 비해서는 포함범위확률과 평균길이의 차이가 다소 발생하였으나, 그 차이는 크지 않다. 그리고 모형1과 같이 어느 추정량을 사용하여 구한 신뢰구간이 이상적인가 하는 질문에 답을 하기도 어려울 만큼 부분적으로만 특정추정량의 우월성이 드러날 뿐이다. 비율값이 0.5와 1인 경우에는 대비1, 2 모두 MINQUE와 REMLE가 포함범위확률이 높고, 그다음이 MLE이며 Henderson의 추정량 III의 순서로 나타난다. 또한 b_i의 불균형정도와 n_{ij}의 불균형정도도 포함범위확률과 평균길이에는 큰 영향을 미치지 않는 것으로 나타났으며, 대비조건의 효과는 포함범위확률

[표3.2] 모형1에 대한 추정된 95% 신뢰구간의 평균길이

실험계획	비율값	95% 평균길이 (대비1)				95% 평균길이 (대비2)			
		HEN	MIN	REM	MLE	HEN	MIN	REM	MLE
UD35A	0.5	2.7913	2.7913	2.7913	2.7912	9.0642	9.0642	9.0642	9.0637
	1	2.7913	2.7913	2.7913	2.7912	9.0641	9.0641	9.0641	9.0636
	2	2.7913	2.7913	2.7913	2.7912	9.0642	9.0642	9.0642	9.0636
	4	2.7913	2.7913	2.7913	2.7912	9.0641	9.0641	9.0641	9.0635
	8	2.7913	2.7913	2.7913	2.7912	9.0641	9.0641	9.0641	9.0635
UD35B	0.5	2.3128	2.3128	2.3128	2.3127	8.2499	8.2501	8.2499	8.2455
	1	2.3128	2.3128	2.3128	2.3127	8.2499	8.2503	8.2498	8.2454
	2	2.3128	2.3128	2.3128	2.3127	8.2498	8.2502	8.2497	8.2452
	4	2.3128	2.3128	2.3128	2.3127	8.2506	8.2509	8.2504	8.2459
	8	2.3128	2.3128	2.3128	2.3127	8.2495	8.2498	8.2495	8.2451
UD35C	0.5	2.1967	2.1967	2.1967	2.1960	5.3809	5.3809	5.3809	5.3809
	1	2.1966	2.1966	2.1966	2.1959	5.3809	5.3809	5.3809	5.3809
	2	2.1968	2.1968	2.1968	2.1961	5.3809	5.3809	5.3809	5.3809
	4	2.1966	2.1966	2.1966	2.1959	5.3809	5.3809	5.3809	5.3809
	8	2.1967	2.1967	2.1967	2.1960	5.3809	5.3809	5.3809	5.3809
UD53A	0.5	3.7034	3.7034	3.7034	3.7030	16.837	16.837	16.837	16.836
	1	3.7034	3.7034	3.7034	3.7030	16.837	16.837	16.837	16.836
	2	3.7033	3.7033	3.7033	3.7030	16.837	16.837	16.837	16.836
	4	3.7033	3.7033	3.7033	3.7030	16.837	16.837	16.837	16.836
	8	3.7034	3.7034	3.7034	3.7031	16.838	16.838	16.838	16.836
UD53B	0.5	3.4330	3.4330	3.4330	3.4316	15.107	15.107	15.107	15.099
	1	3.4329	3.4329	3.4329	3.4316	15.106	15.106	15.106	15.099
	2	3.4329	3.4329	3.4329	3.4316	15.106	15.106	15.106	15.099
	4	3.4332	3.4332	3.4332	3.4318	15.108	15.108	15.108	15.100
	8	3.4330	3.4330	3.4330	3.4317	15.107	15.107	15.107	15.100
UD53C	0.5	2.5677	2.5677	2.5677	2.5676	10.344	10.344	10.344	10.344
	1	2.5677	2.5677	2.5677	2.5676	10.344	10.344	10.344	10.344
	2	2.5678	2.5678	2.5678	2.5676	10.344	10.344	10.344	10.344
	4	2.5677	2.5677	2.5677	2.5676	10.344	10.344	10.344	10.344
	8	2.5677	2.5677	2.5677	2.5676	10.344	10.344	10.344	10.344

[표3.3] 모형2에 대한 추정된 95% 신뢰구간의 포함범위확률

실험계획	비율값	95% 포함범위확률 (대비1)				95% 포함범위확률 (대비2)			
		HEN	MIN	REM	MLE	HEN	MIN	REM	MLE
ND3A	0.5	0.9160	0.9410	0.9409	0.9242	0.9133	0.9383	0.9344	0.9192
	1	0.8517	0.8913	0.8815	0.8607	0.8557	0.8930	0.8886	0.8661
	2	0.7647	0.8123	0.8031	0.7786	0.7607	0.8077	0.7974	0.7699
	4	0.6840	0.7133	0.7086	0.6775	0.6613	0.6983	0.6929	0.6561
	8	0.5620	0.5573	0.5493	0.5204	0.5527	0.5650	0.5588	0.5147
ND3B	0.5	0.9167	0.9353	0.9360	0.9240	0.9083	0.9340	0.9337	0.9183
	1	0.8610	0.8963	0.8967	0.8750	0.8427	0.8807	0.8823	0.8580
	2	0.7693	0.8150	0.8157	0.7910	0.7800	0.8270	0.8253	0.7987
	4	0.6503	0.7017	0.7003	0.6653	0.6597	0.7090	0.7090	0.6757
	8	0.5093	0.5543	0.5503	0.5217	0.5180	0.5663	0.5663	0.5253
ND3C	0.5	0.8983	0.9070	0.9059	0.9039	0.9050	0.9230	0.9196	0.9139
	1	0.8337	0.8460	0.8447	0.8406	0.8517	0.8813	0.8755	0.8666
	2	0.7570	0.7730	0.7688	0.7637	0.7590	0.7850	0.7812	0.7663
	4	0.6333	0.6350	0.6330	0.6290	0.6533	0.6570	0.6527	0.6377
	8	0.5277	0.4993	0.4953	0.4892	0.6010	0.5310	0.5244	0.5078
ND3D	0.5	0.9073	0.9230	0.9243	0.9160	0.9067	0.9290	0.9303	0.9200
	1	0.8560	0.8833	0.8820	0.8719	0.8477	0.8787	0.8780	0.8639
	2	0.7647	0.7970	0.7930	0.7806	0.7530	0.7957	0.7957	0.7769
	4	0.6487	0.6823	0.6820	0.6613	0.6323	0.6673	0.6653	0.6490
	8	0.5157	0.5427	0.5380	0.5233	0.5167	0.5483	0.5473	0.5273

[표3.4] 모형2에 대한 추정된 95% 신뢰구간의 평균길이

실험계획	비율값	95% 평균길이 (대비1)				95% 평균길이 (대비2)			
		HEN	MIN	REM	MLE	HEN	MIN	REM	MLE
ND3A	0.5	4.1204	4.8282	4.7285	4.2871	12.312	14.540	14.226	12.835
	1	4.1218	4.8017	4.7237	4.2790	12.316	14.456	14.211	12.810
	2	4.1416	4.8200	4.7347	4.2762	12.378	14.514	14.245	12.800
	4	4.2826	4.7768	4.6910	4.2715	12.819	14.377	14.107	12.786
	8	4.6156	4.8341	4.7457	4.2839	13.863	14.558	14.280	12.825
ND3B	0.5	4.2238	4.8832	4.8787	4.4748	13.143	15.247	15.233	13.945
	1	4.2241	4.8578	4.8483	4.4462	13.144	15.167	15.136	13.853
	2	4.2275	4.8612	4.8545	4.4600	13.155	15.177	15.156	13.898
	4	4.2573	4.8634	4.8545	4.4575	13.251	15.184	15.156	13.890
	8	4.3473	4.9124	4.9006	4.4783	13.538	15.341	15.303	13.956
ND3C	0.5	8.0971	8.3374	8.2934	8.1971	8.4586	9.2574	9.1195	8.8022
	1	8.0972	8.3483	8.3009	8.2032	8.4590	9.2889	9.1416	8.8218
	2	8.1080	8.3351	8.2983	8.2013	8.4966	9.2498	9.1356	8.8173
	4	8.2714	8.3408	8.2976	8.1985	9.0416	9.2696	9.1358	8.8087
	8	8.8414	8.3280	8.2867	8.1930	10.843	9.2276	9.0988	8.7899
ND3D	0.5	5.9213	6.4394	6.4262	6.1810	9.8773	10.963	10.936	10.425
	1	5.9213	6.4463	6.4279	6.1859	9.8773	10.976	10.938	10.435
	2	5.9222	6.4624	6.4428	6.1918	9.8792	11.011	10.970	10.448
	4	5.9381	6.4435	6.4277	6.1858	9.9135	10.972	10.939	10.435
	8	6.0470	6.4508	6.4298	6.1830	10.147	10.987	10.943	10.429

보다 평균길이인 경우에 크게 나타났다. 평균길이는 두가지 대비중 대비계수의 차이가 작은 대비1보다 차이가 큰 대비2가 크게 나타났는데, 대비2가 대비1보다 분산이 크기 때문에 대비의 분산은 평균길이에 영향을 미친다고 할 수 있겠다.

한편 본 논문에는 기술되어 있지는 않지만 모형1에 교호작용을 첨가한 모형도 고려하여 보았으나 결과는 모형1에 대한 결과와 거의 유사한 형태로 나타났으며, 고려된 모형에 대한 모수의 제약조건 및 신뢰수준의 값을 90%로 바꾸어서 모의실험을 한 경우도 [표3.1]에서 [표3.4]의 경향과 거의 비슷하게 나타났다. 따라서 주관심사인 고려된 4가지 종류의 분산성분추정량이 신뢰구간에 미치는 영향은 거의 비슷하다는 결론을 내릴 수 있었다.

4. 결론

이원혼합모형에서 고정효과의 추정가능한 함수에 대한 신뢰구간을 구하는 경우에 분산성분추정량이 미치는 영향을 일반적으로 많이 사용되는 2가지 이원혼합모형에 대하여 모의실험을 통하여 살펴보았다. 그 결과 결론적으로 4가지 추정량 모두 비슷한 신뢰구간에 대한 포함범위확률과 평균길이를 갖는 것으로 판명되었다. 고려된 모의실험의 결과를 통하여 보면 분산성분추정량의 영향이 거의 없기 때문에 다원혼합모형에서도 비슷한 결과가 성립할 것으로 간주된다. 하지만 이와 같은 주장은 단지 제한된 이원혼합모형과 모의실험결과의 해석일 뿐이기 때문에 일반적인 혼합모형에 있어서 분산성분추정량이 신뢰구간에 미치는 영향에 대한 보다 폭넓은 연구가 이론 및 모의실험을 통하여 진행되어져야 하겠다.

참 고 문 헌

[1] Giesbrecht, F. G. (1986). Analysis of Data from Incomplete Block Designs, *Biometrics,* Vol. 42, 437-448.

[2] Hartley, H. O. and Rao, J. N. K. (1967). Maximum Likelihood Estimation for the Mixed Analysis of Variance Model, *Biometrika,* Vol. 54, 93-108.

[3] Henderson, C. R. (1953). Estimation of Variance and Covariance Components, *Biometrics,* Vol. 9, 226-252.

[4] Jeske, D. R. and Harville, D. A. (1988). Prediction Interval Procedures and Confidence Interval Procedures for Mixed Linear Models, *Commun. Statist. - Theor. Meth.*, Vol. 17(4), 1053-1087.

[5] Patterson, H. D. and Thompson, R. (1971). Recovery of Interblock Information When Block Sizes are Unequal, *Biometrika,* Vol. 58, 545-554.

[6] Rao, C. R. (1971). Estimation of Variance Components - MINQUE Theory, *Journal of Multivariate Analysis,* Vol. 1, 257 - 275.

[7] Rao, C. R. and Kleffe, J. (1988). *Estimation of Variance Components and Applications,* Amsterdam: North-Holland.

[8] Schall, M. (1991). Some Motivation and Comments on Statistical Supercomputing, *SAS Users Group International 16,* 858-860.

[9] Searle, S. R. (1971), *Linear Models,* John Wiley & Sons, New York.

[10] Searle, S. R. (1987). *Linear Models for Unbalanced Data,* John Wiley & Sons, New York.

[11] Searle, S. R. (1988). Mixed Models and Unbalanced Data: Wherefrom, Whereat and Whereto?. *Commun. Statist. - Theor. Meth.*, Vol. 17(4), 935-968.