The Korean Communications
in Statistics Vol. 5, No. 2, 1998
pp. 383-389

임의 점검 모형의 최적 관리[1)]

이 지 연[2)]

요약

시스템에 대한 예방 관리 모형을 고려한다. 시스템이 고장을 일으키면 즉시 최소 수리가 이루어지고 임의로 방문하는 전문 관리인에 의해 시스템을 점검했을 때 연속하는 고장의 수가 적정 개수이상이거나 또는 시스템의 총 작동 시간이 적정 시간이상이면 시스템을 동일한 것으로 교체한다고 한다. 적절한 비용을 부과한 다음 시스템의 단위 시간당 평균 비용을 계산하고 그 비용을 최소화하는 최적의 점검 속도를 찾는다.

1. 서론

시스템이 가동중에 고장을 일으키면 큰 손실을 초래하거나 위험한 경우가 있다. 그래서 신뢰성 이론에서는 시스템의 고장을 줄이기위해 고장나지 않은 시스템을 미리 교체해주는 다양한 예방 교체 정책(preventive replacement policy)을 연구하고 있다.

가장 기본이 되는 교체 정책으로 수명 교체(age replacement)와 일체 교체(block replacement)(Barlow and Proschan(1975))를 들 수 있다. 수명 교체는 수명(또는 작동 시간)에 따르는 교체 정책으로 시스템이 고장나거나, 또 고장나지 않았더라도 수명이 T시간을 초과하면 교체하는 정책이다. 일체 교체는 시스템이 고장나거나 고장나지 않았더라도 시점 kT, $k=1,2,\cdots$ 에서 정기적으로 교체해 주는 정책으로 정해진 일정한 시간에 시스템을 교체하기 때문에 시스템의 수명을 몰라도 적용할 수 있는 장점이 있다. 이 두 교체 정책에서는 시스템이 고장을 일으키면 항상 동일한 것으로 교체했지만 Cleroux et al.(1979), Boland and Proschan(1982)과 Sheu(1991)는 시스템의 총 작동 시간이 T 시간을 경과할 때만 교체 또는 완전 수리를 하고 그 전에 발생하는 고장은 최소 수리(minimal repair)를 하는 정책을 소개하였다. 여기서 최소 수리란 고장난 시스템을 고장 바로 직전의 상태로 수리하는 것을 말한다. 한편, Nakagawa and Kowada(1983)는 n번째 고장에서만 시스템을 교체하고 그 이전의 고장에는 최소 수리를 하는 새로운 정책을 제안했다. 이 정책은 시스템이 고장났을 때 교체하기 때문에 작동 중인 시스템을 교체하는데 비용이 많이 드는 경우에 유용하다. Park(1979)는 이 정책에서 비용을 최소화하는 최적의 n값을 구했다. Sheu et al.(1995)는 이 모형을 확장하여 총 작동 시간 T 또는 n번째의 작은 고장 또는 치명적인 고장중 먼저 발생하는 경우에 시스템을 교체하고 그 전에 일어나는 고장은 최소 수리하는 정책을 소개하고 시스템의 작동 비용을 최소화하는 최적의 T와 n을 구하였다.

---

1) 이 논문은 1997학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.
2) (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과 조교수

본 논문에서는 시스템이 Lee and Lee(1994)가 제안한 임의 점검(random inspection)으로 관리될 때 최적의 교체 정책을 알아보고자 한다. 임의 점검이란 시스템의 상태를 정해진 일정한 시간에 확인하기가 불가능한 경우 혹은 상태를 알기 위해 시스템의 가동을 중단시키기에 그 손실이 무척 큰 경우에 적용할 수 있다. 예를 들어 멀리 떨어진 여러 개의 시스템을 한 명의 전문가가 돌아 가면서 관리를 하게 되면 임의로 발생하는 고장 또는 이동 과정에서 발생할 수 있는 시간 지연으로 인해 한 시스템에 정해진 시간에 정확히 도착하기는 어렵고 결국 임의적으로 도착한다고 볼 수 있다. 실제로 임의 점검에 의한 관리가 주기 점검(periodic inspection)에 의한 관리보다 더 효과적인 경우도 있다.(Lee et. al(1996))

고장율 함수(failure rate function)가 $r(x)$인 시스템이 있다. 시스템이 고장나면 먼저 상주하고 있는 관리인이 최소 수리를 실시한다. 그리고 도착률 λ의 포아송 과정(Poisson process)을 따르며 방문하는 전문 관리인에 의해 시스템의 상태를 점검해서, 연속하는 고장 수(또는 최소 수리의 횟수)가 N개 이상이거나 또는 고장 수는 N개 미만이더라도 시스템의 총 작동 시간이 T시간이상이면 시스템을 동일한 것으로 교체한다고 한다. 이 때, 점검 및 최소 수리, 교체에 드는 시간은 무시한다. 2절에서는 시스템의 단위 시간당 평균 비용을 계산하고 3절에서는 적절한 조건하에서 평균 비용을 최소화하는 전문 관리인의 최적의 점검 속도가 존재함을 보이고 와이블 수명분포를 따르는 시스템의 최적 점검 속도를 모의실험을 통해 구해 본다.

2. 단위 시간당 평균 비용

본 논문에서 고려하는 비용은 다음과 같다.

c_1 : 회당 점검 비용

c_2 : 회당 최소 수리 비용

c_3 : 고장 수가 N개 이상이거나 총 작동 시간이 T를 초과했을 때 드는 시간당 추가 비용

c_4 : 회당 교체 비용

$X_i\,(i=1,2,\cdots)$를 $i-1$번째 교체와 i번째 교체 사이의 시간 간격이라고 하고 C_i를 각 교체 간격 X_i에 부가되는 비용이라고 하자. 그러면 동일한 수명 분포를 갖는 새 시스템으로 항상 교체가 이루어지기 때문에 $\{(X_i, C_i),\ i=1,2,\cdots\}$는 재생 보상 과정(renewal reward process)을 따르게 된다. 그러므로 전문 관리인의 점검 속도가 λ일 때, 이 시스템의 단위 시간당 평균 비용 $C(\lambda)$는 재생 보상 정리(renewal reward theorem)(Ross(1997))에 의해 식 (1)과 같이 구해진다.

$$C(\lambda)=\frac{E[C_1]}{E[X_1]} \tag{1}$$

먼저 $E[X_1]$을 구하기 위해 $N=\infty$이고 $T=\infty$일 때의 고장 과정(failure process)을 살펴보자.

$M(x)$를 시간 x까지 발생하는 고장 수라고 하고 $S_n\,(n\geq 1)$을 n번째 고장의 발생 시간이라고 하면 $\{M(x),\ x\geq 0\}$는 발생율 $r(x)$를 갖는 비정상 포아송 과정(nonhomogeneous Poisson process)된다(Brown and Proschan(1983)). 따라서, S_n의 생존 함수(survival distribution function) $\overline{G_n}(x)$는

$$\begin{aligned}\overline{G_n}(x) &= P\{S_n > x\}\\ &= P\{M(x) < n\}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\exp\{-R(x)\}R(x)^i}{i!}\end{aligned}$$

이고 $E[M(x)] = R(x)$임을 알 수 있다. 단, $R(x) = \int_0^x r(y)dy$이다.

여기서 $Y = \min(T, S_N)$라고 두면 X_1은 지수 분포의 비기억 성질(memoryless property)에 의해

$$X_1 \cong Y + E^{\lambda}$$

로 나타낼 수 있다. 단, E^{λ}는 평균이 $1/\lambda$인 지수 분포를 따르는 확률 변수이고 $\cong$는 분포가 동일하다는 것을 나타낸다. 따라서

$$\begin{aligned}E[Y] &= \int_0^{\infty} P\{\min(T, S_N) > x\}dx\\ &= \int_0^{\infty} P\{T > x,\ S_N > x\}dx\\ &= \int_0^{T} P\{S_N > x\}dx\\ &= \int_0^{T} \overline{G_N}(x)\,dx\end{aligned} \tag{2}$$

로 얻어지므로

$$E[X_1] = \int_0^{T} \overline{G_N}(x)dx + \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

를 구할 수 있다.

한편, 식 (1)의 분자 $E[C_1]$을 구하기 위해 먼저 구간 $[0, X_1]$에서 발생하는 최소 수리 횟수를 살펴 보자. $[0, X_1]$에서 발생하는 최소 수리 횟수 $M(X_1)$는

$$M(X_1) \;\cong\; M(Y) + [M(Y + E^{\lambda}) - M(Y)].$$

이다. 여기서

$$
\begin{aligned}
E[M(Y)] &= E[\sum_{i=1}^{N} I_{[0,T]}(S_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{N} P\{S_i \le T\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\exp\{-R(T)\}R(T)^k}{k!} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=i}^{N} \frac{\exp\{-R(T)\}R(T)^k}{k!} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\exp\{-R(T)\}R(T)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \frac{\exp\{-R(T)\}R(T)^k}{k!} + N \cdot G_{N+1}(T) \quad (G_n(x) = 1 - \overline{G_n}(x)) \\
&= R(T)\overline{G_N}(T) + N \cdot G_{N+1}(T)
\end{aligned} \tag{4}
$$

이고

$$
\begin{aligned}
A(\lambda) &= E[M(Y+E^{\lambda}) - M(Y)] \\
&= \int_0^T E[M(y+E^{\lambda}) - M(y)]dG_N(y) + \overline{G_N}(T)E[M(T+E^{\lambda}) - M(T)] \\
&= \int_0^T \int_0^{\infty} E[M(x+y) - M(y)]\lambda \exp(-\lambda x)dxdG_N(y) \\
&\quad + \overline{G_N}(T)\int_0^T E[M(x+T) - M(T)]\lambda \exp(-\lambda x)dx \\
&= \int_0^T \int_0^{\infty} [R(x+y) - R(y)]\lambda \exp(-\lambda x)dxdG_N(y) \\
&\quad + \overline{G_N}(T)\int_0^T [R(x+T) - R(T)]\lambda \exp(-\lambda x)dx \\
&= \int_0^T \int_0^{\infty} r(x+y)\exp(-\lambda x)dxdG_N(y) + \overline{G_N}(T)\int_0^T r(x+T)\exp(-\lambda x)dx
\end{aligned} \tag{5}
$$

가 된다. 단, I는 $I_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$ 로 정의되는 지시함수(Indicator function)를 나타낸다. 그러므로 식 (2) (4) (5)와 지수 분포의 비기억 성질에 의해 단위 시간당 평균 비용 $C(\lambda)$는 식 (6)과 같이 정리된다.

$$
\begin{aligned}
C(\lambda) &= \frac{c_1\lambda E[X_1] + c_2\{E[M(Y)] + A(\lambda)\} + c_3(1/\lambda) + c_4}{E[X_1]} \\
&= c_1\lambda + \frac{\{c_2\{E[M(Y)] + A(\lambda)\} + c_4\}\lambda + c_3}{E[Y]\lambda + 1}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

3. 최적의 점검 속도

정리 만약 시스템의 수명 분포가 IFR이고 $(c_1+c_2E[M(Y)]+c_4)/E[Y] < c_2E[r(Y)]+c_3$이면 $C(\lambda)$를 최소화하는 $\lambda^*(>0)$가 유일하게 존재한다.

증명 먼저 식 (6)의 $C(\lambda)$를 λ에 대해 미분을 하면

$$C'(\lambda)=\frac{B(\lambda)}{(E[Y]\lambda+1)^2}$$

가 얻어 진다. 여기서,

$$B(\lambda) = c_1(E[Y]\lambda+1)^2+c_2\{E[M(Y)]+D(\lambda)\}-c_3E[Y]+c_4,$$

$$D(\lambda) = E[Y]\lambda^2A'(\lambda)+\lambda A'(\lambda)+A(\lambda)$$

이다. 가정에서 $r(x)$가 증가함수이기 때문에

$$\lambda^2A'(\lambda)=-\int_0^T\int_0^\infty xr(\frac{x}{\lambda}+y)\exp(-x)dxdG_N(y)-\overline{G_N}(T)\int_0^\infty xr(\frac{x}{\lambda}+T)\exp(-x)dx$$

도 λ에 대한 증가함수가 된다. 따라서 $D'(\lambda)=\lambda^{-1}(E[Y]\lambda+1)(\lambda^2A'(\lambda))' \geq 0$이 되어 $D(\lambda)$와 $B(\lambda)$도 λ에 대한 증가함수가 된다. 한편 $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda A'(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}A(\lambda)=0$이기 때문에 $D(\lambda)\leq\lim_{\lambda\to\infty}D(\lambda)=E[Y]\cdot\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2A'(\lambda)=-E[Y]\cdot E[r(Y)]$가 되어

$$B(\lambda) \leq c_1(E[Y]\lambda+1)^2+c_2\{E[M(Y)]-E[Y]E[r(Y)]\}-c_3E[Y]+c_4$$

임을 알 수 있다. 그러므로 만약 $(c_1+c_2E[M(Y)]+c_4)/E[Y] < c_2E[r(Y)]+c_3$이면 $\lim_{\lambda\to 0}B(\lambda)<0$이고 $\lim_{\lambda\to\infty}B(\lambda)=\infty$이기 때문에 $B(\lambda^*)=0$인 $\lambda^*(>0)$가 유일하게 존재함을 알 수 있다.

<예> 와이블 분포

$$r(x)=\alpha\mu(\mu x)^{\alpha-1}, x\geq 0$$

인 와이블 분포에서는 α가 1보다 크거나 같을 때 IFR분포가 된다. 특별히 $\alpha=2$, $\mu=1/12$인 와이블 분포의 몇가지 경우에 대해 위 **정리**의 비용 조건하에서 얻은 최적의 평균 점검 간격 $1/\lambda^*$는 다음과 같다.

		T			
		10	50	100	300
N	1	4.16	4.37	4.38	4.38
	5	4.26	5.51	5.55	5.56
	15	4.26	6.25	6.38	6.38
	30	4.26	6.37	6.98	6.99

<표 1> $c_1=c_2=c_3=c_4=1$

		c1		
		1	5	10
c4	1	1.61	3.74	5.45
	5	1.62	3.76	5.48
	10	1.63	3.79	5.51

<표 2> $N=5, T=50$, $c_2=c_3=10$

		c2		
		1	5	10
c3	1	5.51	3.68	2.87
	5	2.60	2.31	2.05
	10	1.82	1.71	1.61

<표 3> $N=5$, $T=50$, $c_1=c_4=1$

<표 1>에서 모든 비용이 고정된 경우에는, N 또는 T가 클수록 $1/\lambda^*$가 커지다가 Y의 분포가 일정해지면 λ^*의 값도 변동없이 일정해 짐을 알 수 있다. 한편, 위의 **정리**에서 λ^*의 존재 조건을 살펴 보면 좌변은 고장 수가 N개가 되거나 또는 총 작동 시간이 T가 될 때까지의 시간당 평균 비용이고 우변은 그 이후에 부과되는 시간당 평균 추가비용이라고 볼 수 있다. 그래서 <표 2>과 <표 3>에서처럼 N과 T의 값이 일정하면 좌변에 해당되는 비용 c_1과 c_4가 클수록 $1/\lambda^*$가 커지고 우변에 해당하는 비용 c_2와 c_3가 클수록 최적의 $1/\lambda^*$의 값은 작아짐을 알 수 있다. 그것은 점검 비용과 교체 비용이 크면 점검 속도를 천천히 하는 것이 비용이 적게 들고 최소 수리 비용과 추가 비용이 클수록 점검하는 속도를 높혀서 빨리 교체해 주는 것이 비용이 적게 들기 때문이다.

참 고 문 헌

[1] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models*. New York.

[2] Boland, P. J. and Proschan, F. (1982) Periodic replacement with increasing minimal repair costs at failure. *Operations Research*. Vol. 30. 1183-1189.

[3] Brown, M. and Proschan, F. (1983) Imperfect repair. *Journal of Applied Probability*. Vol. 20. 851-859.

[4] Cleroux, R., Dubuc, S. and Tilquin, C. (1979) The age replacement problem with minimal repair and random repair cost. *Operations Research*. Vol. 27. 1158-1167.

[5] Lee, E. Y. and Lee, J. (1994) Optimal control of a model for a system subject to random

shocks, *Operations Research Letters*. Vol. 15. 237-240.

[6] Lee, E. Y., Lee, J. and Sohn, J. K. (1996) Periodic inspection of a random shock model. *Journal of the Korean Society for Quality Management*. Vol. 24. 31-36.

[7] Nakagawa, T. and Kowada, M. (1983) Analysis of a system with minimal repair and its application to replacement policy. *European Journal of Operational Research*. Vol. 12. 176-182.

[8] Park, K. S. (1979) Optimal mumber of minimal repairs before replacement. *IEEE transactionson Reliability*. Vol. 28, 137-140.

[9] Ross, S. M. (1997) *Stochastic Processes*. Academic Press.

[10] Sheu, S-H. (1991) Periodic replacement with minimal repair at failure and general random repair cost for a multi-unit system. *Microelectron. Reliab.* Vol. 31. 1019-1025.

[11] Sheu, S-H., Griffith, W. S. and Nakagawa, T. (1995) Extendedoptimal replacement model with random minimal repair costs. *European Journal of Operational Research*. Vol. 85. 636-649.