The Korean Communications
in Statistics Vol. 5, No. 2, 1998
pp. 315-326

# 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부의 판단에 관한 연구

배 종 성[1) ], 김 진[2)]

## 요약

균형된 불완비 블록계획이 존재하지 않는 경우 동반수가 연속적인 두 개의 정수값을 갖는 정규그래프계획(Regular Graph Designs :RGD)은 불완비 블록계획중에서 가장 효율적인 계획이 됨을 추측하였다(John과 Mitchell,1977). Brown(1988)은 주어진 모수를 이용하여 정규그래프계획의 존재 여부를 판단하는 방법을 연구하였다. 본 논문에서는 정규그래프계획의 존재여부를 판단하는 방법을 동반수가 3인 블록계획으로 확장하여 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획중에서 동반수가 3인 가장 균형된계획(3-concurrence most balanced designs)의 존재여부를 판단하는 방법을 제시하였다.

블록계획이란 실험에 사용되는 실험의 플롯(plot)들이 균일하지 않는 경우 실험의 정도를 높이기 위해서 플롯들이 비슷한 성질들로 묶이도록 층화하여 임의 배치하는 계획을 말한다. 이때, 경제적인 면이나 블록 크기의 제약으로 인하여 한 블록 내에 모든 처리를 다 배치시킬수 없는 경우의 배치계획을 불완비 블록계획(incomplete block designs)이라 한다.

불완비 블록계획에서 크기 $v\times b$ 행렬인 빈도행렬(incidence matrix)을 $N=((n_{ij}))$라면 $n_{ij}$의 값이 0 또는 1이면 이분계획(binary design)이라 한다. 또한 모든 블록의 크기가 동일한 계획을 블록크기가 같은 계획(proper design)이라 하고, 모든 처리의 반복수가 동일한 계획을 반복수가 같은 계획(equi-replicate design)이라 한다. 우리는 블록의 크기와 반복수가 같은 이분계획(proper binary equi-replicate design)만을 생각하기로 한다.

처리수 $v$, 블록수 $b$, 블록의 크기 $k$, 처리 반복수 $r$을 갖는 불완비 블록계획의 모형은 다음과 같다.

$$y_{ij}=\mu+\tau_i+\beta_j+e_{ij}\ \ ;i=1,2,\cdots,v\ \ ;j=1,2,\cdots,b$$

여기서 $\mu$는 전체 평균, $\tau_i$는 $i$번째 처리효과, $\beta_j$는 $j$번째 블록효과, $e_{ij}$는 평균이 0이고 분산이 $\sigma^2$인 정규분포를 따르는 오차항이다.

---

1) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300번지 전남대학교 통계학과 교수.
2) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300번지 전남대학교 통계학과 대학원.

불완비 블록계획의 크기 $v \times v$인 구조행렬(concurrence matrix)을 $NN^t = ((\lambda_{ij}))$라면 $\lambda_{ii} = r$이고, $\lambda_{ij}(i \neq j = 1 \cdots v)$는 임의의 처리 $i$와 $j$를 동시에 포함하는 블록의 수를 나타낸다. 이때 서로 다른 $\lambda_{ij}(i \neq j = 1 \cdots v)$ 값들의 가지 수를 동반수(association class)라 정의한다. $\lambda_{ij}$의 비대각선 원소가 같은 값을 갖는 동반수가 1인 경우를 균형된 불완비 블록계획(Balanced Incomplete Block Designs : BIBD)이라 하고 불완비 블록계획중에서 가장 효율적인 계획이다(Kiefer, 1959). 따라서 주어진 $v, k, b, r$로 구성되는 균형된 불완비 블록계획을 찾는 것이 문제가 되는데 블록이 수를 제한하지 않는다면 주어진 $v, k, b, r$로 구성되는 균형된 불완비 블록계획은 존재한다. 그러나 이 경우 실험의 횟수가 늘어 나므로 문제를 해결하는 방법으로 Bose와 Nair(1939)는 블록 수를 줄이는 대신 모든 처리가 블록에서 같은 횟수로 만난다는 균형성을 포기한 부분적으로 균형된 불완비 블록계획(Partially Balanced Incomplete Block Designs : PBIBD)을 생각해 내었다.

동반수가 2인 여러 가지 블록계획 중에서 $\lambda_{ij}$가 연속된 두 개의 정수값을 가지면 정규그래프계획이라 한다(John과 Mitchell). 정규그래프계획은 Takechi (1961)가 분해가능계획(group divisible designs)중에서 $\lambda_1 = \lambda_2 + 1$ 인 경우 E-최적이 됨을 보인 이래 많은 연구가 되었다. 특히 John과 Mitchell은 정규그래프계획이 블록계획중에서 가장 최적인 계획이 된다고 추측하고 균형된 불완비 블록계획과 가장 유사한 블록계획이라는 의미에서 "거의 균형된(nearly balanced)" 계획이라고 하였다.

동반수가 3인 블록계획중에서 $\lambda_{ij}$가 연속된 세 개의 정수값을 갖는 블록계획을 동반수가 3인 가장 균형된계획이라 정의했다(Sinha와 Kageyama, 1992). 동반수가 3인 가장 균형된계획은 (M.S)-최적 조건을 만족하며(배종성, 1997) 동반수가 3인 블록계획 중에서 "거의 균형된" 계획이다. 실험을 계획하는 단계에서 우리는 효율과 실험의 횟수를 먼저 생각하게 된다. 효율의 측면에서 주어진 모수 $v, b, r, k$에 따르는 동반수가 1인 계획이 존재하면 균형된 불완비 블록계획을 사용하고 그렇지 않으면 동반수가 2인 계획 중에서 "거의 균형된" 계획인 정규그래프계획을 사용한다. 정규그래프계획도 존재하지 않으면 동반수가 3인 계획 중에서 "거의 균형된" 계획인 동반수가 3인 가장 균형된계획을 사용한다. 이러한 이유로 Brown은 모수가 주어졌을 때 주어진 모수를 이용해 정규그래프계획의 존재 여부를 판단하는 방법을 제시했다.

본 논문에서는 동반수가 2인 정규그래프계획의 존재여부를 판단하는 방법을 동반수 3으로 확장하여, 모수가 주어졌을 때 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획중에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부를 판단하는 방법을 제시하고자 하였다.

## 2. 정규그래프계획

John과 Mitchell은 $\lambda_{ij}$가 연속되는 두 정수값을 갖는 불완비 블록계획을 정규그래프계획이라 정의했다. 우리는 편의상 두 동반수를 $\lambda_1$ , $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$로 쓰도록 한다.

John과 Mitchell은 정규그래프계획의 $NN^t$를 다음과 같이 표현했다.

$$NN^t = (r - \lambda_1)I + \lambda_1 J + T \tag{2.1}$$

여기서 $\boldsymbol{I}$는 크기 $v \times v$인 단위행렬이고 $\boldsymbol{J}$는 $v \times v$인 모든 원소가 1인 행렬이다. 또한 $\boldsymbol{T}$는 정도(degree) $t$인 정규그래프의 인접행렬(adjacency matrix)이며 대각 원소는 0, 비대각 원소는 0과 1로 구성된다. $v$개의 꼭지점을 갖는 그래프에서 $T_{ij}=1$ 이면 꼭지점 $i$는 꼭지점 $j$와 연결되고 연결된 수 $t$가 정도이다. 모든 꼭지점의 정도가 같은 그래프가 정규그래프이다. John과 Mitchell은 $\boldsymbol{T}$를 이용하여 $v=12$이고 정도가 5인 경우만을 제외하고 $v \leq 12, r \leq 10, k \leq 10$ 인 모든 가능한 정규그래프계획을 찾아 표로 제시하였다.

불완비 블록계획에서 각 $\lambda_i (i=1 \cdots m)$에 대응되는 처리의 수를 $n_i$라 할 때 다음의 식을 만족한다.

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = v-1 , \qquad \sum_{i=1}^{m} n_i \lambda_i = r(k-1) \tag{2.2}$$

정규그래프계획은 (2.2)식에서 $m=2$ 이므로

$$n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 = r(k-1) \tag{2.3}$$

이고, $\lambda_1$과 $\lambda_2$를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\lambda_1 = \lfloor \lambda \rfloor , \qquad \lambda_2 = \lfloor \lambda \rfloor + 1 \tag{2.4}$$

여기서 $\lfloor \ \rfloor$는 소수점 이하는 무조건 버리는 함수(floor function)이고 $\lambda_{ij}$의 평균 $\lambda$는

$$\lambda = r(k-1)/v-1$$

이며 정수가 아니어야 한다.

(2.3)식과 (2.4)식에 의해서

$$n_1 = (v-1)( \lfloor \lambda \rfloor + 1 - \lambda)$$
$$n_2 = (v-1)(\lambda - \lfloor \lambda \rfloor )$$

이다.

균형된 불완비 블록계획은 정수의 $\lambda$값을 갖는다. 균형된 불완비 블록계획이 존재하지 않는 경우 균형된 불완비 블록계획에 유사한 계획은 $\lambda_{ij}$가 단지 두 개의 값만 갖고 그 두 값이 가능한한 가까운 값을 갖는 계획이다. Brown은 불완비 블록계획이 균형된 불완비 블록계획에 얼마나 유사한가를 나타내는 "유사(approximation)"의 측도로서 불균형성(imbalance) $\sigma$와 비대칭성(asymmetry) $\tau$를 다음과 같이 정의했다.

$$\sigma = \sum_{i<j} (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor )^2$$

$$\tau = \sum_{l<m} (\mu_{lm} - \lfloor \mu \rfloor)^2$$

**정리 1** (Brown, 1988) 블록계획에서

$$\sigma_0 = \frac{bk(k-1)}{2} - \frac{\lfloor \lambda \rfloor v(v-1)}{2},$$
$$\tau_0 = \frac{vr(r-1)}{2} - \frac{\lfloor \mu \rfloor b(b-1)}{2}$$

로 정의하면 $\sigma \geq \sigma_0$, $\tau \geq \tau_0$ 이고 $\sigma = \sigma_0$ 이면 정규그래프계획이다.

또한

$$\tau - \sigma = \frac{vr(r-1)}{2}(1-2\lfloor \mu \rfloor) - \frac{bk(k-1)}{2}(1-2\lfloor \lambda \rfloor)$$
$$+ \frac{b(b-1)}{2}\lfloor \mu \rfloor^2 - \frac{v(v-1)}{2}\lfloor \lambda \rfloor^2$$

이다.

위 정리는 모수 $v$, $r$, $k$, $b$가 주어졌을 때 정규그래프계획이 존재하는가를 판정하는데 사용된다. 예를 들면 $v=8, r=3, k=4, b=6$인 블록계획에서는 $\sigma_0=8$, $\tau_0=9$, $\tau-\sigma=-1$이다. 만약 정규그래프계획이라면 $\sigma=\sigma_0=8$ 이고 $\tau=7$ 이 된다. 따라서 $\tau < \tau_0$이므로 (정리 1)에 의해 $v=8, r=3, k=4, b=6$인 정규그래프계획은 존재하지 않는다.

John과 Mitchell은 (2.1)식을 사용해서 $v \leq 12$, $r \leq 10$, $k \leq 10$ 인 209가지의 정규그래프계획을 찾았다. 우리는 (정리 1)을 이용하여 SAS 프로그램으로 $v \leq 12$, $r \leq 10$, $k \leq 10$ 인 정규그래프계획을 John과 Mitchell의 209가지 계획을 포함하여 31가지를 더 찾아 내어 부록 1에 제시하고, 프로그램은 부록 2에 제시했다.

## 3. 동반수가 3인 가장 균형된계획

대부분의 블록실험은 설계단계에서 주어진 $v, b, k, n$가 실험조건이 될 것이다. 실험의 효율이라는 면에서 주어진 조건을 만족하는 BIBD나 RGD가 존재하지 아니하는 경우 동반수가 3인 가장 균형된계획을 찾아야 한다.

본 연구에서는 모수만을 가지고 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획중에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부를 판단하는 방법을 제시하고자 한다. 동반수가 3인 가장 균형된계획의 연속된 세 $\lambda_{ij}$값을 $\lambda_i < \lambda_j < \lambda_k$ 라 하자.

불균형성 $\sigma$를 계산하기 위해서 $\lambda - \lfloor \lambda \rfloor$의 값이 0에 가까운 경우와 1에 가까운 경우 두가지로 나누어 생각한다(John 과 Whitaker,1993).

### 3.1 $\lambda - \lfloor \lambda \rfloor$ 값이 0에 가까운 경우

$\lambda - \lfloor \lambda \rfloor < 0.5$ 즉, $\lambda - \lfloor \lambda \rfloor$ 값이 0에 가까운 경우 $\lambda_i$, $\lambda_j$, $\lambda_k$는 다음과 같다.

$$\lambda_i = \lfloor \lambda \rfloor - 1$$
$$\lambda_j = \lfloor \lambda \rfloor$$
$$\lambda_k = \lfloor \lambda \rfloor + 1$$

(2.2)식에 의해서

$$2n_i + n_j = (v-1)(\lfloor \lambda \rfloor + 1 - \lambda) > 0$$
$$n_i - n_k = (v-1)(\lambda - \lfloor \lambda \rfloor) \geq 0$$

이다.

**정리 2** $\lambda - \lfloor \lambda \rfloor < 0.5$ 인 경우 동반수가 3인 가장 균형된계획의 불균형성 $\sigma$는 다음과 같다.

$$\sigma = \frac{(n_i + n_k)v}{2}$$

**(증명)** 먼저, 주어진 $i$와 $j$에 대해서

$$\delta_{ij} = (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1)$$
$$\delta_{ij(1)} = (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor + 1)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor) + 2(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1)$$

라면

$$\sum_{i<j} \delta_{ij} = \sum (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1)$$
$$= \sigma - \sigma_0 \tag{3.1}$$
$$\sum_{i<j} \delta_{ij(1)} = \sum (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor + 1)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor) + 2\sum (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1)$$
$$= 3\sum (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)^2 - \sum (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)$$
$$= 3\sigma - \sigma_0$$

동반수가 3인 가장 균형된계획인 경우에는

$$\sum \delta_{ij} = \sigma - \sigma_0 = (2n_i)v/2 = n_i v$$
$$\sum \delta_{ij(1)} = 3\sigma - \sigma_0 = (4n_i + 2n_k)v/2 = (2n_i + n_k)v$$

이므로

$$\sigma = \frac{(n_i + n_k)v}{2}$$

이다. ■

### 3.2 $\lambda - \lfloor \lambda \rfloor$ 값이 1에 가까운 경우

$\lambda - \lfloor \lambda \rfloor \geq 0.5$즉, $\lambda - \lfloor \lambda \rfloor$ 값이 1에 가까운 경우 $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$는 다음과 같다.

$$\lambda_i = \lfloor \lambda \rfloor$$
$$\lambda_j = \lfloor \lambda \rfloor + 1$$
$$\lambda_k = \lfloor \lambda \rfloor + 2$$

(2.2)식에 의해서

$$2n_i + n_j = (v-1)(\lfloor \lambda \rfloor + 2 - \lambda) > 0$$
$$n_i - n_k = (v-1)(\lfloor \lambda \rfloor + 1 - \lambda) \geq 0$$

이다.

**정리 3** $\lambda - \lfloor \lambda \rfloor \geq 0.5$ 인 경우 동반수가 3인 가장 균형된계획의 불균형성 $\sigma$는 다음과 같다.

$$\sigma = \frac{(n_j + 4n_k)v}{2}$$

**(증명)** (정리 2)와 같은 방법으로

$$\delta_{ij} = (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1)$$
$$\delta_{ij(2)} = (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1) + (\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 2)$$

라면

$$\sum_{i<j} \delta_{ij(2)} = \sum(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1) + \sum(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 1)(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor - 2)$$
$$= 2\sum(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor)^2 - 4\sum(\lambda_{ij} - \lfloor \lambda \rfloor) + 2\binom{v}{2}$$
$$= 2\sigma - 4\sigma_0 + v(v-1)$$

동반수가 3인 가장 균형된계획인 경우에는 (3.1)식에서

$$\sum \delta_{ij} = \sigma - \sigma_0 = (2n_k)v/2 = n_k v$$

이고

$$\sum \delta_{ij(2)} = 2\sigma - 4\sigma_0 + v(v-1) = (2n_i + 2n_k)v/2 = (n_i + n_k)v$$

이므로

$$\sigma = \frac{(n_j + 4n_k)v}{2}$$

이다. ■

각 $n_i, n_j, n_k$는 (2.2)식에서 주어진 모수에 따라 변하는 변수이다. (정리 1), (정리 2), (정리 3)을 이용하여 $v$, $r$, $k$, $b$만 가지고 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재 여부를 판단하려면

$n_i, n_j, n_k$는 변수가 아니라 알려진 상수가 되어야 한다. 이때 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획들의 동반체계(association scheme)를 이용하면 $n_i, n_j, n_k$를 알려진 상수들로 치환할수 있기 때문에 이를 이용하여 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획중에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부를 판단할 수 있다.

동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획중에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부를 판단하기 위한 방법은 먼저 모수 $v, r, k, b$를 가지고 $\lfloor \lambda \rfloor$, $\lfloor \mu \rfloor$를 구한 다음 $\sigma$와 $\tau_0$를 계산한다. 그리고 (정리 1)을 이용하여 $\tau-\sigma$를 계산한 후 $\tau$를 얻는다. 이렇게해서 얻은 $\tau$값이 $\tau \geq \tau_0$인 조건에 맞지 않는다면 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획중에서 동반수가 3인 가장 균형된계획은 존재하지 않는다.

### 3.3 직사각형계획에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부의 판단

직사각형계획(rectangular designs)은 $v = v_1 v_2$개의 처리를 $v_1$행 $v_2$열로 나열했을 때 같은 행에 속한 처리와는 $\lambda_1$, 같은 열에 속한 처리와는 $\lambda_2$, 나머지 처리와는 $\lambda_3$인 관계에 있도록 배치한 블록계획을 말한다. 직사각형계획은 다음과 같은 조건을 만족한다(Vartak,1959).

$$n_1 = v_2 - 1, \quad n_2 = v_1 - 1, \quad n_3 = (v_1 - 1)(v_2 - 1) \tag{3.2}$$

이제 (3.2)식을 이용하여 $v, r, k, b$만 가지고 직사각형계획에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부를 판단할 수 있다.

**[예제1]** $v=12, r=6, k=6, b=12$인 직사각형계획은 $v=4\times 3$, $v_1=4$, $v_2=3$, $\lambda=2.727$, $\lfloor \lambda \rfloor=2$, $\lfloor \mu \rfloor=2$, $\lambda-\lfloor \lambda \rfloor=0.727$ 이고 $\lambda_1=3, \lambda_2=4, \lambda_3=2$ 인 경우 $n_1=2, n_2=3$, $n_3=6$ 이다. $\lambda-\lfloor \lambda \rfloor>0.5$ 이므로 (정리 3)에 의해서

$$\sigma = \frac{(n_1+4n_2)v}{2} = 6\times(2+12) = 84$$

$$\sigma_0 = b\binom{k}{2} - \lfloor \lambda \rfloor \binom{v}{2} = 12\binom{6}{2} - 2\binom{12}{2} = 48$$

$$\tau_0 = v\binom{r}{2} - \lfloor \mu \rfloor \binom{b}{2} = 12\binom{6}{2} - 2\binom{12}{2} = 48$$

$$\tau - \sigma = 12\binom{6}{2}(1-4) - 12\binom{6}{2}(1-4) + \binom{12}{2}2^2 - \binom{12}{2}2^2 = 0$$

$$\tau = 84$$

이다. $\tau > \tau_0$를 만족하므로 $v=12, r=6, k=6, b=12$인 직사각형계획에서 동반수가 3인 가장 균형된계획이 존재한다.

### 3.4 육면체계획에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부의 판단

육면체계획(Cubic designs)은 $v=s^3$인 $v$개의 처리를 육면체의 형태로 배치하여 같은 모서리에 있는 처리는 $\lambda_1$, 평면상으로 대각선상에 있는 처리는 $\lambda_2$, 공간에서 대각선상에 있는 처리는 $\lambda_3$인 관계인 배치계획을 말한다. 육면체계획은 다음의 조건을 만족한다(Raghavarao, *et al.* 1964).

$$n_1=3(s-1),\quad n_2=3(s-1)^2,\quad n_3=(s-1)^3$$

**[예제2]** $v=8, r=4, k=4, b=8$인 육면체계획은 $v=2^3, \lambda=1.7143$, $\lfloor \lambda \rfloor=1$ $\lfloor \mu \rfloor=1$, $\lambda-\lfloor \lambda \rfloor=0.7143$이다. 또한 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$인 경우 $n_1=3, n_2=3, n_3=1$이다. $\lambda-\lfloor \lambda \rfloor>0.5$이므로 (정리 3)에 의해서

$$\sigma=\frac{(n_2+4n_3)v}{2}=4\times(3+4)=28$$

$$\sigma_0=b\binom{k}{2}-\lfloor \lambda \rfloor\binom{v}{2}=8\binom{4}{2}-\binom{8}{2}=20$$

$$\tau_0=v\binom{r}{2}-\lfloor \mu \rfloor\binom{b}{2}=8\binom{4}{2}-\binom{8}{2}=20$$

$$\tau-\sigma=8\binom{4}{2}(1-2)-8\binom{4}{2}(1-2)+\binom{8}{2}-\binom{8}{2}=0$$

$$\tau=28$$

이다. $\tau>\tau_0$를 만족하므로 $v=8,\ r=4,\ k=4,\ b=8$인 육면체계획에서 동반수가 3인 가장 균형된계획이 존재한다.

## 4. 결론

본 논문에서는 동반수가 2인 정규그래프계획을 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획으로 확장하여 주어진 모수만을 가지고 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부를 판단하고자 했다. 그러나 동반수가 3인 경우의 불균형성 $\sigma$는 $n_1,\ n_2,\ n_3$의 함수로 나타낼 수 있고 각 $n_1,\ n_2,\ n_3$는 변수가 되기 때문에 주어진 모수만을 가지고 동반수가 3인 가장 균형된계획의 불균형성 $\sigma$를 구할 수가 없다. 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획인 직사각형계획, 육면체계획 등의 동반체계를 이용하면 각 계획에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 불균형성을 구할수 있다. 따라서 동반수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획에서 동반수가 3인 가장 균형된계획의 존재여부를 판단할 수 있다. 같은 방법으로 동반수가 4이상인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획들의 동반체계를 이용한다면, 이들 계획중에서 동반수 4이상인 가장 균형된계획의 존재여부를 판단할 수 있을 것이다.

## 참고문헌


[1] 배종성 (1977). (M.S)-최적인 동반수 $h(h\geq 2)$을 갖는 가장 균형된계획에 관한 연구. *응용통계연구 제 10권 1호*. 61-68.

[2] Bose, R. C. and Nair, K. R. (1939). Partially balanced incomplete block designs. *Sankhya 4, 337-372.*

[3] Brown, R.B. (1988). Nonexistence of a regular graph design with $v=17$ and $r=6$. *Discrete Mathematics.* 68, 315-318.

[4] Clatworthy, W. H. (1973). *Tables of two associate class partially balanced designs.* National Bureau of Standards Applied Mathematics. Series 47

[5] John, J.A. and T.J. Mitchell (1977). Optimal incomplete block designs. *Journal of the Royal Statistics Society* B 39, 39-43.

[6] John, J.A. and D. Whitaker (1993). Construction of cyclic designs using integer programming. *Journal of Statistical Planning and Inference* 36, 357-366.

[7] Kiefer, J. (1959). Optimum experimental designs. *Journal of the Royal Statistics Society* B 21, 272-319.

[8] Raghavarao,D. and Chandrasekhararao, K. (1964). Cubic designs. *Annals of Mathematical Statistics* 35, 389-397.

[9] Sinha, K. and Kageyama, S. (1992). Constructions of some E-optimal 3-concurrence most balanced designs. *Journal of Statistical Planning and Inference* 31, 127-132.

[10] Takechi, K. (1961). On the optimality of certain types of PBIB designs. *Report on Statistics and Applied Research, J.U.S.E.* 8, 29-33.

[11] Vartak, M. N.(1955). On an application of Kronecker product of matrices to statistical designs. *Annals of Mathematical Statistics* 26, 420-438.

[12] Wallis, W.D. (1996). Regular graph designs. *Journal of Statistical Planning and Inference* 51. 273-281.

# 부록

## 1. $v \leq 12$, $r \leq 10$, $k \leq 10$ 인 정규그래프계획

(John과 Mitchell에서 제시되지 않은 31개 계획은 *표시)

| $v$ | $k$ | $r$ | $b$ | $\lambda$ | $\sigma$ | $v$ | $k$ | $r$ | $b$ | $\lambda$ | $\sigma$ | $v$ | $k$ | $r$ | $b$ | $\lambda$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4* | 2 | 1 | 2 | 0.33 | 2 | 6 | 4 | 6 | 9 | 3.60 | 9 | 8 | 6 | 6 | 8 | 4.29 | 8 |
| 4 | 2 | 2 | 4 | 0.67 | 4 | 6 | 4 | 8 | 12 | 4.80 | 12 | 8 | 6 | 9 | 12 | 6.43 | 12 |
| 4 | 2 | 4 | 8 | 1.33 | 2 | 7 | 2 | 2 | 7 | 0.33 | 7 | 9 | 2 | 2 | 9 | 0.25 | 9 |
| 4 | 2 | 5 | 10 | 1.67 | 4 | 7 | 2 | 4 | 14 | 0.67 | 14 | 9 | 2 | 4 | 18 | 0.50 | 18 |
| 4 | 2 | 7 | 14 | 2.33 | 2 | 7 | 2 | 8 | 28 | 1.33 | 7 | 9 | 2 | 6 | 27 | 0.75 | 27 |
| 4 | 2 | 8 | 16 | 2.67 | 4 | 7 | 2 | 10 | 35 | 1.67 | 14 | 9 | 2 | 10 | 45 | 1.25 | 9 |
| 4 | 2 | 10 | 20 | 3.33 | 2 | 7 | 5 | 5 | 7 | 3.33 | 7 | 9* | 3 | 1 | 3 | 0.25 | 9 |
| 5 | 2 | 2 | 5 | 0.50 | 5 | 7 | 5 | 10 | 14 | 6.67 | 14 | 9 | 3 | 2 | 6 | 0.50 | 18 |
| 5 | 2 | 6 | 15 | 1.50 | 5 | 8* | 2 | 1 | 4 | 0.14 | 4 | 9 | 3 | 3 | 9 | 0.75 | 27 |
| 5 | 2 | 10 | 25 | 2.50 | 5 | 8 | 2 | 2 | 8 | 0.29 | 8 | 9 | 3 | 5 | 15 | 1.25 | 9 |
| 5 | 3 | 3 | 5 | 1.50 | 5 | 8 | 2 | 3 | 12 | 0.43 | 12 | 9 | 3 | 6 | 18 | 1.50 | 18 |
| 5 | 3 | 9 | 15 | 4.50 | 5 | 8 | 2 | 4 | 16 | 0.57 | 16 | 9 | 3 | 7 | 21 | 1.75 | 27 |
| 6* | 2 | 1 | 3 | 0.20 | 3 | 8 | 2 | 5 | 20 | 0.71 | 20 | 9 | 3 | 9 | 27 | 2.25 | 9 |
| 6 | 2 | 2 | 6 | 0.40 | 6 | 8 | 2 | 6 | 24 | 0.86 | 24 | 9 | 3 | 10 | 30 | 2.50 | 18 |
| 6 | 2 | 3 | 9 | 0.60 | 9 | 8 | 2 | 8 | 32 | 1.14 | 4 | 9 | 4 | 4 | 9 | 1.50 | 18 |
| 6 | 2 | 4 | 12 | 0.80 | 12 | 8 | 2 | 9 | 36 | 1.29 | 8 | 9 | 5 | 5 | 9 | 2.50 | 18 |
| 6 | 2 | 6 | 18 | 1.20 | 3 | 8 | 2 | 10 | 40 | 1.43 | 12 | 9* | 6 | 2 | 3 | 1.25 | 9 |
| 6 | 2 | 7 | 21 | 1.40 | 6 | 8 | 3 | 3 | 8 | 0.86 | 24 | 9 | 6 | 4 | 6 | 2.50 | 18 |
| 6 | 2 | 8 | 24 | 1.60 | 9 | 8 | 3 | 6 | 16 | 1.71 | 20 | 9 | 6 | 6 | 9 | 3.75 | 27 |
| 6 | 2 | 9 | 27 | 1.80 | 12 | 8 | 3 | 9 | 24 | 2.57 | 16 | 9 | 6 | 10 | 15 | 6.20 | 9 |
| 6* | 3 | 1 | 2 | 0.40 | 6 | 8* | 4 | 1 | 2 | 0.43 | 12 | 9 | 7 | 7 | 9 | 5.25 | 9 |
| 6* | 3 | 2 | 4 | 0.80 | 12 | 8 | 4 | 4 | 8 | 1.71 | 20 | 10* | 2 | 1 | 5 | 0.11 | 5 |
| 6 | 3 | 3 | 6 | 1.20 | 3 | 8 | 4 | 5 | 10 | 2.14 | 4 | 10 | 2 | 2 | 10 | 0.22 | 10 |
| 6 | 3 | 4 | 8 | 1.60 | 9 | 8 | 4 | 6 | 12 | 2.57 | 16 | 10 | 2 | 3 | 15 | 0.33 | 15 |
| 6 | 3 | 6 | 12 | 2.40 | 6 | 8 | 4 | 8 | 16 | 3.43 | 12 | 10 | 2 | 4 | 20 | 0.44 | 20 |
| 6 | 3 | 7 | 14 | 2.80 | 12 | 8 | 4 | 9 | 18 | 3.86 | 24 | 10 | 2 | 5 | 25 | 0.56 | 25 |
| 6 | 3 | 8 | 16 | 3.20 | 3 | 8 | 4 | 10 | 20 | 4.29 | 8 | 10 | 2 | 6 | 30 | 0.67 | 30 |
| 6 | 3 | 9 | 18 | 3.60 | 9 | 8 | 5 | 5 | 8 | 2.86 | 24 | 10 | 2 | 7 | 35 | 0.78 | 35 |
| 6* | 4 | 2 | 3 | 1.20 | 3 | 8 | 5 | 10 | 16 | 5.71 | 20 | 10 | 2 | 8 | 40 | 0.89 | 40 |
| 6 | 4 | 4 | 6 | 2.40 | 6 | 8* | 6 | 3 | 4 | 2.14 | 4 | 10 | 2 | 10 | 50 | 1.11 | 5 |

| $v$ | $k$ | $r$ | $b$ | $\lambda$ | $\sigma$ | $v$ | $k$ | $r$ | $b$ | $\lambda$ | $\sigma$ | $v$ | $k$ | $r$ | $b$ | $\lambda$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | 3 | 10 | 0.67 | 30 | 12* | 2 | 1 | 6 | 0.09 | 6 | 12 | 5 | 5 | 12 | 1.82 | 54 |
| 10 | 3 | 6 | 20 | 1.33 | 15 | 12 | 2 | 2 | 12 | 0.18 | 12 | 12 | 5 | 10 | 24 | 3.64 | 42 |
| 10* | 4 | 2 | 5 | 0.67 | 30 | 12 | 2 | 3 | 18 | 0.27 | 18 | 12* | 6 | 1 | 2 | 0.45 | 30 |
| 10 | 4 | 4 | 10 | 1.33 | 15 | 12 | 2 | 4 | 24 | 0.36 | 24 | 12 | 6 | 6 | 12 | 2.73 | 48 |
| 10 | 4 | 8 | 20 | 2.67 | 30 | 12* | 2 | 5 | 30 | 0.45 | 30 | 12 | 6 | 7 | 14 | 3.18 | 12 |
| 10 | 4 | 10 | 25 | 3.33 | 15 | 12* | 2 | 6 | 36 | 0.55 | 36 | 12 | 6 | 8 | 16 | 3.64 | 42 |
| 10* | 5 | 1 | 2 | 0.44 | 20 | 12 | 2 | 7 | 42 | 0.64 | 42 | 12 | 6 | 9 | 18 | 4.09 | 6 |
| 10* | 5 | 3 | 6 | 1.33 | 15 | 12 | 2 | 8 | 48 | 0.73 | 48 | 12* | 6 | 10 | 20 | 4.55 | 36 |
| 10 | 5 | 5 | 10 | 2.22 | 10 | 12 | 2 | 9 | 54 | 0.82 | 54 | 12 | 7 | 7 | 12 | 3.82 | 54 |
| 10 | 5 | 6 | 12 | 2.67 | 30 | 12 | 2 | 10 | 60 | 0.91 | 60 | 12* | 8 | 2 | 3 | 1.27 | 18 |
| 10 | 5 | 7 | 14 | 3.11 | 5 | 12 | 3 | 1 | 4 | 0.18 | 12 | 12 | 8 | 4 | 6 | 2.55 | 36 |
| 10 | 5 | 8 | 16 | 3.56 | 25 | 12 | 3 | 2 | 8 | 0.36 | 24 | 12* | 8 | 6 | 9 | 3.82 | 54 |
| 10 | 5 | 10 | 20 | 4.44 | 20 | 12* | 3 | 3 | 12 | 0.55 | 36 | 12 | 8 | 8 | 12 | 5.09 | 6 |
| 10* | 6 | 3 | 5 | 1.67 | 30 | 12 | 3 | 4 | 16 | 0.73 | 48 | 12 | 8 | 10 | 15 | 6.36 | 24 |
| 10 | 6 | 6 | 10 | 3.33 | 15 | 12 | 3 | 5 | 20 | 0.91 | 60 | 12* | 9 | 3 | 4 | 2.18 | 12 |
| 10 | 7 | 7 | 10 | 4.67 | 30 | 12 | 3 | 6 | 24 | 1.09 | 6 | 12 | 9 | 6 | 8 | 4.36 | 24 |
| 10* | 8 | 4 | 5 | 3.11 | 5 | 12 | 3 | 7 | 28 | 1.27 | 18 | 12* | 9 | 9 | 12 | 6.55 | 36 |
| 10 | 8 | 8 | 10 | 6.22 | 10 | 12* | 3 | 8 | 32 | 1.45 | 30 | 12* | 10 | 5 | 6 | 4.09 | 6 |
| 11 | 2 | 2 | 11 | 0.20 | 11 | 12 | 3 | 9 | 36 | 1.64 | 42 | 12 | 10 | 10 | 12 | 8.18 | 12 |
| 11 | 2 | 4 | 22 | 0.40 | 22 | 12 | 3 | 10 | 40 | 1.82 | 54 | | | | | | |
| 11 | 2 | 6 | 33 | 0.60 | 33 | 12* | 4 | 1 | 3 | 0.27 | 18 | | | | | | |
| 11 | 2 | 8 | 44 | 0.80 | 44 | 12 | 4 | 2 | 6 | 0.55 | 36 | | | | | | |
| 11 | 3 | 3 | 11 | 0.60 | 33 | 12* | 4 | 3 | 9 | 0.82 | 54 | | | | | | |
| 11 | 3 | 6 | 22 | 1.20 | 11 | 12 | 4 | 4 | 12 | 1.09 | 6 | | | | | | |
| 11 | 3 | 9 | 33 | 1.80 | 44 | 12 | 4 | 5 | 15 | 1.36 | 24 | | | | | | |
| 11 | 4 | 4 | 11 | 1.20 | 11 | 12 | 4 | 6 | 18 | 1.64 | 42 | | | | | | |
| 11 | 4 | 8 | 22 | 2.40 | 22 | 12 | 4 | 7 | 21 | 1.91 | 60 | | | | | | |
| 11 | 7 | 7 | 11 | 4.20 | 11 | 12 | 4 | 8 | 24 | 2.18 | 12 | | | | | | |
| 11 | 8 | 8 | 11 | 5.60 | 33 | 12* | 4 | 9 | 27 | 2.45 | 30 | | | | | | |
| 11 | 9 | 9 | 11 | 7.20 | 11 | 12 | 4 | 10 | 30 | 2.73 | 48 | | | | | | |

**2. 프로그램**

```
data rgd;
do v=1 to 12; do k=1 to 10; do r=1 to 10;
  b= (v * r)/k;  ib=int(b);
  lam= (r * (k - 1))/(v - 1);  mu= (k * (r - 1))/(b - 1);
  flam= int(lam);  fmu= int(mu);
  sig0= (b * k * (k - 1))/2 - (flam * v * (v -1))/2;
  tau0= (v * r * (r - 1))/2 - (fmu * b * (b -1))/2;
  tausig= (v * r * (r - 1) * (1 - 2 * fmu))/2  - (b * k * (k - 1) * (1 - 2 * flam))/2
          + (b * (b - 1) * fmu**2)/2 - (v * (v - 1) * flam**2)/2;
  sig=sig0;   tau=tausig + sig;output;
end;end;end;
data rgd1;set rgd;
if lam=flam then delete;
if v>k;if ib=b;
if tau>=tau0;
proc print;var v k r b lam mu sig;run;
```