

## 마르코프 국면전환모형을 이용한

### KOSPI와 금리의 추이 분석

조재범<sup>1)</sup> 김호일<sup>2)</sup>

#### 요약

Hamilton(1989)은 시계열 변수가 2가지 이상의 국면을 가지고 있을 때, 현재 어떤 국면이 진행되고 있고 향후 진행될 국면이 무엇일지에 대해 추론이 가능한 시계열모형을 소개하였다. Hamilton모형은 시계열이 2개의 독립적인 관찰불가능한 변수의 합으로 구성되어 있고, 이중 한 변수는 2국면 마르코프 확률과정(2-State Markov Stochastic Process)을 따른다고 가정한다. Hamilton모형은 계수의 추정이 단순하면서도 비대칭성과 조건부 이분산 등과 같은 복잡한 동학(Dynamics)을 용인한다는 장점이 있다(Lam, 1990). 본 연구에서는 마르코프 국면전환모형에 대해 설명한후, 사례분석으로 KOSPI와 금리의 추이에 따라 국면을 정의하여 각 국면의 특징과 타국면과의 연관성 등을 분석하였다

#### 1. 서론

일반적으로 주가와 금리는 반대 방향으로 움직이는 것으로 알려져 있다. 즉 금리 상승시 주식보다 채권수익률이 상대적으로 높아져서 자금이 주식시장에서 채권시장으로 이동하여 주가가 하락하는 경향이 있다. 반면 금리 하락시 채권의 장점이 상대적으로 감소하여 자금이 주식시장으로 이동함으로써 주가를 상승시키는 경향이 있다. 이러한 현상은 미국과 일본시장 등과 같은 선진국증시에서 뚜렷이 나타나고 있다.

우리나라의 경우는 어떠한가? <그림 1>은 1987년부터 1996년 상반기까지 우리나라의 종합주가지수(KOSPI)와 금리의 월간추이를 나타내고 있다. 금리는 대표적인 유통수익률인 3년 만기 회사채수익률을 나타낸다. 주가와 금리가 반대로 움직이는 경우도 많지만, 동일한 방향으로 움직이는 기간도 상당기간 지속되어 왔음을 알 수 있다. 특히, 주가와 금리의 동반하락현상은 '89년 하반기, '91년~'92년 중반, 그리고 '94년 이후에 지속되었다. 이는 우리나라의 경우에 있어 금리와 주가를 순전히 대체자산의 수익률 관점에서만 분석하기에는 무리가 있음을 의미한다.

따라서 주가와 금리가 상호간에 어떠한 영향을 주고 받으면서 변화하는지를 분석하고 향후 주가와 금리가 어떠한 방향으로 변화할 것인가를 분석할 필요성이 있다. 특히 국면의 전환(Regime Shifts)순서와 발생시기, 그리고 국면의 지속기간 등을 파악할 수 있다면 향후 주가의 움직임을 예측하는데 많은 도움을 줄 것이다.

---

1) (430-714) 경기도 안양시 만안구 안양5동 안양대학교 정보통계학과 겸임교수  
2) (430-714) 경기도 안양시 만안구 안양5동 안양대학교 정보통계학과 조교수



마르코프 전환모형을 활용한 대표적인 국내논문으로는 최공필(1992), 이준행과 한완선(1993)의 논문이 있다. 최공필은 GNP와 이자율, 주가, 환율에 대한 독립적인 전환모형을 통해 이들 시계열 자료들의 동태적 변화를 설명하였으며, 이준행과 한완선은 KOSPI의 분기자료를 이용하여 장기추세에 대한 변화를 설명하였다.

기존의 국내 논문들이 KOSPI 혹은 금리, 환율 등에 대한 일변수 마르코프 확률과정을 이용하여 개별적으로 국면변화를 분석한 반면, 본 연구에서는 KOSPI와 금리의 시계열 변수를 하나의 모형에서 동시에 분석함으로써 KOSPI와 금리의 상호추이에 따른 국면변화에 대한 분석을 행하였다. 이변수 마르코프 확률과정을 이용한 논문으로 Phillips(1991)가 있는데, 그는 미국과 그의 주요 선진국간의 경기순환의 연관성을 설명할 목적으로 Hamilton모형을 사용하였다.

## 2. 마르코프 국면전환모형

### 2.1 마르코프 국면전환모형

본 모형에서 활용한 두 시계열 변수, 즉 KOSPI와 금리변수를 결합하여 4개의 국면으로 구성된 마르코프 국면전환모형(Markov Regime-Switching Model)에 대하여 알아보자. 이에 대해서는 Phillips(1991)을 참조하였다.

KOSPI와 금리의 두 시계열 행태에 각각 상승과 하락이라는 2개의 가능한 국면(State)이 있다고 가정하면, 이들의 가능한 조합은 마르코프 확률과정에 있어 4개의 각기 다른 국면으로 이루어진다. 즉, 두 시계열 행태의 조합에서 일어날 수 있는 4개의 국면을 정의하면 다음과 같다.

- 국면1 ( $s_1$ ) : KOSPI 및 금리 모두 상승국면에 속함.
- 국면2 ( $s_2$ ) : KOSPI는 하락국면이나, 금리는 상승국면에 속함.
- 국면3 ( $s_3$ ) : KOSPI는 상승국면이나, 금리는 하락국면에 속함.

국면4 (s<sub>4</sub>) : KOSPI 및 금리 모두 하락국면에 속함.

t시점에서 KOSPI와 금리의 t-1시점 대비 로그수익률을  $y_t$ 라 정의하면, 추세항을 마르코프 확률과정으로 표현한 국면전환모형의 구조는 다음과 같다.

$$y_t = n_t + \varepsilon_t,$$

$$n_t = \mu_1 s_{1t} + \mu_2 s_{2t} + \mu_3 s_{3t} + \mu_4 s_{4t},$$

$$\text{여기서 } s_{jt} = \begin{cases} 1, & t\text{시점에 } y_t \text{가 속할 국면이 } j\text{일때,} \\ 0, & \text{타국면에 속할 때,} \end{cases}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma).$$

위의 모형에 있어서  $y_t$ ,  $n_t$ ,  $\varepsilon_t$ 와  $\mu_{i=1,2,3,4}$ 는 2행 1열로 구성된 열벡터이다.  $y_t = \begin{pmatrix} y_{kt} \\ y_{bt} \end{pmatrix}$ 이고,  $y_{kt}$ 는 t시점에서 KOSPI의 t-1시점 대비 로그수익률을 의미하며,  $y_{bt}$ 는 금리의 t-1시점 대비 t시점의 로그변화율을 나타낸다. 첨자 'k'는 KOSPI에 대응하는 각 벡터들의 원소를 정의하기 위하여 사용하였으며, 첨자 'b'는 금리에 대응하는 원소들을 의미한다.  $\Sigma$ 는 대각원소가  $\sigma^{kk}$ 와  $\sigma^{bb}$ 이고, 비대각원소가  $\sigma^{kb}$ (혹은  $\sigma^{bk}$ )인 2행 2열로 구성된 공분산행렬이다.

앞서 정의한 4개의 국면에 대한 평균벡터들은 아래와 같다.

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_h^k \\ \mu_b^b \end{bmatrix}; \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} \mu_l^k \\ \mu_b^b \end{bmatrix}; \quad \mu_3 = \begin{bmatrix} \mu_h^k \\ \mu_l^b \end{bmatrix}; \quad \mu_4 = \begin{bmatrix} \mu_l^k \\ \mu_l^b \end{bmatrix},$$

여기서 각각 첨자 'h'는 상승국면을, 'l'은 하락국면을, 'k'는 KOSPI를,

'b'는 금리를 의미한다.

각 국면에 대한 공분산행렬( $\Sigma$ )은 동일하다고 가정하였으며,  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^{kk} & \sigma^{kb} \\ \sigma^{bk} & \sigma^{bb} \end{pmatrix}$ 이다.

또한 마르코프 확률과정을 수행하기 위해서는 4행 4열인 전이확률행렬  $P$ 도 필요한데, 이는 특정국면이 지속되거나 타국면으로 전이될 확률들로 구성된 행렬이다. 즉 i국면에서 j국면으로 전이

될 전이확률  $p_{ij} = \Pr(s_t = j | s_{t-1} = i)$  이며, 이들로 구성된 전이확률행렬  $P$ 를 정의하면 아래와 같다.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}, \text{ 단 } \sum_{j=1}^4 p_{ij} = 1, i = 1, 2, 3, 4.$$

마르코프 전환모형에서 각 국면의 모수에 대한 추정치는 일반적으로 우도함수를 최대화함으로써 구해지는데, Hamilton(1990)은 EM알고리즘(Expectation & Maximization Algorithm)방법에 의한 추정치가 최우추정치(Maximum Likelihood Estimator ; MLE)방법과 동일한 결과를 도출한다는 사실을 입증하였다.

EM알고리즘에 대한 특징 및 자세한 전개과정은 부록에 수록되어 있다. 또한 EM알고리즘을 통해 얻은 T시점의 스무드된 확률(Smoothed Probability)과 전이확률을 이용하여 T시점 이후의 각 국면에 대한 예측확률 뿐만아니라, KOSPI와 금리의 로그수익률에 대한 기대수익률(Expected Return)도 얻을 수 있다. 스무드된 확률은 표본기간 동안의 모든 데이터를 사용하여 추정된 t시점의 국면에 대한 확률을 말한다. 즉 모든 데이터  $y_t, t=1, 2, \dots, T$ ,를 이용하여 추정된 국면  $s_t$ 가 발생할 확률  $\Pr(s_t | y_T, y_{T-1}, \dots, y_1)$  스무드된 확률이라 한다.

T시점에서 k개월 후의 각 국면 예측확률을 각각  $P(f_1), P(f_2), P(f_3), P(f_4)$ 라 할 때,

$$\Pr(f) = [\Pr(f_1), \Pr(f_2), \Pr(f_3), \Pr(f_4)] =$$

$$[\Pr(s_{T+1} | Y_T), \Pr(s_{T+2} | Y_T), \Pr(s_{T+3} | Y_T), \Pr(s_{T+4} | Y_T)] \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}^k$$

와 같다.

또한 KOSPI와 금리의 로그수익률에 대한 k개월 후의 기대수익률을  $E(y_{T+k} | Y_T)$ 라 하면,

$$E(y_{T+k|T}) = [\Pr(f_1), \Pr(f_2), \Pr(f_3), \Pr(f_4)] \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \mu_{i2} \\ \mu_{i3} \\ \mu_{i4} \end{pmatrix}, (i = k(KOSPI), b(\text{금리}))$$

이다.

## 2.2 EM알고리즘의 전개과정

마르코프 국면전환모형을 추정하는 방법에는 수치최적화 방법(Numerical Optimization Method)과 EM알고리즘에 의한 두 방법이 사용된다. 본 모형에서는 Hamilton(1990)이 사용한 EM알고리즘을 이용하여 추정치를 구하였다.

마르코프 국면전환모형을 추정하기 위해서는 모수추정식에 존재하는 비선형성으로 인하여 반복 알고리즘(Iterative Algorithm)을 사용하는 것이 일반적이다. Hamilton(1990)은 EM알고리즘을 사용하여도 최우추정방법과 동일한 결과를 얻을 수 있다는 것을 증명하였다. 더구나 EM알고리즘의 특징은 모수의 추정과정에서 매우 부적절한 초기값을 준다고 해도 결과에 있어서는 초기값에 상관없이 동일한 결과를 주며, 또한 추정치들이 빨리 최우추정치로 수렴함에 있다(Hamilton,1990).

EM알고리즘에 의한 모수추정은 추정과정에서 생성된 스무드된 확률을 통해 구할 수 있는데, 스무드된 확률을 통해 구한 추정치와 이전 단계에서 얻어진 추정치들과의 절대값의 차가  $10^{-6}$  (본 모형에서 사용한 수렴기준)에 수렴할 때까지 위의 두 과정을 반복하여 수행한다. 본 연구에서 스무드된 확률(Smoothed Probability)을 추정하기 위하여 사용된 알고리즘은 Kim(1994)에 기초하고 있다.

EM알고리즘은 필터링(Filtering) 과정으로 시작되는데, 필터링은 초기시점인 1시점부터 t-1시점까지 특정 시계열 변수  $y_1, y_2, \dots, y_{t-1}$ 의 값이 주어졌을 때 t시점에서의  $y_t$ 와 특정국면  $s_t$ 와의 결합조건부확률을 계산함으로써 시작된다.

결합조건부확률은,

$$\begin{aligned} & \Pr(s_t, y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1; \lambda) \\ &= \Pr(s_{t-1} | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1; \lambda) \Pr(s_t | s_{t-1}; \lambda) P(y_t | \Omega_t; \lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

이며,  $\Pr(s_t | s_{t-1}; \lambda)$ 는 전이확률  $p_{ij}$ 이다.

또한 앞서 정의한 마르코프 국면전환모형에서  $\varepsilon_t$ 가 정규분포에 따른다고 가정하였으므로  $\Omega_t = \{y_{t-1}, s_t, s_{t-1}\}$ 이 주어졌을 때  $y_t$ 의 확률분포는

$$P(y_t | \Omega_t; \lambda) = \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (y_t - \mu_t)' \Sigma^{-1} (y_t - \mu_t)\right\}$$

이다.

다음으로 첫번째 단계에서 얻은 결합조건부확률인 식(1)을 이용하여  $y_1, y_2, \dots, y_{t-1}$ 을 조건으로 하는  $y_t$ 의 분포함수,

$$P(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1; \lambda) = \sum_{s_t=1}^4 P(s_t, y_t | y_{t-1}, \dots, y_1; \lambda) \quad (2)$$

를 구한다.

식(1)과 식(2)을 이용하여 아래와 같은 필터된 확률(Filtered Probability)을 구할 수 있다.

$$\Pr(s_t | y_t, \dots, y_1; \lambda) = \frac{P(s_t, y_t | y_{t-1}, \dots, y_1; \lambda)}{P(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1; \lambda)}$$

EM알고리즘은 전체 표본에 기초하여 스무드된 확률을 통해 이루어지는데, 스무드된 확률 값인  $\Pr(s_t | y_T, y_{T-1}, \dots, y_1)$  초기시점인 1시점부터 전체기간의 마지막 시점인 T시점까지 각 시점에서 얻은 필터된 확률과 전이확률 등을 이용하여 필터된 확률의 계산과정과 역순으로 T시점부터 1시점까지 구할 수 있다. 스무드된 확률(Smoothed Probability)의 계산과정은 Hamilton(1994)을 참조하기 바란다.

필터된 확률은 t시점까지 관측치들이 주어졌을 때  $s_t$ 가 취할 확률인  $\Pr(s_t | y_t, \dots, y_1; \lambda)$ 을 의미하며, 스무드된 확률은 1시점부터 마지막 시점인 T시점까지의 관측치가 모두 주어진 상태에서 얻은 확률인  $\Pr(s_t | y_T, y_{T-1}, \dots, y_1)$  말한다. 따라서 필터된 확률은 t시점까지의 주어진 정보를 기초로 t시점에서  $y_t$ 가 속할 국면을 파악하는 것이고, 스무드된 확률은 T시점까지의 전체 관측치들의 정보를 통해 t시점에서  $y_t$ 가 속할 국면을 파악하려는 확률임을 알 수 있다.

또한 본 모형에서 추정해야할 모수인  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ ,  $\sigma = (\sigma^{kk}, \sigma^{kb}, \sigma^{bk}, \sigma^{bb})$ ,  $p = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{44})$  스무드된 확률을 이용하여 추정할 수 있으며, 이러한 추정치를 이전 단계의 추정치와 대치시켜 위에서 설명한 스무드된 확률을 추정하는 과정을 반복수행한다. 반복과정에서 생성되는 추정치들이 충분히 수렴할 때까지 과정을 반복한다. Hamilton(1990)은 이때 수렴된 추정치들이 최우추정치와 동일함을 입증하였다. 반면 최우추정치를 구하는 또다른 방법인 수치최적화 방법은 스무드된 확률 대신 필터된 확률분포를 사용하여 모수를 추정하는 방법이다.

### 2.3. EM알고리즘에 의한 추정과정

이제 전술한 마르코프 국면전환모형에서 추정해야할 모수들을 EM알고리즘에 의해 추정하는 과정에 대해 단계별로 요약하면 다음과 같다.

[단계1] 추정해야할 모수들에 대해 초기값으로 임의의 값,  $\lambda^{(0)}$  를 준다.

$$\lambda^{(0)} = (\mu^{(0)}, \sigma^{(0)}, \rho^{(0)}),$$

여기서  $\mu^{(0)} = (\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \mu_3^{(0)}, \mu_4^{(0)})$ ,  $\sigma^{(0)} = (\sigma_k^{(0)}, \sigma_{kb}^{(0)}, \sigma_{bk}^{(0)}, \sigma_b^{(0)})$ ,  $\rho^{(0)} = (\rho_{ij}^{(0)})_{4 \times 4}$  이다.

[단계2] 단계1에서 임의로 주어진 추정치들의 초기값을 이용하여 각 (t)시점마다 필터된 확률을 최종시점인 (T)시점까지 구한다.

$$\bullet \Pr(s_t = j | Y_t) = \frac{\sum_{i=1}^4 \Pr(s_t = j | s_{t-1} = i) P(y_t | \Omega_t; \lambda^{(0)}) \Pr(s_{t-1} = i | Y_{t-1})}{\Pr(y_t | Y_{t-1})}, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\text{여기서 } P(y_t | \Omega_t; \lambda) = \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (y_t - \mu_t)' \Sigma^{-1} (y_t - \mu_t)\right\},$$

$$\Pr(y_t | Y_{t-1}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \Pr(s_t = i | s_{t-1} = j) P(y_t | \Omega_t; \lambda) \Pr(s_{t-1} = j | Y_{t-1}),$$

$$Y_t = (y_1, y_2, \dots, y_t),$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_k & \sigma_{kb} \\ \sigma_{bk} & \sigma_b \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \Pr(s_{t+1} = j | Y_t) = \sum_{i=1}^4 \Pr(s_{t+1} = j | s_t = i) \Pr(s_t = i | Y_t), t = 1, 2, \dots, T-1$$

[단계3] 단계2에서 구한 필터된 확률인  $\Pr(s_t = j | Y_t)$ 와  $\Pr(s_{t+1} = j | Y_t)$ , 전이확률을 이용하여 (T)시점부터 초기시점인 (1)시점까지 역순으로 스무드된 확률을 계산한다.

$$\bullet \Pr(s_t = j | Y_T) =$$

$$\Pr(s_t = j | Y_t) [\rho_{1j}, \rho_{2j}, \rho_{3j}, \rho_{4j}] \begin{pmatrix} \frac{\Pr(s_{t+1} = 1 | Y_T)}{\Pr(s_{t+1} = 1 | Y_t)} \\ \vdots \\ \frac{\Pr(s_{t+1} = 4 | Y_T)}{\Pr(s_{t+1} = 4 | Y_t)} \end{pmatrix}, t = (1, 2, \dots, T-1)$$

여기서  $Y_T = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ .

• 마지막 시점인 (T)시점에서의 스무드된 확률,  $\Pr(s_T = j | Y_T)$ 은 단계2에서 구한

(T)시점에서의 필터된 확률과 동일하다.

[단계4] 모든 시계열 자료  $Y_T = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ 가 주어졌을 때  $s_t$ 와  $s_{t-1}$ 의 결합확률 (Joint Probability)을 구한다.

$$\begin{aligned} \cdot \Pr(s_t = i, s_{t-1} = j | Y_T) &= \Pr(s_t = i | Y_T) \frac{p_{ji} \Pr(s_{t-1} = j | Y_{t-1})}{\Pr(s_t = i | Y_{T-1})}, \\ &t = 2, 3, \dots, T \end{aligned}$$

[단계5] 단계3에서 구한 스무드된 확률을 이용하여 새로운 추정치  $\lambda^{(1)}$ 을 구한다.

$$\cdot \mu_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \mu_{kj}^{(1)} \\ \mu_{bj}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{t=1}^T y_{kt} \Pr(s_t = j | Y_T; \lambda^{(1)})}{\sum_{t=1}^T \Pr(s_t = j | Y_T; \lambda^{(1)})} \\ \frac{\sum_{t=1}^T y_{bt} \Pr(s_t = j | Y_T; \lambda^{(1)})}{\sum_{t=1}^T \Pr(s_t = j | Y_T; \lambda^{(1)})} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

여기서  $y_{kt}$ 는 t시점에서 KOSPI의 로그수익률을,  $y_{bt}$ 는 금리의 로그변화율을 의미하며,  $\mu_{kj}$ 는 j국면 KOSPI의 로그수익률 평균을,  $\mu_{bj}$ 는 j국면 금리의 로그변화율 평균이다.

$$\begin{aligned} \cdot \sigma_k^{(1)} &= \frac{\sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^T (y_{kt} - \mu_{kj}^{(1)})^2 \Pr(s_t = j | Y_T; \lambda^{(1)})}{T} \\ \sigma_b^{(1)} &= \frac{\sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^T (y_{bt} - \mu_{bj}^{(1)})^2 \Pr(s_t = j | Y_T; \lambda^{(1)})}{T} \\ \sigma_{kb}^{(1)} &= \sigma_{bk}^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^T (y_{kt} - \mu_{kj}^{(1)}) (y_{bt} - \mu_{bj}^{(1)}) \Pr(s_t = j | Y_T; \lambda^{(1)})}{T} \end{aligned}$$

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{\sum_{t=2}^T \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i | Y_T; \lambda^{(1)})}{\sum_{t=2}^T \Pr(s_{t-1} = i | Y_T; \lambda^{(1)})}, \quad (i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3)$$

$$\text{단, } p_{i4}^{(1)} = 1 - p_{i1}^{(1)} - p_{i2}^{(1)} - p_{i3}^{(1)}.$$

[단계6] 단계5에서 구한 새로운 추정치  $\lambda^{(1)}$ 과 임의의 초기치로 주어진  $\lambda^{(0)}$ 가 수렴하는지를 조사한다. 본 연구에서는 이 값들의 차의 절대값이  $10^{-6}$  범위내에서 수렴하는지를 조사하였다. (즉,  $|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}| < 10^{-6}$ )

[단계7] 새로이 구한 추정치  $\lambda^{(1)}$ 가 이전 추정치  $\lambda^{(0)}$ 에 수렴하면 과정을 종료하나, 만약 수렴하지 않는다면 단계2부터 단계5까지의 과정을 통해 새로운 추정치  $\lambda^{(2)}$ 를 구한다. 새로이 얻은 추정치  $\lambda^{(2)}$ 가 이전 추정치  $\lambda^{(1)}$ 에 수렴하지 않는다면 수렴 조건이 만족될 때까지 위의 과정을 반복하여 수행한다.

EM알고리즘을 통해 얻은 (T)시점의 스무드된 확률과 전이확률을 통해 (T)시점 이후의 각 국면에 대한 예측확률 뿐만 아니라 KOSPI와 금리의 로그수익률에 대한 기대수익률(Expected Return)도 얻을 수 있다.

(T)시점에서 k개월 후의 각 국면 예측확률을 각각  $P(f_1), P(f_2), P(f_3), P(f_4)$ 라 할 때,

$$\Pr(f) = [\Pr(f_1), \Pr(f_2), \Pr(f_3), \Pr(f_4)] = [\Pr(s_{T=1} | Y_T), \Pr(s_{T=2} | Y_T), \Pr(s_{T=3} | Y_T), \Pr(s_{T=4} | Y_T)] \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}^k$$

와 같다.

또한 KOSPI와 금리에 대한 k개월 후의 기대수익률을  $E(y_{T+k|T})$ 라 하면,

$$E(y_{T+k|T}) = [\Pr(f_1), \Pr(f_2), \Pr(f_3), \Pr(f_4)] \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \mu_{i2} \\ \mu_{i3} \\ \mu_{i4} \end{pmatrix}, \quad i = k(\text{kospi}), b(\text{금리})$$

이다.

### 3. 사례연구

#### 3.1 자료설명

분석자료로는 KOSPI와 금리의 월별자료를 사용하였다. KOSPI는 각 월말 지수를 사용하여  $t-1$  시점  $KOSPI(K_{t-1})$  대비  $t$ 시점  $KOSPI(K_t)$ 의 로그수익률을, 금리는 각 월평균 금리를 사용하여  $t-1$ 시점 금리( $B_{t-1}$ ) 대비  $t$ 시점 금리( $B_t$ )의 로그변화율을 이용하였다. 즉 KOSPI의 로그수익률  $RK_t = \log(K_t/K_{t-1}) * 100(\%)$ 이고, 금리의 로그변화율  $RB_t = \log(B_t/B_{t-1}) * 100(\%)$ 이다.

분석대상기간은 KOSPI와 금리 모두 1989년 9월부터 1997년 8월까지의 96개월간을 대상으로 하였다.

#### 3.2 국면별 분석

KOSPI와 금리의 로그수익률 자료를 이용하여 이들의 추이에 따라 다음과 같이 4개의 국면을 가정하였다.

KOSPI와 금리가 모두 상승추세인 시기를 국면1( $s_1$ )이라 하고, KOSPI는 하락추세이나 금리가 상승추세인 국면을 국면2( $s_2$ ), KOSPI는 상승추세이나 금리가 하락추세인 국면을 국면3( $s_3$ ), KOSPI와 금리가 모두 하락하는 시기를 국면4( $s_4$ )라 정의하자.

이때 EM알고리즘을 이용해 과거 KOSPI와 금리의 행태를 토대로 각 국면을 정의하고, 각 국면별 KOSPI와 금리의 로그수익률 평균, 각 국면의 평균 지속기간, 각 국면에 속할 스무드된 확률과 현재의 국면에서 다른 국면으로 전이될 전이확률(Transition Probability) 등을 추정하였다. 또한 전이확률을 통해 각 국면으로 전이될 가능성에 대해서도 국면별로 자세히 분석하였다.

먼저 EM알고리즘을 통해 얻은 각 국면별 두 시계열 변수의 평균과 평균 지속기간, 전이확률행렬이 각각 <표 1>과 <표 2>에 나타나 있다. 이들 추정치들은 2.3의 EM알고리즘에 의해 추정된 추정치들이다.

앞서 설정한 4개의 국면 중, 국면1은 KOSPI 및 금리 모두 상승추세를 나타내는 국면으로 정의할 수 있다. 국면1에서 KOSPI는 월평균 1.91%의 상승을, 금리는 월평균 0.26%의 상승을 나타냈다.

<표 1> 각 국면별 추정치 및 평균 지속기간

구 분	국 면 1	국 면 2	국 면 3	국 면 4
국면 정의	KOSPI 및 금리 상승기간	KOSPI 하락, 금리상승기간	KOSPI 상승, 금리하락기간	KOSPI 및 금리 하락기간
평균 수익률	KOSPI = 1.91% 금리 = 0.26%	KOSPI = -1.78% 금리 = 1.29%	KOSPI = 6.75% 금리 = -6.61%	KOSPI = -0.86% 금리 = -2.32%
평균 지속기간	1개월	3.5개월	1.3개월	4.8개월

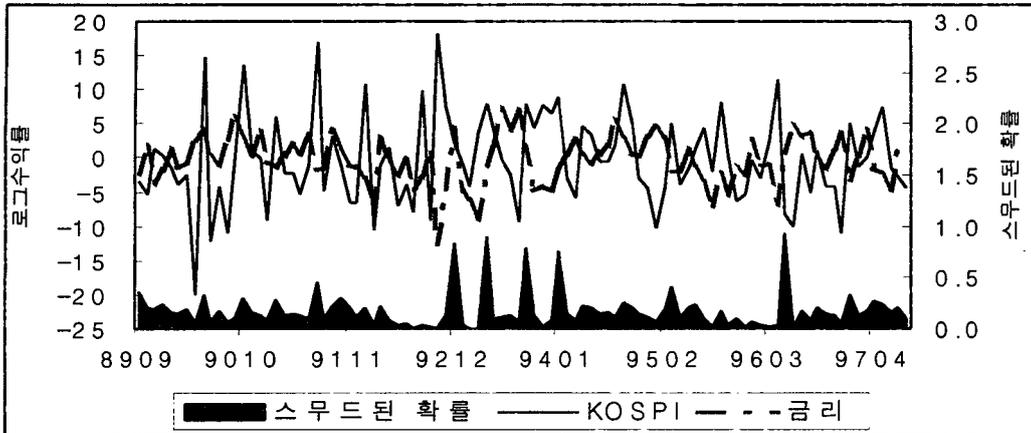
<표 2> 각 국면에 대한 전이확률행렬

다음국면 \ 현재국면	국면 1 (KOSPI 상승, 금리 상승)	국면 2 (KOSPI 하락, 금리 상승)	국면 3 (KOSPI 상승, 금리 하락)	국면 4 (KOSPI 하락, 금리 하락)
국면 1 (KOSPI 상승, 금리 상승)	0.00	★0.71	0.00	0.29
국면 2 (KOSPI 하락, 금리 상승)	0.23	★0.77	0.00	0.00
국면 3 (KOSPI 상승, 금리 하락)	0.76	0.00	★0.24	0.00
국면 4 (KOSPI 하락, 금리 하락)	0.00	0.00	0.21	★0.79

주. ★는 각 국면에서 다음 국면으로 전이될 확률이 가장 높음을 의미함.

<그림 2> 국면1(KOSPI 및 금리 상승)의 스무드된 확률

전이확률행렬에서 국면1이 연속적으로 이어질 확률은 0으로, 이는 현재 KOSPI 및 금리의 장세가 국면1에 속할 경우 차월에 현 국면이 지속될 가능성은 없음을 의미한다. 국면1에서 차월에 타 국면으로 전이될 전이확률을 보면, 국면1에서 국면2(KOSPI 하락, 금리 상승)로 전이될 확률이



0.71로 가장 높아 국면1 다음에는 국면2가 발생할 가능성이 가장 높음을 시사해 준다. 다음으로 국면1에서 국면4(KOSPI 하락, 금리 하락)으로 전이될 확률이 0.29로 높게 나타나 국면2 다음으로 발생할 가능성이 높은 국면으로 나타났다. 그러나 국면1의 지속 뿐만아니라, 국면3(KOSPI 상승, 금리 하락)으로의 전이 가능성은 없는 것으로 나타났다.

국면1의 평균 지속기간은 1개월로 나타났는데, 이는 월별자료를 이용한 결과로 실제에는 1개월 보다 좀더 짧은 기간에 발생할 수도 있다. <그림 2>에서 국면1에 속할 스무드된 확률의 추이를 보면, 국면1은 단기간에 짧게 발생한 후 타국면으로 전이됨을 알 수 있다. 이 국면은 분석기간동안 5번에 걸쳐 단기적으로 발생하였다가 소멸되었다.

국면2는 KOSPI가 하락추세를 보이는 반면, 금리는 상승추세를 보이는 기간으로 정의된다.

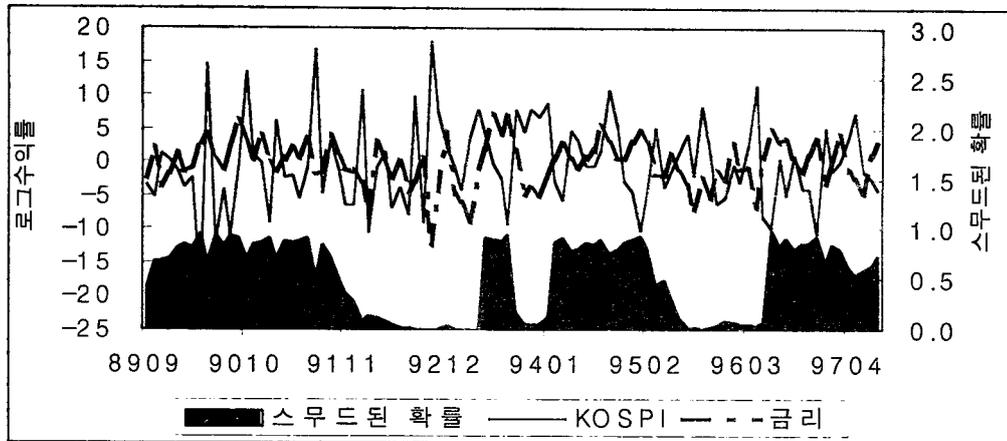
이 기간 중에 KOSPI는 -1.78% 하락한 반면, 금리는 평균 1.29%의 상승을 나타냈다. 이는 금리 상승이 KOSPI 상승에 부정적인 영향을 미치고 있음을 시사해 주나, 부정적인 영향력의 정도에 있어서는 평균적으로 그다지 크지 않음을 의미한다.

전이확률행렬을 보면, 국면2가 지속될 확률이 0.77로 가장 높게 나타났다. 즉 국면1(KOSPI 상승, 금리상승)이 지속적으로 이어지지 못하는 반면, 국면2는 좀더 지속적으로 이어짐을 의미한다. 국면2에서 타국면으로 전이될 전이확률을 살펴보면, 국면1(KOSPI 및 금리 모두 상승)로 전이될 확률이 0.23이었다. 그러나 KOSPI가 하락하며 금리가 상승하는 국면2와 정반대의 상황인 국면3(KOSPI 상승, 금리 하락)으로의 전이확률은 0으로 나타났으며, 또한 국면4(KOSPI 하락, 금리 하락)로의 전이 가능성도 발생하지 않았다.

<그림 3> 국면2(KOSPI 하락, 금리 상승)의 스무드된 확률

국면2의 평균 지속기간은 3.5개월이며, <그림 3>의 스무드된 확률추이에서 보듯이 국면 2의 추세는 국면1보다는 지속적으로 진행되고 있다. '97.8월말 현재 KOSPI와 금리의 장세가 현 국면에 속해 있음을 알 수 있으며, 국면2는 '96.6월부터 지속되어 왔다.

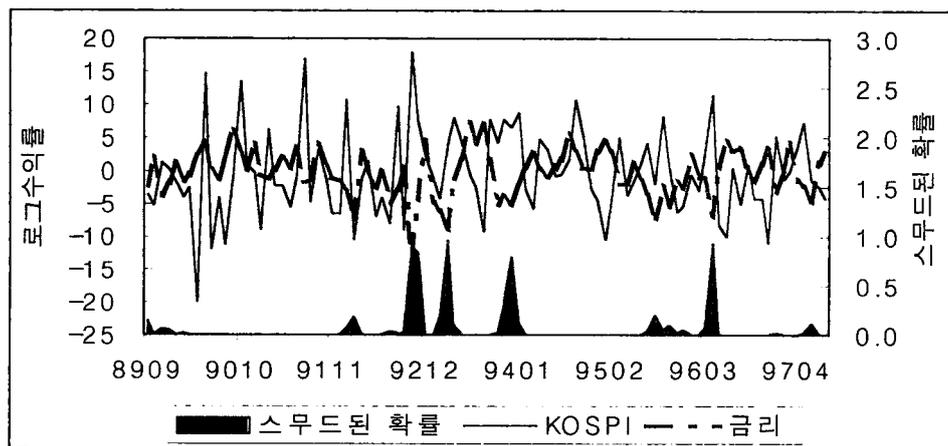
국면3은 KOSPI가 상승추세를, 금리가 하락추세를 보이는 기간으로 정의되는데, 이 기간 중에 KOSPI는 월평균 6.75%의 상승을 나타내는 반면, 금리는 월평균 6.61%의 하락을 나타냈다. 이를



KOSPI와 금리간의 상호관계로 살펴 볼 때, 국면2에서 금리상승이 KOSPI 하락에 미치는 부정적인 영향보다 금리하락이 KOSPI 상승에 미치는 긍정적인 영향이 더 큼을 의미한다고 할 수 있다. 국면3이 4개의 국면 중 KOSPI와 금리의 변동이 가장 컸다. 즉 4개의 국면 중 KOSPI가 가장 크게 상승하는 기간은 금리의 하락이 가장 큰 기간이었음을 시사해 준다.

국면3이 지속될 확률은 0.24로 타국면으로 전환될 가능성보다 현 국면이 지속될 가능성이 낮게 나타났다. 국면1(KOSPI 상승, 금리 상승)로 전환될 확률이 0.76으로, 이는 국면3 이후에 나타날 국면으로 국면1이 발생할 가능성이 가장 높음을 의미한다. 반면, 국면3에서 타국면으로 전이시 국면3과 정반대의 상황인 국면2(KOSPI 하락, 금리 상승)와 국면4(KOSPI 하락, 금리 하락)의 발생 가능성은 없는 것으로 나타났다.

국면의 평균지속기간이 1.3개월인 국면3은 '92년 10월~'92년 11월 등 4번에 걸쳐 발생하였다.

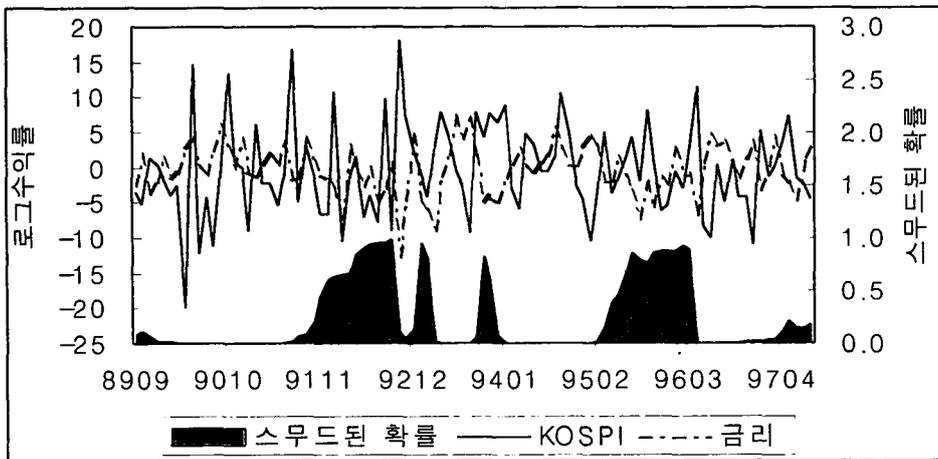


<그림 4> 국면3(KOSPI 상승, 금리 하락)의 스무드된 확률

<그림 2>와 <그림 4>에서의 스무드된 확률추이에서 보듯이 KOSPI가 상승하면서 금리가 하락하는 국면3이 KOSPI와 금리 모두 상승하는 국면1보다 좀더 지속적으로 진행됨을 알 수 있다.

즉 KOSPI의 상승추세는 금리 상승시보다 하락시에 좀더 지속적으로 이어짐을 의미한다. 실제로 주가와 금리가 모두 상승하는 국면1은 매우 단기적으로 발생하였으며, 지속될 확률도 0으로 나타나 주가와 금리가 2개월 연속 상승할 가능성은 거의 없는 것으로 나타났다.

국면4는 KOSPI 및 금리가 모두 하락추세를 나타내는 기간으로 정의된다. 이 기간 중 KOSPI와 금리는 각각 월평균 0.86%와 2.32%의 하락을 나타냈다. 또한 국면4의 평균 지속기간은 4.8개월로 KOSPI와 금리의 하락추세는 타국면에 비해 장기간에 걸쳐 이어지는 패턴을 보여 왔을뿐 아니라, 타국면의 평균 지속기간과 비교하여도 매우 장기적인 추세를 유지하였다.



<그림 5> 국면4(KOSPI 및 금리 하락)의 스무드된 확률

실제로 국면4가 이어질 확률은 0.79로, 지속적으로 국면4가 이어질 가능성이 매우 높음을 시사해 준다. 또한 국면4에서 국면3(KOSPI 상승, 금리 하락)으로 전이될 확률은 0.21이었다. 그러나 국면4와 정반대의 상황인 국면1(KOSPI 및 금리 모두 상승)과 국면2(KOSPI 하락, 금리 상승)로의 전이확률은 0으로 나타나 국면4에서 타국면으로 전이된다면 국면3(KOSPI 상승, 금리 하락)으로 전이될 가능성이 가장 높음을 보여 주고 있다.

#### 4. 결론

지금까지 마르코프 국면전환모형을 이용하여 '89년 9월부터 '97년 8월까지 96개월간을 선정하여 KOSPI와 금리의 추이에 따라 4개의 국면으로 분류한 후, 각 국면의 특징과 지속기간, 타국면으로 전이될 확률 등을 계산함으로써 타국면과의 상호비교 뿐만아니라 타국면으로 전이될 가능성 등에 대해서도 자세히 분석하였다.

마르코프 확률과정을 이용한 모형은 2개 이상의 국면을 가지고 있는 시계열변수의 움직임 등을 설명하는데 매우 유용한 시계열 모형으로 알려져 있으며, KOSPI와 금리 이외에도 경제성장률, 환율 등 다양한 시계열 자료 등에 활용될 수 있다.

본 연구에서는 KOSPI와 금리, 두 변수의 움직임을 설명하기 위하여 Hamilton모형을 사용하여 국면분석을 행하였으나, 경제성장률 등과 같은 경기변수를 도입하여 실물경기의 변화에 따른 주가를 분석하는 모형을 추정할 수도 있다. Hamilton모형은 시계열변수들에 대한 국면이 모형내에서 내생적으로 결정된다는 점에서 ARIMA모형보다 더 일반적이다. 향후 이 모형의 다양한 적용을 기대한다.

### 참 고 문 헌

- [1] 이준행, 한완선(1993), 다국면 마르코프 전환모형을 이용한 주가의 동태적 분석 및 예측, 『증권학회지』, 제15집, 561-594.
- [2] 최공필(1992), 마르코프 전환모형에 의한 시계열분석, 『금융연구』, 제6권 2호, 175-225.
- [3] Chang-Jin Kim(1994), Dynamic Linear Models with Markov-switching, *Journal of Econometrics* 60, 1-22.
- [4] James D. Hamilton(1989), A New Approach to The Economic Analysis of Nonstationary Time Series And The Business Cycle, *Econometrics*, Vol.57, No.2, 357-384.
- [5] \_\_\_\_\_(1990), Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, 45, 39-70.
- [6] \_\_\_\_\_(1994), Time Series Analysis, Princeton Univ., U.S.A.
- [7] Kerk L. Phillips(1991), A Two-country Model of Stochastic Output with Changes in Regime, *Journal of International Economics*, 31, 121-142.
- [8] Jeff Gable, Simon van Norden and Robert Vigfusson(1995), Analytical derivatives for Markov switching models, Working paper, Bank of Canada.
- [9] Michael P. Clements & Hans-Martin Krolzig(1997), A Comparison of the Forecast Performance of Markov-Switching and Threshold Autoregressive models of US GNP, Department of Economics, University of Warwick.
- [10] Morten O. Ravn & Martin Sola(1995), Stylized facts and regime changes: Are prices procyclical?, *Journal of Monetary Economics*, 36, 497-526.
- [11] Pok Sang Lam(1990), The Hamilton model with a general autoregressive component, *Journal of Monetary Economics*, 26, 409-432.
- [12] Robert Vigfusson(1996), SWITCHING BETWEEN CHARTISTS AND FUNDAMENTALISTS: A Markov Regime-Switching approach, Working paper, Bank of Canada.
- [13] Sheldon M. Ross(1993), Introduction to Probability Models, 5th ed., Academic Press, U.S.A.