

이원배치모형에서 급내상관계수의 추정¹⁾

이 장 태²⁾

요 약

이원배치모형에서 급내상관계수에 대한 점추정문제가 고려된다. 급내상관계수에 대한 여러 가지 점추정량의 종류를 살펴보고 추정량의 평균자승오차(MSE)과 절대편의를 모의 실험을 통하여 서로 비교하여 본다.

결론적으로 이원배치모형에서의 급내상관계수는 추정량의 종류에 큰 영향을 받지 않는 것으로 나타났으며, 따라서 계산량이 다른 추정량들에 비하여 적은 헨더슨의 방법 III 추정량을 사용하는 것이 바람직한 것으로 판명되었다.

1. 서론

분산성분모형에서 분산성분의 함수인 변동비율에 대한 연구는 많은 학자들이 연구를 하고 있는 중요연구과제이다. 여기서 변동비율이란 분산성분모형에 있어서 랜덤효과가 가지고 있는 분산성분을 종속변수가 갖는 분산(총변동)으로 나눈 비율을 의미하는 것을 뜻하는데, 특히 변동비율의 한 가지 경우인 급내상관계수는 의생태학에서 생물학적 또는 환경학적 특성에 관하여 가족의 유사점을 측정하는 데 일반적으로 사용되어진다. 또한 심리학에서는 심사관 또는 심사보조원들의 의견을 집약할 수 있는 신뢰성이론에서 급내상관계수는 매우 중요한 역할을 하게 된다. 그리고 급내상관계수의 중요한 응용은 감수성분석에서도 찾아 볼 수 있다.

급내상관계수에 대한 연구는 주로 일원변량모형에 대하여 연구되어졌다. 일원변량모형에서의 급내상관계수 ρ 의 점추정에 관한 연구는 1925년 Fisher로부터 시작되었다고 할 수 있는데, 그는 ρ 의 점추정량으로써 분산분석표의 부산물으로써 구할 수 있는 분산분석추정량을 사용하였다. ρ 의 분산분석추정량은 ρ 에 대하여 일반적으로 비록 일치추정량일지라도 불편추정량은 아니다. 그리고 분산분석추정량에 대한 보다 중요한 문제점은 음수가 될 수 있다는 점이다. 이와 같은 단점을 극복하기 위하여 고려된 또다른 ρ 의 추정량은 최우추정량이다. ρ 의 최우추정량은 1980년 Donner와 Koval에 의하여 가족연구에 처음으로 이용되었는데, ρ 에 대한 지식이 전혀 없거나 ρ 의 값이 크다고 생각되어질 때 ρ 의 최우추정량을 고려하는 것이 바람직하다고 하였다. Palmer와 Bromeling (1990)는 베이지안 메디안추정량을 고려하였는데, ρ 의 값이 매우 작거나 불균형도가 아주 심하지 않으면 최우추정량을 사용하는 것보다 베이지안 메디안추정량을 이용하는 것이 좋다고 주장하였다. 이원변량모형에 대한 변동비율에 대한 연구는 주로 신뢰구간에 관하여 많은 연구들이 수행되어졌는데, Graybill, Wang(1979)은 이원지분변량모형에서의 변동비율에 관한 근사신뢰구간에 대하

1) 이 연구는 1998년 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

2) (140-714) 서울시 용산구 한남동 산 8번지 단국대학교 전산통계학과 교수

여 연구하였으며, Arteaga, Jeyaratnam과 Graybill(1982)은 교호작용이 없고 반복이 없는 이원변량 모형에서의 변동비율에 관한 근사신뢰구간에 대하여 연구하였다. 또한 Srinivasan과 Graybill(1991)은 교호작용이 없고 반복이 있는 이원변량모형에서의 변동비율에 관한 근사신뢰구간을 비가중 칸평균(Unweighted cell means)을 이용하여 제안하였다. 하지만, 이원변량모형에 대한 변동비율에 대한 연구는 점추정에 관하여 아직도 자세히 연구된 결과를 찾아 볼 수 없다. 단지 Khattree와 Gill(1989)이 발표한 SAS에서 사용되는 4가지 분산성분추정량에 대한 점추정에 대한 결과가 있을 따름이다. 따라서 본 논문에서는 이원변량모형에서의 변동비율에 대한 연구중 급내상관계수에 대하여 헨더슨의 방법 III, MINQUE, REML추정량, ML추정량을 이용하여 구한 급내상관계수의 추정량을 평균자승오차(MSE)와 절대편의의 관점에서 비교하여 본다.

본 논문의 구성은 2절에서는 이원배치모형에서의 급내상관계수의 도입 및 정의에 대하여 알아보고, 3절에서는 연구에 포함된 4가지 추정량과 점추정량의 비교에 고려된 판정기준에 대하여 설명한다. 4절에서는 모의실험의 계획 및 과정, 그리고 그 결과에 대하여 언급하며 끝으로 5절에서는 연구의 결론이 주어진다.

2. 급내상관계수의 정의

교호작용이 없는 이원배치모형은 일반적으로 다음과 같이 서술된다.

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}, \quad i=1,2,\dots,a, \quad j=1,\dots,b, \quad k=1,2,\dots,n_{ij}. \quad (2.1)$$

위의 모형에서 μ 는 전체평균, α_i 는 처리 i 의 효과, β_j 는 블록 j 의 효과이며, 랜덤효과 β_j 와 e_{ijk} 는 서로 독립이며, 평균이 0이고 분산이 각각 σ_β^2 와 σ_e^2 인 정규확률변수, n_{ij} 는 i 번째 처리효과 및 j 번째 블록효과에 대한 관측치의 개수이다. 식(2.1)은 신뢰성이론에서 빈번하게 사용되는 데, 보다 구체적인 내용은 Joseph(1986)의 책에 자세하게 소개되어 있다. 예를 들면 치과에서 환자들의 영구치를 조사하여 DMFS 점수(썩은 이, 빠진 이, 보철한 이의 개수 등을 점수화 한 것임)를 기록하는 경우에 i 번째 조사자에 의해 조사된 j 번째 환자의 DMFS 점수 y_{ijk} 는 $y_{ijk} = \gamma_i + t_j + e_{ijk}$ 로 표현되며 이 경우 γ_i 는 전체평균값이 μ 인 조사자의 효과이며, 확률효과 t_j 는 전체평균이 μ_t 이고 분산이 σ_t^2 인 환자들의 오차가 전혀 없는 DMFS 점수이다. 따라서 $\gamma_i = \mu_\gamma + \alpha_i$, $t_j = \mu_t + \beta_j$, $\mu = \mu_\gamma + \mu_t$ 로 두고 표기를 바꾸면 식(2.1)이 될 수 있다. 식(2.1)에서 조사자의 효과 α_i 는 고정효과와 랜덤효과 두 가지로 해석이 가능한데, 일반적인 많이 사용되는 제약조건을 이용하여 고정효과인 경우에는 $\sum \alpha_i = 0$ 라는 조건이 성립하고, 랜덤효과인 경우에는 α_i 는 평균이 0이고 분산이 σ_α^2 인 정규확률변수이며, 랜덤효과 α_i , β_j , e_{ijk} 는 서로 독립이라고 가정하기로 한다. 다음은 위에서 언급한 예를 중심으로 설명한 두 가지 경우에 있어서 급내상관계수의 정의 및 해석이다.

경우 1: α_i 를 고정효과로 간주하는 경우

조사자의 효과 α_i 를 고정효과로 간주하면 분석자들의 첫번째 관심사는 조사자의 효과가 과연

유의한가 하는 사실을 분산분석을 통하여 알고 싶어 할 것이다. 하지만 조사자의 효과가 유의하다고 하더라도 실질적으로 중요한 만큼의 차이가 있다는 것은 반드시 아닐 것이다. 따라서 급내상관계수를 이용하여 유의성의 강도를 측정할 필요가 있다. 한편 조사자의 효과가 유의하지 않다는 가설 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$ 이 성립한다고 하여도 $\sum \alpha_i^2 = 0$ 이 성립한다는 의미가 아니기 때문에 관측치 y_{ijk} 의 총변동은 $\sigma_y^2 = \sum \alpha_i^2/a + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2$ 로 표시된다. 그리고 이 경우에 적당한 급내상관계수는 다음 식(2.2)와 같이 정의될 수 있다.

$$R_f = \sigma_\beta^2 / (\sum \alpha_i^2/a + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2). \quad (2.2)$$

경우 2: α_i 를 랜덤효과로 간주하는 경우

만일 a 명의 조사자들이 많은 조사자들의 모임에서 랜덤하게 선택되었다면 조사자의 효과 α_i 는 랜덤효과로 간주하는 것이 타당하다. 따라서 이 경우에 급내상관계수는 다음 식(2.3)과 같이 정의된다.

$$R_r = \sigma_\beta^2 / (\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2). \quad (2.3)$$

3. 고려된 추정량 및 판정기준

이 절에서는 모의실험에서 고려된 추정량들과 판정기준에 대하여 언급한다.

3.1 고려된 추정량들

불균형자료에 대한 분산성분의 추정에 대한 시발점이며 가장 유명한 논문의 하나는 Henderson (1953)의 연구이다. 그는 균형자료에서의 분산성분의 추정처럼 불균형자료를 이용하여 다양한 이차형식을 그 기대값과 같게 두어서 분산성분을 추정하였다. 특히 그의 방법중에서 오늘날까지 널리 사용되는 헨더슨의 방법 III은 모든 혼합모형에 적용될 수 있으며 이 방법을 이용하여 구해진 추정량은 모두 불편추정량이다. 하지만 이 방법의 단점은 비록 고정효과모형의 분석에 널리 사용되어지는 제곱합의 원리를 이용하지만 수학적으로 통계적 최적성질이 밝혀진 것은 아직 없다. 또한 이 방법에 의하여 구하여지는 추정량은 유일하지 않으며 여러가지 추정량중에서 어느 것을 사용하는 것이 가장 좋다는 것도 알려져 있지 않다. 이러한 이유로 많은 통계학자들은 통계적 최적성을 보장하는 방법들을 연구하였는데, 1967년부터 1972년까지 분산성분의 추정에 대하여 매우 훌륭한 획기적인 결과들이 보고되었다. 이 기간에 발표되어진 분산성분의 추정량은 Hartley와 J.N.K.Rao(1967)의 최우추정량(MLE), C.R.Rao(1971)의 최소노움불편추정량(MINQUE), 그리고 Patterson과 Thompson(1972)의 제한최우추정량(REMLE)이다. 세가지 추정량을 간단히 소개하면 최우추정량은 혼합모형의 랜덤효과와 오차항이 정규분포를 따른다는 가정아래에서 분산성분을 최우추정법을 이용하여 구한다. 제한최우추정량 역시 혼합모형의 랜덤효과와 오차항이 정규분포를 따른다는 가정을 이용하기 때문에 최우추정량과 비슷하나, 고정효과 부분과 랜덤효과 부분을 따로 분리하여 추정하는 방법을 사용하는 것이 다르다. REMLE는 최근에 많은 학자들이 가장 선호하는 방법으로 알려져 있으며, 1992년에 개발된 통계팩키지 SAS의 PROC MIXED의 디폴트 추정량

으로 사용되고 있다. 최소노움불편추정량은 랜덤효과와 오차항의 분포와 무관하게 사용될 수 있다는 장점이 있으며, MINQUE와 REMLE는 서로 밀접한 관련성이 있는 데, REMLE의 첫번째 단계의 값이 하나의 MINQUE 추정치가 될 수 있다. 언급된 네가지 추정량에 관한 보다 자세한 설명과 상호관계는 Searle(1987)과 Rao와 Kleffe(1988)의 책등에서 찾아 볼 수 있다.

3.2 고려된 판정기준들

본 연구에서 고려된 점추정량의 효율성에 관한 비교는 다음과 같은 두 가지 관점에서 비교되었다. 표기의 간편성을 위하여 n 은 모의실험에서 고려된 총 반복횟수, r_{ij} 를 본 연구에서 고려된 4가지 추정량중 i 번째 추정량의 j 번째 모의실험에서의 추정된 급내상관계수의 값, ρ 는 급내상관계수의 실제값이라고 두면, 추정된 각 추정량의 평균자승오차(MSE)와 절대편의(Absolute Bias)는 다음과 같이 정의될 수 있다. 아울러 p 번째 추정량이 q 번째 추정량보다 바람직한 추정량이라고 할 수 있는 경우는 $MSE(r_p) < MSE(r_q)$, $ABS(r_p) < ABS(r_q)$ 인 관계가 성립하는 경우라고 할 수 있다.

(1) 평균제곱오차 (MSE)

각 추정량의 MSE는 $MSE(r_i) = \sum_{j=1}^n (r_{ij} - \rho)^2 / n$ 을 이용하여 구한다.

(2) 절대편의 (Absolute Bias)

각 추정량의 절대편의는 $ABS(r_i) = \sum_{j=1}^n |r_{ij} - \rho| / n$ 으로 계산된다.

4. 모의실험

이 절에서는 모의실험을 통하여 3절에서 고려된 4가지 추정량에 대한 효율성을 조사한다. 제안된 모의실험의 계획 및 과정, 그리고 그 결과는 다음과 같다.

4.1 모의실험계획

교호작용이 없는 이원배치모형에 대하여 2절에서 소개된 조사자의 효과가 고정효과인 경우와 랜덤효과인 경우를 고려하여 총 2가지 모형이 고려되었다. 또한 모의실험에서 각 효과들의 수준의 값, 오차항의 분산성분에 대한 랜덤효과에 관련된 분산성분의 비율, 그리고 실험계획의 불균형정도가 고려되어야 하는 데 이상을 고려하여 다음과 같은 실험계획을 선택하였다. 실험계획의 이름에서 BD는 균형계획을 의미하며 UD는 불균형계획을 표시한다. 그리고 BD와 UD밑의 첨자 35와 53은 각각 식(2.1)에서 $(a, b) = (3, 5)$ 와 $(a, b) = (5, 3)$ 을 의미하며, 균형계획에서는 [I]이라고 표시된 계획이 [II]라고 표시된 계획에 비하여 반복수가 적은 계획이며, 불균형계획에서는 [I]이라고 표시된 계획은 불균형정도가 약하고 [III]로 표시된 계획은 적당한 정도의 불균형정도를 지니고 있으며 [III]으로 표시된 계획은 불균형정도가 심한 실험계획이다. 그리고 각 실험계획의 이름뒤의 괄호안의 숫자는 각 셀당의 자료의 개수를 표시한 것으로 사용되었는데, 예를 들면 BD_{35} 의 괄호는 $BD_{35} = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{15}; n_{21}, n_{22}, n_{23}, n_{24}, n_{25}; n_{31}, n_{32}, n_{33}, n_{34}, n_{35})$ 의 의미를 뜻한

다. 본 논문에서 사용된 모의실험에 사용된 실험계획의 모양, 모의실험에 사용된 모형에 대한 실험계획의 제약식은 다음과 같다.

[1] 모의실험에 사용된 실험계획의 모양

$$\begin{aligned} BD_{35}[I] &= (2, 2, 2, 2, 2; 2, 2, 2, 2, 2; 2, 2, 2, 2, 2), \\ BD_{35}[II] &= (6, 6, 6, 6, 6; 6, 6, 6, 6, 6; 6, 6, 6, 6, 6), \\ BD_{53}[I] &= (2, 2, 2; 2, 2, 2; 2, 2, 2; 2, 2, 2; 2, 2, 2), \\ BD_{53}[II] &= (6, 6, 6; 6, 6, 6; 6, 6, 6; 6, 6, 6; 6, 6, 6). \\ \\ UD_{35}[I] &= (2, 2, 3, 2, 2; 3, 3, 4, 3, 3; 4, 4, 4, 4, 3), \\ UD_{35}[II] &= (2, 3, 4, 3, 5; 2, 3, 6, 4, 5; 3, 5, 4, 3, 6), \\ UD_{35}[III] &= (1, 2, 3, 4, 5; 6, 7, 8, 9, 10; 11, 12, 13, 14, 15). \\ UD_{53}[I] &= (2, 2, 3; 2, 2, 3; 3, 4, 3; 3, 4, 4; 4, 4, 3), \\ UD_{53}[II] &= (2, 3, 4; 3, 5, 2; 3, 6, 4; 5, 3, 5; 4, 3, 6), \\ UD_{53}[III] &= (1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9; 10, 11, 12; 13, 14, 15). \end{aligned}$$

[2] 모의실험에 사용된 각 모형에 대한 실험계획의 제약

모형 1: 처리효과가 고정효과인 경우

① 고정효과에 대한 조건:

· 실험계획 BD_{35} 와 UD_{35} 인 경우: $\mu=0; \alpha_1=1, \alpha_2=1, \alpha_3=-2$.

· 실험계획 BD_{53} 과 UD_{53} 인 경우: $\mu=0; \alpha_1=1, \alpha_2=1, \alpha_3=1, \alpha_4=1, \alpha_5=-4$.

② 랜덤효과에 대한 조건: $\sigma_e^2=1, \sigma_b^2$ 의 값은 급내상관계수의 값이 0.1부터 0.9까지 0.1의 간격이 될 수 있도록 선택.

모형 2: 처리효과가 랜덤효과인 경우

① 고정효과에 대한 조건: $\mu=0$.

② 랜덤효과에 대한 조건: $\sigma_e^2=1, \sigma_a^2=1, \sigma_b^2$ 의 값은 급내상관계수의 값이 0.1부터 0.9까지 0.1의 간격이 될 수 있도록 선택.

4.2 모의실험의 과정

모의실험은 통계패키지 SAS/IML을 이용하였으며, 정규분포의 난수는 통계패키지 SAS의 난수 생성함수 RANNOR를 이용하여 만들어졌다. 또한 REML 추정량과 ML 추정량을 구할 경우에 두 추정량 모두 반복수렴해이기 때문에 수렴판정의 기준을 정의하여야 하는 데, SAS의 분산성분추정 절차인 VARCOMP 프로시저어에서 사용하는 수렴판정기준인 k 번째와 $k+1$ 번째 반복이 $|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k| < 10^{-8}$ 을 만족할 때, k 번째에서 추정량이 수렴하였다고 정의하였으며, 수렴조건을 만족하기 위한 최대반복횟수는 30번으로 제한하였다. 따라서 수렴조건을 만족하지 않는 경우에는 MSE값과 절대편의를 구하는데 제외되었으며, MINQUE추정량을 구할 경우에는 분산성분비율의 사전추측값이 필요한데 가장 많이 이용하는 값인 1을 사용하였다. 한편 헨더슨의 방법 III 추정량도 본질적으로 분산분석추정량이기 때문에 추정치의 값이 음이 될 수 있는데, 이 경우 음수의 값을 모두 0으로 대체하였다.

두가지 모형에 대한 여러 가지 실험계획에 대하여 각각 3000개의 자료가 생성되었다. 그리고 또한 분산성분을 추정하는 데 자료의 전체개수 $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij}$ 를 N 이라고 할 때 사용되는 네가지 방법 모두 $N \times N$ 역행렬의 계산을 포함한 많은 계산량을 필요로 하는 데, $N \times N$ 역행렬의 계산을 피하기 위하여 Lee와 Kim(1988)의 W -변환의 재구성 기법을 이용하였다. W -변환의 재구성 기법은 비어있지 않는 셀의 개수를 n_0 이라고 할 때, $N \times N$ 역행렬의 계산을 $n_0 \times n_0$ 역행렬의 계산으로 대체하는 방법이기 때문에 네가지 방법을 사용하는 경우에 요구되어지는 계산량을 훨씬 줄여 줌으로써 컴퓨터 메모리 부족현상을 막는 데 상당한 도움을 준다. 또한 모형1에 포함된 고정효과는 4가지 추정량을 이용하여 추정된 분산성분의 값을 일반화최소제곱추정량에 대입하여 추정하였다.

4.3 모의실험의 결과

다음은 모형1과 모형2에 대한 모의실험의 결과를 정리한 것이다. [표4.1]과 [표4.2]는 각각 모형1에 대한 각 추정량들의 추정된 MSE값과 절대편의의 값이다. 모의실험의 결과를 통하여 알 수 있는 중요한 사실은 다음과 같다.

[1] 모형1에 대한 결과

- (1) 고려된 모든 실험계획과 급내상관계수의 값에 대하여 사용된 두가지 판정기준의 결과는 비슷하게 나타난다.
- (2) 고려된 급내상관계수의 4가지 추정량은 전체적으로 고려된 모든 실험계획에서 비슷한 효율성을 가진다고 할 수 있으나, ML추정량은 상대적으로 다른 추정량에 비하여 근소하지만 효율성이 떨어진다. 따라서 급내상관계수를 추정하는 경우에 계산량이 적은 헨더슨의 방법 III 추정량을 사용하는 것이 계산량이 상대적으로 많은 ML추정량, REML추정량, MINQUE보다 더 바람직한 것으로 간주된다.
- (3) 균형실험계획인 경우에는 헨더슨의 방법 III, MINQUE 및 REML추정량은 같은 추정량임으로 모든 MSE값과 절대편의의 값이 같으며, 수준의 수가 같은 경우에는 반복의 수가 큰 경우가 두 판정기준의 값 모두 약간 크다. 또한 전체 셀의 개수가 같은 경우에는 모형 (2.1)의 처리효과 α_i 의 수준의 수인 a 값이 작은 경우가 큰 경우보다 두 판정기준의 값이 작게 나타난다. 또한 불균형실험계획에서는 불균형도가 약한 것이 강한 것보다 급내상관계수를 추정하는 데, 바람직한 것으로 나타났으며, 분산성분추정량의 종류와 실험계획의 불균형도는 관련성이 없는 것으로 판명되었다. 아울러 급내상관계수의 값이 증가할수록 모든 추정량에 대하여 MSE값과 절대편의의 값은 증가한다.

다음 [표4.3]과 [표4.4]는 각각 모형2에 대한 각 추정량들의 추정된 MSE값과 절대편의의 값이다. 아울러 [표4.3]과 [표4.4]를 통하여 알 수 있는 중요한 결론들은 다음과 같다.

[2] 모형2에 대한 결과

- (1) 두가지 판정기준의 결과는 급내상관계수 ρ 의 값이 작은 경우의 몇가지 예외를 제외하고 모든 해석이 모형1과 비슷하게 나타난다. 따라서 이원배치모형에서는 모형이 바뀌더라도 추정량의 효율성은 크게 다르지 않음을 알 수 있다.

(2) 추정된 MSE값과 절대편의의 값은 모형1과 비교하여 ρ 의 값이 작은 몇가지 예외를 제외하고 전체적으로 약간 작게 나타났다.

[표4.1] 모형1에 대한 추정량들의 추정된 MSE값

실험계획	추정량	ρ								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
BD35[I]	HENDER	0.0077	0.0333	0.0777	0.1404	0.2230	0.3256	0.4452	0.5835	0.7412
	MINQUE	0.0077	0.0333	0.0777	0.1404	0.2230	0.3256	0.4452	0.5835	0.7412
	REML	0.0077	0.0333	0.0777	0.1404	0.2230	0.3256	0.4452	0.5835	0.7412
	ML	0.0082	0.0351	0.0810	0.1457	0.2304	0.3349	0.4571	0.5981	0.7586
BD35[II]	HENDER	0.0089	0.0374	0.0855	0.1531	0.2408	0.3478	0.4741	0.6205	0.7874
	MINQUE	0.0089	0.0374	0.0855	0.1531	0.2408	0.3478	0.4741	0.6205	0.7874
	REML	0.0089	0.0374	0.0855	0.1531	0.2408	0.3478	0.4741	0.6205	0.7874
	ML	0.0094	0.0384	0.0873	0.1558	0.2445	0.3527	0.4804	0.6281	0.7964
BD53[I]	HENDER	0.0085	0.0355	0.0819	0.1471	0.2320	0.3351	0.4580	0.6016	0.7597
	MINQUE	0.0085	0.0355	0.0819	0.1471	0.2320	0.3351	0.4580	0.6016	0.7597
	REML	0.0085	0.0355	0.0819	0.1471	0.2320	0.3351	0.4580	0.6016	0.7597
	ML	0.0091	0.0373	0.0853	0.1524	0.2393	0.3450	0.4705	0.6166	0.7784
BD53[II]	HENDER	0.0094	0.0384	0.0870	0.1552	0.2431	0.3507	0.4780	0.6244	0.7919
	MINQUE	0.0094	0.0384	0.0870	0.1552	0.2431	0.3507	0.4780	0.6244	0.7919
	REML	0.0094	0.0384	0.0870	0.1552	0.2431	0.3507	0.4780	0.6244	0.7919
	ML	0.0097	0.0393	0.0886	0.1578	0.2468	0.3556	0.4843	0.6327	0.8016
UD35[I]	HENDER	0.0083	0.0352	0.0812	0.1481	0.2304	0.3353	0.4596	0.6025	0.7622
	MINQUE	0.0083	0.0352	0.0812	0.1480	0.2303	0.3352	0.4594	0.6024	0.7621
	REML	0.0083	0.0352	0.0812	0.1482	0.2304	0.3354	0.4598	0.6026	0.7622
	ML	0.0089	0.0368	0.0842	0.1523	0.2370	0.3435	0.4700	0.6155	0.7785
UD35[II]	HENDER	0.0084	0.0363	0.0828	0.1499	0.2353	0.3409	0.4652	0.6082	0.7699
	MINQUE	0.0084	0.0361	0.0824	0.1494	0.2344	0.3400	0.4637	0.6064	0.7674
	REML	0.0084	0.0363	0.0828	0.1499	0.2355	0.3410	0.4653	0.6082	0.7698
	ML	0.0090	0.0377	0.0856	0.1538	0.2411	0.3484	0.4748	0.6202	0.7849
UD35[III]	HENDER	0.0092	0.0380	0.0865	0.1548	0.2429	0.3505	0.4789	0.6252	0.7924
	MINQUE	0.0091	0.0380	0.0864	0.1546	0.2427	0.3503	0.4785	0.6250	0.7919
	REML	0.0092	0.0380	0.0865	0.1548	0.2429	0.3506	0.4789	0.6252	0.7925
	ML	0.0095	0.0389	0.0880	0.1570	0.2459	0.3545	0.4836	0.6314	0.8000
UD53[I]	HENDER	0.0089	0.0368	0.0843	0.1513	0.2373	0.3420	0.4673	0.6126	0.7754
	MINQUE	0.0089	0.0368	0.0843	0.1513	0.2373	0.3419	0.4672	0.6126	0.7754
	REML	0.0089	0.0368	0.0843	0.1513	0.2373	0.3420	0.4672	0.6126	0.7754
	ML	0.0094	0.0384	0.0870	0.1556	0.2435	0.3504	0.4780	0.6257	0.7915
UD53[II]	HENDER	0.0091	0.0374	0.0848	0.1527	0.2392	0.3457	0.4718	0.6160	0.7800
	MINQUE	0.0091	0.0374	0.0848	0.1527	0.2391	0.3456	0.4717	0.6159	0.7799
	REML	0.0091	0.0374	0.0848	0.1527	0.2392	0.3457	0.4718	0.6159	0.7799
	ML	0.0096	0.0387	0.0875	0.1565	0.2448	0.3531	0.4813	0.6282	0.7953
UD53[III]	HENDER	0.0095	0.0388	0.0875	0.1564	0.2448	0.3530	0.4803	0.6288	0.7959
	MINQUE	0.0095	0.0387	0.0875	0.1564	0.2447	0.3529	0.4802	0.6287	0.7958
	REML	0.0095	0.0388	0.0875	0.1564	0.2448	0.3530	0.4803	0.6288	0.7959
	ML	0.0098	0.0395	0.0889	0.1584	0.2476	0.3568	0.4856	0.6350	0.8036

[표4.2] 모형1에 대한 추정량들의 추정된 절대편의값

실험계획	추정량	ρ								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
BD35[I]	HENDER	0.0835	0.1786	0.2750	0.3713	0.4690	0.5676	0.6641	0.7608	0.8577
	MINQUE	0.0835	0.1786	0.2750	0.3713	0.4690	0.5676	0.6641	0.7608	0.8577
	REML	0.0835	0.1786	0.2750	0.3713	0.4690	0.5676	0.6641	0.7608	0.8577
	ML	0.0878	0.1850	0.2822	0.3796	0.4780	0.5767	0.6740	0.7713	0.8687
BD35[II]	HENDER	0.0939	0.1930	0.2920	0.3908	0.4904	0.5894	0.6882	0.7873	0.8870
	MINQUE	0.0939	0.1930	0.2920	0.3908	0.4904	0.5894	0.6882	0.7873	0.8870
	REML	0.0939	0.1930	0.2920	0.3908	0.4904	0.5894	0.6882	0.7873	0.8870
	ML	0.0964	0.1958	0.2953	0.3945	0.4943	0.5937	0.6929	0.7923	0.8922
BD53[I]	HENDER	0.0907	0.1865	0.2845	0.3818	0.4799	0.5772	0.6750	0.7739	0.8696
	MINQUE	0.0907	0.1865	0.2845	0.3818	0.4799	0.5772	0.6750	0.7739	0.8696
	REML	0.0907	0.1865	0.2845	0.3818	0.4799	0.5772	0.6750	0.7739	0.8696
	ML	0.0948	0.1924	0.2913	0.3896	0.4883	0.5866	0.6850	0.7843	0.8812
BD53[II]	HENDER	0.0965	0.1958	0.2947	0.3937	0.4928	0.5919	0.6911	0.7899	0.8896
	MINQUE	0.0965	0.1958	0.2947	0.3937	0.4928	0.5919	0.6911	0.7899	0.8896
	REML	0.0965	0.1958	0.2947	0.3937	0.4928	0.5919	0.6911	0.7899	0.8896
	ML	0.0984	0.1981	0.2976	0.3972	0.4967	0.5963	0.6958	0.7953	0.8952
UD35[I]	HENDER	0.0891	0.1858	0.2835	0.3836	0.4785	0.5777	0.6767	0.7750	0.8718
	MINQUE	0.0891	0.1857	0.2834	0.3835	0.4784	0.5776	0.6765	0.7749	0.8716
	REML	0.0892	0.1858	0.2835	0.3837	0.4786	0.5777	0.6768	0.7750	0.8717
	ML	0.0931	0.1909	0.2894	0.3896	0.4860	0.5853	0.6848	0.7838	0.8815
UD35[II]	HENDER	0.0901	0.1893	0.2867	0.3863	0.4842	0.5830	0.6812	0.7789	0.8765
	MINQUE	0.0896	0.1886	0.2859	0.3856	0.4831	0.5822	0.6799	0.7776	0.8749
	REML	0.0902	0.1893	0.2868	0.3863	0.4843	0.5831	0.6813	0.7789	0.8764
	ML	0.0941	0.1936	0.2920	0.3917	0.4905	0.5898	0.6884	0.7870	0.8854
UD35[III]	HENDER	0.0954	0.1948	0.2939	0.3932	0.4926	0.5918	0.6919	0.7905	0.8900
	MINQUE	0.0952	0.1946	0.2937	0.3930	0.4924	0.5916	0.6916	0.7903	0.8897
	REML	0.0954	0.1948	0.2939	0.3932	0.4926	0.5919	0.6919	0.7905	0.8900
	ML	0.0974	0.1970	0.2964	0.3961	0.4958	0.5953	0.6953	0.7945	0.8943
UD53[I]	HENDER	0.0932	0.1910	0.2895	0.3883	0.4863	0.5839	0.6827	0.7819	0.8797
	MINQUE	0.0932	0.1909	0.2895	0.3882	0.4863	0.5839	0.6827	0.7819	0.8796
	REML	0.0932	0.1909	0.2895	0.3882	0.4863	0.5839	0.6827	0.7819	0.8797
	ML	0.0967	0.1956	0.2947	0.3941	0.4931	0.5916	0.6910	0.7907	0.8893
UD53[II]	HENDER	0.0946	0.1928	0.2906	0.3902	0.4885	0.5873	0.6863	0.7842	0.8825
	MINQUE	0.0946	0.1927	0.2906	0.3902	0.4885	0.5873	0.6862	0.7842	0.8825
	REML	0.0946	0.1928	0.2906	0.3902	0.4885	0.5873	0.6863	0.7842	0.8825
	ML	0.0976	0.1967	0.2957	0.3955	0.4945	0.5940	0.6935	0.7924	0.8916
UD53[III]	HENDER	0.0975	0.1967	0.2957	0.3953	0.4946	0.5940	0.6929	0.7928	0.8920
	MINQUE	0.0974	0.1967	0.2957	0.3953	0.4946	0.5939	0.6928	0.7928	0.8920
	REML	0.0975	0.1967	0.2957	0.3953	0.4946	0.5940	0.6929	0.7928	0.8920
	ML	0.0989	0.1986	0.2981	0.3979	0.4976	0.5973	0.6968	0.7968	0.8964

[표4.3] 모형2에 대한 추정량들의 추정된 MSE값

실험계획	추정량	ρ								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
BD35[I]	HENDER	0.0094	0.0301	0.0704	0.1332	0.2120	0.3132	0.4354	0.5757	0.7337
	MINQUE	0.0094	0.0301	0.0704	0.1332	0.2120	0.3132	0.4354	0.5757	0.7337
	REML	0.0094	0.0301	0.0704	0.1332	0.2120	0.3132	0.4354	0.5757	0.7337
	ML	0.0087	0.0320	0.0751	0.1399	0.2216	0.3251	0.4497	0.5927	0.7537
BD35[II]	HENDER	0.0080	0.0350	0.0819	0.1491	0.2356	0.3432	0.4692	0.6166	0.7839
	MINQUE	0.0080	0.0350	0.0819	0.1491	0.2356	0.3432	0.4692	0.6166	0.7839
	REML	0.0080	0.0350	0.0819	0.1491	0.2356	0.3432	0.4692	0.6166	0.7839
	ML	0.0085	0.0364	0.0842	0.1523	0.2397	0.3481	0.4752	0.6233	0.7914
BD53[I]	HENDER	0.0089	0.0317	0.0748	0.1365	0.2225	0.3222	0.4478	0.5911	0.7524
	MINQUE	0.0089	0.0317	0.0748	0.1365	0.2225	0.3222	0.4478	0.5911	0.7524
	REML	0.0089	0.0317	0.0748	0.1365	0.2225	0.3222	0.4478	0.5911	0.7524
	ML	0.0087	0.0346	0.0808	0.1459	0.2342	0.3380	0.4659	0.6126	0.7771
BD53[II]	HENDER	0.0083	0.0361	0.0838	0.1512	0.2383	0.3461	0.4728	0.6218	0.7896
	MINQUE	0.0083	0.0361	0.0838	0.1512	0.2383	0.3461	0.4728	0.6218	0.7896
	REML	0.0083	0.0361	0.0838	0.1512	0.2383	0.3461	0.4728	0.6218	0.7896
	ML	0.0090	0.0379	0.0867	0.1552	0.2436	0.3526	0.4808	0.6302	0.7993
UD35[I]	HENDER	0.0079	0.0318	0.0759	0.1396	0.2237	0.3304	0.4516	0.5959	0.7644
	MINQUE	0.0079	0.0318	0.0759	0.1396	0.2235	0.3301	0.4515	0.5957	0.7642
	REML	0.0079	0.0318	0.0759	0.1397	0.2237	0.3304	0.4516	0.5960	0.7645
	ML	0.0081	0.0337	0.0793	0.1450	0.2307	0.3384	0.4621	0.6083	0.7775
UD35[II]	HENDER	0.0078	0.0333	0.0782	0.1433	0.2278	0.3354	0.4588	0.6027	0.7681
	MINQUE	0.0078	0.0330	0.0777	0.1426	0.2269	0.3339	0.4574	0.6006	0.7659
	REML	0.0078	0.0334	0.0784	0.1435	0.2280	0.3357	0.4592	0.6030	0.7686
	ML	0.0082	0.0352	0.0817	0.1484	0.2344	0.3431	0.4683	0.6137	0.7810
UD35[III]	HENDER	0.0083	0.0359	0.0840	0.1517	0.2389	0.3461	0.4740	0.6226	0.7904
	MINQUE	0.0083	0.0358	0.0839	0.1515	0.2386	0.3459	0.4735	0.6221	0.7898
	REML	0.0083	0.0359	0.0840	0.1517	0.2389	0.3463	0.4739	0.6226	0.7904
	ML	0.0087	0.0370	0.0857	0.1540	0.2419	0.3500	0.4784	0.6274	0.7959
UD53[I]	HENDER	0.0080	0.0331	0.0789	0.1441	0.2302	0.3343	0.4595	0.6048	0.7707
	MINQUE	0.0080	0.0331	0.0789	0.1441	0.2302	0.3343	0.4595	0.6049	0.7708
	REML	0.0080	0.0332	0.0790	0.1441	0.2303	0.3344	0.4598	0.6052	0.7713
	ML	0.0086	0.0359	0.0838	0.1510	0.2390	0.3458	0.4731	0.6203	0.7886
UD53[II]	HENDER	0.0080	0.0341	0.0802	0.1468	0.2328	0.3414	0.4641	0.6098	0.7771
	MINQUE	0.0080	0.0341	0.0802	0.1468	0.2329	0.3414	0.4641	0.6098	0.7771
	REML	0.0081	0.0342	0.0807	0.1472	0.2333	0.3416	0.4647	0.6108	0.7783
	ML	0.0087	0.0366	0.0848	0.1529	0.2408	0.3501	0.4762	0.6241	0.7927
UD53[III]	HENDER	0.0086	0.0369	0.0852	0.1539	0.2415	0.3499	0.4779	0.6252	0.7949
	MINQUE	0.0086	0.0369	0.0852	0.1539	0.2415	0.3500	0.4779	0.6252	0.7948
	REML	0.0086	0.0369	0.0852	0.1539	0.2415	0.3500	0.4778	0.6251	0.7950
	ML	0.0091	0.0383	0.0874	0.1567	0.2453	0.3546	0.4833	0.6319	0.8019

[표4.4] 모형2에 대한 추정량들의 추정된 절대편의값

실험계획	추정량	ρ								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
BD35[I]	HENDER	0.0873	0.1638	0.2554	0.3571	0.4535	0.5540	0.6551	0.7547	0.8527
	MINQUE	0.0873	0.1638	0.2554	0.3571	0.4535	0.5540	0.6551	0.7547	0.8527
	REML	0.0873	0.1638	0.2554	0.3571	0.4535	0.5540	0.6551	0.7547	0.8527
	ML	0.0863	0.1716	0.2672	0.3688	0.4662	0.5666	0.6675	0.7673	0.8656
BD35[II]	HENDER	0.0863	0.1851	0.2848	0.3851	0.4846	0.5852	0.6844	0.7847	0.8849
	MINQUE	0.0863	0.1851	0.2848	0.3851	0.4846	0.5852	0.6844	0.7847	0.8849
	REML	0.0863	0.1851	0.2848	0.3851	0.4846	0.5852	0.6844	0.7847	0.8849
	ML	0.0901	0.1895	0.2893	0.3897	0.4891	0.5896	0.6890	0.7892	0.8894
BD53[I]	HENDER	0.0874	0.1711	0.2663	0.3630	0.4672	0.5635	0.6659	0.7661	0.8648
	MINQUE	0.0874	0.1711	0.2663	0.3630	0.4672	0.5635	0.6659	0.7661	0.8648
	REML	0.0874	0.1711	0.2663	0.3630	0.4672	0.5635	0.6659	0.7661	0.8648
	ML	0.0894	0.1820	0.2811	0.3791	0.4820	0.5796	0.6811	0.7815	0.8803
BD53[II]	HENDER	0.0887	0.1886	0.2886	0.3881	0.4875	0.5878	0.6872	0.7882	0.8883
	MINQUE	0.0887	0.1886	0.2886	0.3881	0.4875	0.5878	0.6872	0.7882	0.8883
	REML	0.0887	0.1886	0.2886	0.3881	0.4875	0.5878	0.6872	0.7882	0.8883
	ML	0.0937	0.1941	0.2940	0.3936	0.4933	0.5936	0.6932	0.7937	0.8939
UD35[I]	HENDER	0.0835	0.1721	0.2702	0.3699	0.4700	0.5726	0.6698	0.7702	0.8729
	MINQUE	0.0835	0.1721	0.2702	0.3699	0.4697	0.5724	0.6697	0.7700	0.8727
	REML	0.0835	0.1722	0.2702	0.3700	0.4699	0.5726	0.6699	0.7702	0.8729
	ML	0.0858	0.1793	0.2783	0.3785	0.4785	0.5804	0.6784	0.7788	0.8809
UD35[II]	HENDER	0.0836	0.1783	0.2763	0.3762	0.4753	0.5778	0.6760	0.7752	0.8753
	MINQUE	0.0838	0.1772	0.2750	0.3749	0.4742	0.5762	0.6748	0.7736	0.8739
	REML	0.0840	0.1787	0.2766	0.3764	0.4756	0.5780	0.6763	0.7753	0.8756
	ML	0.0873	0.1852	0.2838	0.3839	0.4830	0.5850	0.6835	0.7827	0.8831
UD35[III]	HENDER	0.0890	0.1882	0.2891	0.3889	0.4883	0.5879	0.6881	0.7888	0.8888
	MINQUE	0.0887	0.1879	0.2889	0.3887	0.4879	0.5877	0.6877	0.7885	0.8885
	REML	0.0890	0.1883	0.2892	0.3890	0.4883	0.5880	0.6881	0.7887	0.8888
	ML	0.0920	0.1916	0.2923	0.3921	0.4915	0.5914	0.6915	0.7919	0.8920
UD53[I]	HENDER	0.0849	0.1771	0.2776	0.3767	0.4777	0.5763	0.6762	0.7762	0.8767
	MINQUE	0.0849	0.1771	0.2776	0.3767	0.4777	0.5763	0.6762	0.7763	0.8768
	REML	0.0849	0.1773	0.2777	0.3768	0.4778	0.5763	0.6765	0.7765	0.8770
	ML	0.0899	0.1872	0.2880	0.3874	0.4880	0.5872	0.6871	0.7870	0.8876
UD53[II]	HENDER	0.0859	0.1808	0.2806	0.3812	0.4809	0.5832	0.6802	0.7800	0.8806
	MINQUE	0.0859	0.1809	0.2806	0.3812	0.4810	0.5832	0.6802	0.7800	0.8807
	REML	0.0862	0.1812	0.2816	0.3818	0.4816	0.5834	0.6806	0.7807	0.8814
	ML	0.0913	0.1897	0.2903	0.3904	0.4901	0.5913	0.6897	0.7897	0.8900
UD53[III]	HENDER	0.0907	0.1912	0.2913	0.3919	0.4911	0.5913	0.6911	0.7905	0.8914
	MINQUE	0.0907	0.1912	0.2913	0.3919	0.4911	0.5913	0.6911	0.7904	0.8914
	REML	0.0907	0.1912	0.2913	0.3919	0.4910	0.5913	0.6910	0.7904	0.8914
	ML	0.0948	0.1953	0.2954	0.3957	0.4951	0.5954	0.6951	0.7948	0.8954

5. 결론

본 논문에서는 이원배치모형에서 급내상관계수에 대한 여러 가지 점추정량의 평균자승오차와 절대편의를 모의실험을 통하여 서로 비교하여 보았다. 결론적으로 이원배치모형에서의 급내상관계수는 추정량의 종류에 큰 영향을 받지 않는 것으로 나타났으며, 계산량이 작은 헨더슨의 방법 III 추정량을 사용하는 것이 바람직하다고 판명되었다. 하지만 SAS나 SPSS와 같은 통계패키지들을 이용하는 경우에는 본 논문에서 고려한 MINQUE, REML추정량, ML추정량은 쉽게 구할 수 있으나, 헨더슨의 방법 III 추정량을 구하기 위해서는 프로그램을 따로 작성하여야 되는 불편함이 있다. 일반적으로 Swallow와 Monahan(1984), Khattree와 Gill(1989)의 논문을 통하여 알 수 있듯이 분산성분만을 추정하는 경우에는 최우추정량을 사용하는 것이 일원변량모형이나, 이원변량모형, 이원혼합모형에서 평균자승오차가 다른 추정량에 비하여 작은 것으로 알려져 있다. 하지만 최우추정량을 이용하는 경우에 본 논문에서 고려한 이원혼합모형에서는 급내상관계수인 경우에 평균자승오차의 관점에서 다른 추정량에 비하여 효율성이 약간 떨어지는 것으로 나타났다. 이 사실은 어떤 추정량이 분산성분을 추정하는 경우에 효율적이라고 해서 분산성분의 비선형함수에 대하여서도 바람직하다는 사실은 항상 옳다고 할 수 없다는 것을 의미한다. 따라서 앞으로 분산성분의 비선형함수의 모양과 분산성분추정량의 관계를 해석적으로 분명하게 설명할 수 있는 노력이 필요하다고 할 수 있겠다.

참 고 문 헌

- [1] Arteaga, C., Jeyaratnam, S., and Graybill, F. A. (1982). Confidence Intervals for Proportions of Total Variance in the Two-way Cross Component of Variance Model, *Commun. Statist.-Theor. Meth.*, 11, 1643-1658.
- [2] Donner, A. and Koval, J. J. (1980). The Estimation of Intraclass Correlation in the Analysis of Family Data, *Biometrics*, 36, 19-25.
- [3] Graybill, F. A. and Wang, C. M. (1979). Confidence Intervals for Proportions of Variability in Two-Factor Nested Variance Component Models, *Journal of the American Statistical Association*, 74, 368-374.
- [4] Hartley, H. O. and Rao, J. N. K. (1967). Maximum Likelihood Estimation for the Mixed Analysis of Variance Model, *Biometrika*, 54, 93-108.
- [5] Henderson, C. R. (1953). Estimation of Variance and Covariance Components, *Biometrics*, 9, 226-252.
- [6] Joseph, L. F. (1986). *The Design and Analysis of Clinical Experiments*, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Khattree, R. and Gill, D. S. (1989). On Four Variance Components Estimation Methods Available in SAS, *Proceedings of the Statistical Computing Section, American Statistical Association*. 325-330.

- [8] Lee, J. T. and Kim, B. C. (1988). A New Approach for the W-matrix, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol.29, 241-254.
- [9] Palmer, J. L. and Broemeling, L. D. (1990). A Comparison of Bayes and Maximum Likelihood Estimation of the Intraclass Correlation Coefficient, *Commun. Statist. - Theor. Meth.*, Vol. 19(3), 953-975.
- [10] Patterson, H. D. and Thompson, R. (1971). Recovery of Interblock Information When Block Sizes are Unequal, *Biometrika*, 58, 545-554.
- [11] Rao, C. R. (1971). Estimation of Variance Components-MINQUE Theory, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol.1, 257 - 275.
- [12] Rao, C. R. and Kleffe, J. (1988). *Estimation of Variance Components and Applications*, Amsterdam: North-Holland.
- [13] Searle, S. R. (1987). *Linear Models for Unbalanced Data*, John Wiley & Sons, New York.
- [14] Srinivasan, S. and Graybill, F. A. (1991). Confidence Intervals for Proportions of Total Variance in Unbalanced Two-way Components of Variance Models Using Unweighted means, *Commun. Statist.-Theor. Meth.*, 20(2), 511-526.
- [15] Swallow, W. H. and Monahan, J. F. (1984). Monte-Carlo Comparison of ANOVA, MINQUE, REML and ML Estimators of Variance Components, *Technometrics*. Vol. 26, 47-57.