

# 미분 추정 기법에 의한 2차원 이동 파라미터 추정의 수렴 특성 분석

정희원 이 상 희\*, 유 국 열\*, 김 재 균\*

## A Convergence Analysis of a Differential Method for 2-D Motion Parameter Estimation

Sang-hee Lee\*, Kook-yeol Yoo\*, Jae-kyoon Kim\* *Regular Members*

### 요 약

본 논문에서는 2차원 이동 파라미터 추정을 위한 미분 이동 추정 기법의 수렴 특성을 분석한다. 미분 이동 추정 기법은 동영상 부호화에서의 이동 보상 예측을 위하여 많은 연구가 되어 오고 있으나, 그 수렴 특성에 대한 분석은 미미한 실정이다. 본 연구에서는 비분리 지수형 공분산 영상 모델에 근거하여 2-파라미터와 6-파라미터 이동 모델에 대한 파라미터의 추정치를 유도하며, 이를 이용하여, 잡음, 공간 상관성, 공간 경사 선택 방법, 영역의 크기 등이 수렴 속도에 미치는 영향을 정량적으로 분석한다. 분석에 대한 검증용 위하여 몇가지 실험 결과를 보인다.

### ABSTRACT

In this paper, we investigate convergence behaviors of a differential method for 2-D motion parameter estimation. While the differential method is widely studied for motion compensated prediction in video coding, little attention has been paid to its convergence properties. Based on the nonseparable exponential covariance image model, we derive the estimates of update terms for the 2- and 6-parameter motion models. And, the effects of noise, spatial correlation, choice of spatial gradient measures, and the size of a region, are quantitatively analyzed in relation to the convergence speed. Some empirical results are presented to verify the analysis.

### I. 서 론

이동 추정 (motion estimation) 방식은 디지털 동영상 부호화를 위한 핵심 기술중의 하나로 많은 연구가 이

루어져 왔다. 2차원 영상에서의 이동은, 3차원 공간상에 존재하는 물체의 이동을 영상으로 투영한 것으로 근사화 할 수 있으며, 동영상 부호화시의 이동 추정이라 함은 이를 표현하는 2차원 이동 파라미터들을 구하는 것을 말한다. 대표적인 이동 추정 방식으로, 블럭 정합 기법(block matching algorithm)[2]과 미분 이동 추정 기법(differential motion estimation method)

\* 한국과학기술원 전기 및 전자공학과  
論文番號 : 98056-0211  
接受日字 : 1998年 2月 11日

[2]이 있다. 블럭 정합 기법은 영상을 일정 크기의 정방향 블럭으로 나눈 뒤, 이 블럭 단위로 병진 이동(translational motion) 파라미터를 추정하는 방식으로, 예측 효율 및 구현의 복잡도면에서 우수성이 인정되어 H.261, H.263, MPEG-1, MPEG-2등의 기존의 여러 동영상 부호화 표준 방식들이 채택하고 있다. 그러나, 블럭 단위 처리를 함으로써 생기는 블럭 경계에서의 화질 저하와, 탐색 복잡도의 증가로 병진 이동이 아닌 복잡한 이동 모델에 대해서는 사실상 적용이 불가능하다는 문제점을 가진다.

미분 이동 추정 기법은 밝기값의 시공간 경사(spatio-temporal gradient)를 이용해 수치 해석적으로 이동 파라미터를 추정하는 방식이다. 이 기법은 2개의 파라미터만으로 표현되는 병진 이동 모델뿐만 아니라, 회전(rotation), 확대(zooming), 변형(deformation)등을 포함하는, 보다 복잡한 이동 모델의 파라미터 추정에 쉽게 응용이 가능하다. 기존의 미분 이동 추정 기법에 관한 응용 연구를 살펴 보면, Bierling은 블럭 단위의 병진 이동 추정에[2], Hötter는 확대 및 병진 이동을 표현하는 3개의 이동 파라미터 추정에[3], Wu는 회전, 확대 및 병진 이동을 표현하는 4개의 이동 파라미터의 추정에[4], Odobez와 Keesman은 6개의 파라미터로 표현되는 affine 이동 모델의 추정에[5, 6] 이를 적용한 바 있다. 또한, Hötter는 물체 단위의 이동 추정을 위해 8개의 파라미터로 구성되는 이동 모델의 추정에 이를 적용하였고[7], Papadopoulos는 2차 기하 변환을 표현하는 12개의 파라미터 추정 방식을 제안하기도 하였다[8]. 이렇게, 미분 이동 추정 기법은 물체 또는 카메라등의 이동 보상을 위한 전역 이동(global motion) 추정에 주로 응용되어져 왔다. 최근에 표준화가 이루어지고 있는 MPEG-4의 경우, 스프라이트(sprite) 기법을 이용한 전역 이동 보상 방식이 채택되어짐에 따라, 추후 이를 위한 이동 추정 방식으로도 미분 이동 추정 기법은 상당한 역할을 할 것으로 보인다[9].

본 논문에서는 이러한 미분 이동 추정 기법의 수렴 특성을 이론적으로 분석해 보고자 한다. 기존의 미분 이동 추정 기법에 관한 연구는 주로 이동 보상 성능을 향상시키는데에 국한되어져 이루어져 왔으며, 이론적인 연구도 미분 이동 추정 기법의 기본이 되는 이동 제한식(motion constraint equation)에 관해서만 이루어져 왔기 때문에[10, 11] 실제 이동 추정시의 특성을 이해하는데에는 큰 도움을 주지 못하고 있다.

본 연구에서는 병진 이동을 기술할 수 있는 2-파라미터 이동 모델과 일반적인 1차 기하 변환을 기술할 수 있는 6-파라미터 이동 모델에 대하여, 여러가지 영상 특성들이 수렴 속도에 미치는 영향을 알아본다. 분석을 통하여 기존의 다른 문헌들에서 언급한 실험적 또는 직관적 해석들에 대한 이론적 해석과 더불어, 몇가지의 새로운 결과들을 제시한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저, 2장에서는 미분 이동 추정 기법의 기본 개념에 관하여 기술한다. 3장에서는 비분리 지수형 공분산 영상 모델링에 의하여 2-파라미터 이동 모델과 6-파라미터 이동 모델에 대한 이론적 추정치를 유도한다. 4장에서는 이 결과들을 바탕으로 수렴 특성을 분석하며 실험을 통하여 이를 검증한다. 마지막으로 5장에서 결론을 맺는다.

## II. 미분 이동 추정 기법

미분 이동 추정 기법은 영상의 밝기값의 변화를 선형으로 근사화하여 이동을 추정하는 방식으로, 이동 제한식에 근거를 둔다. 이동 제한식의 유도는 다음과 같다.

시각  $t$ , 공간 좌표  $\mathbf{s} = [x, y]^T$ 인 현재 영상에서의 밝기값을  $I_t(\mathbf{s})$ 라 하고, 이전 영상에서의 밝기값을  $I_{t-1}(\mathbf{s})$ 라 하자. 연속된 두 영상간의 밝기 변화가 물체의 움직임에만 기인한다고 가정하면 다음의 식이 성립된다.

$$I_t(\mathbf{s}) = I_{t-1}(\mathbf{s} - \mathbf{v}(\mathbf{s})). \quad (1)$$

위의 식에서  $\mathbf{v}(\mathbf{s}) = [v_x(\mathbf{s}), v_y(\mathbf{s})]^T$ 인 이동 벡터를 나타낸다. 위 식의 우변을  $\mathbf{s}$ 를 중심으로 Taylor 급수 전개한 후, 2차 이상의 항을 무시하면,

$$FD(\mathbf{s}) + \mathbf{v}(\mathbf{s})^T \nabla I_{t-1}(\mathbf{s}) \approx 0 \quad (2)$$

이 되며, 위의 식에서  $\nabla I_{t-1}(\mathbf{s}) = [\partial I_{t-1}(\mathbf{s})/\partial x, \partial I_{t-1}(\mathbf{s})/\partial y]^T$ 로써  $x$ -방향,  $y$ -방향의 공간 경사(spatial gradient)를 나타낸다. 또한,  $FD(\mathbf{s}) = I_t(\mathbf{s}) - I_{t-1}(\mathbf{s})$ 로써 영상간 차이값(frame difference)을 의미하며, 근사적으로 시간 경사(temporal gradient)를 나타낸다. 식(2)

를 이동 제한식이라고 지칭하며, 시공간 경사와 이동 벡터  $\mathbf{v}(\mathbf{s})$  사이의 관계를 화소 단위로 규정한다.

동영상 부호화에서의 이동 추정이라 함은, 주어진 영역에 대하여 하나의 이동 모델을 가정하고, 이 모델을 기술하는 파라미터들을 추정하는 것이다. 이동 모델의 선택시에는, 이동 모델이 적용될 영역의 크기, 모델이 복잡해질수록 증가하는 전송 비트량, 계산 복잡도 등이 고려되어야 한다. 본 연구에서는 널리 사용되는 affine 변환 이동 모델과 병진 이동 모델에 관해서 다루고자 한다.

Affine 변환 이동 모델은  $\mathbf{h}_6 = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T$ 로 주어지는 6개의 파라미터로 표현되며, 이것에 의해 이동 벡터  $\mathbf{v}(\mathbf{s})$ 를 다음과 같이 기술한다[5, 6, 12].

$$\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6) = [a_1x + a_2y + a_3, a_4x + a_5y + a_6]^T. \quad (3)$$

이후부터는 이 모델을 6-파라미터 모델로 지칭하겠다. 6-파라미터 모델은 병진 이동, 회전, 확대 및 선형 변형등을 기술할 수 있는 일반적인 1차 기하 변환 (1st-order geometric transformation)이다.

병진 이동 모델은  $\mathbf{h}_2 = [t_1, t_2]^T$ 로 주어지는 2개의 파라미터로 표현되며, 이것에 의해 이동 벡터  $\mathbf{v}(\mathbf{s})$ 를 다음과 같이 기술한다.

$$\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) = [t_1, t_2]^T. \quad (3)$$

이후부터는 이 모델을 2-파라미터 모델로 지칭하겠다. 2-파라미터 모델은 6-파라미터 모델이 표현할 수 있는 이동 벡터장 (motion vector field)의 일부만을 표현할 수 있는 극히 제한적인 모델이다. 그러나, 이 모델이 동영상 부호화에서 가장 널리 사용되는 이동 모델 중의 하나이고, 또한, 그 단순함으로 인해 본 연구의 결과 수식들을 물리적으로 설명하는데에 가장 용이하다고 사려되어 이후의 분석에 포함시키도록 한다.

$\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2)$ 와  $\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6)$ 를  $\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_n)$ 라고 표기하고, 이 식을 식(2)의  $\mathbf{v}(\mathbf{s})$ 에 대입하면,

$$FD(\mathbf{s}) + \mathbf{h}_n^T \mathbf{g}_n(\mathbf{s}) \approx 0, \quad n = 2, 6 \quad (5)$$

을 얻을 수 있다. 위의 식에서

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{s}) = [g_x(\mathbf{s}), g_y(\mathbf{s})]^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{g}_6(\mathbf{s}) = [xg_x(\mathbf{s}), yg_x(\mathbf{s}), g_x(\mathbf{s}), xg_y(\mathbf{s}), yg_y(\mathbf{s}), g_y(\mathbf{s})]^T \quad (7)$$

이며,  $g_x(\mathbf{s})$ 와  $g_y(\mathbf{s})$ 는 각각 x-방향, y-방향의 공간 경사이다.

식(5)에서  $FD(\mathbf{s})$ ,  $g_x(\mathbf{s})$ ,  $g_y(\mathbf{s})$ 는 실제 계산시에, 주어진 밝기값들을 이용해 구할 수 있는 값이므로,  $\mathbf{h}_n$ 을 계산하는 문제만이 남게 된다.  $\mathbf{h}_n$ 의 추정은 일반적으로 다음과 같은 최소 자승 문제에 의하여 구한다.

$$\hat{\mathbf{h}}_n = \arg \min_{\mathbf{h}_n} \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} (FD(\mathbf{s}) + \mathbf{h}_n^T \mathbf{g}_n(\mathbf{s}))^2, \quad n = 2, 6. \quad (8)$$

위의 식에서  $\hat{\mathbf{h}}_n$ 은  $\mathbf{h}_n$ 의 추정치이며,  $\Omega$ 는 현재 영상의 이동 추정 영역에 포함되는 화소들의 좌표값들이다. 앞으로,  $\hat{\mathbf{h}}_2 = [\hat{t}_1, \hat{t}_2]^T$ ,  $\hat{\mathbf{h}}_6 = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_6]^T$ 로 각 이동 파라미터의 추정치를 표기하도록 한다. 위의 최소 자승 문제의 해는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{h}}_n = - \left( \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} (\mathbf{g}_n(\mathbf{s}) \mathbf{g}_n(\mathbf{s})) \right)^{-1} \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} (\mathbf{g}_n(\mathbf{s}) FD(\mathbf{s})), \quad n = 2, 6. \quad (9)$$

위의 식은 대상 영역내의 각 화소들의 시공간 경사값들을 구함으로써 이동 파라미터를 계산할 수 있음을 보여준다.

이상의 유도 과정에서 알 수 있듯이, 미분 이동 추정 기법은 영상 신호의 변화를 선형으로 근사화하여 이동 파라미터를 추정하므로, 이동량이 클 경우, 만족할만한 추정치를 기대하기 어렵다. 이러한 이유로 실제 추정시에는 식(9)를 반복적으로 사용하는 이동 보상 반복 (motion compensated iteration) 기법이 사용된다. 이 때, 식(9)에 의해 구해지는 추정치는 이동 파라미터를 갱신하기 위한 갱신 파라미터 (update parameter)가 됨에 주의해야 한다. 이동 보상 반복식에 관해서는 문헌 [3, 4]를 참고하길 바라며, 이후로는 수렴 특성을 좌우하는 식(9)의 이론적 분석에 초점을 맞추고자 한다.

### III. 통계적 영상 모델링에 의한 이론적 추정치의 유도

#### 3.1 통계적 영상 모델링

비분리 지수형 공분산 모델(nonseparable exponential covariance model) 및 백색 잡음(white noise)에 의한 영상 모델링은 영상처리와 관련된 여러 알고리즘들의 해석 및 성능 분석을 위하여 다양하게 응용되어 왔다 [13]. 본 논문에서는 식(9)로 주어지는 갱신 파라미터  $\hat{\mathbf{h}}_n$ 의 특성을 분석하기 위하여 이 영상 모델을 사용하고자 한다.

이전 영상  $I_{t-1}(\mathbf{s})$ 를 평균이  $m$ 이고, 다음과 같은 비분리 지수형 공분산 모델[13]을 만족하는 연속(continuous)인 정상 신호(stationary signal)로 가정하자.

$$E[I_{t-1}(\mathbf{s})I_{t-1}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s})] = \sigma_s^2 e^{\|\mathbf{c} \wedge \Delta \mathbf{s}\|} + m^2. \quad (10)$$

위의 식에서  $\Delta \mathbf{s} = [\Delta x, \Delta y]^T$ 인 공간 좌표의 차이값이며,  $\sigma_s^2$ 는 분산이고,  $\mathbf{c} = \text{diag}(c_x, c_y)$ 이다.  $\|\cdot\|$ 는 Euclidean-norm으로,  $\|\mathbf{c} \wedge \Delta \mathbf{s}\| = (c_x^2 \Delta x^2 + c_y^2 \Delta y^2)^{\frac{1}{2}}$ 이다. x-방향과 y-방향의 상관 계수(correlation coefficient)는 각각  $\rho_x = e^{-c_x}$ 와  $\rho_y = e^{-c_y}$ 로 주어진다. 현재 영상  $I_t(\mathbf{s})$ 는 식(1)에 의해 이전 영상과 관계되어짐에 주목하자.

영상에 분산이  $\sigma_n^2$ 인 백색 잡음이 포함되었다고 가정하면,

$$I_{t-1}(\mathbf{s}) = I_{t-1}(\mathbf{s}) + N_{t-1}(\mathbf{s}), \quad (11)$$

$$I_t(\mathbf{s}) = I_t(\mathbf{s}) + N_t(\mathbf{s}) \quad (12)$$

이다. 위의 식에서  $I_{t-1}(\mathbf{s})$ 와  $I_t(\mathbf{s})$ 는 잡음이 부가된 밝기값을 나타내고,  $N_{t-1}(\mathbf{s})$ 와  $N_t(\mathbf{s})$ 는 시간, 공간 방향으로 비상관(uncorrelated)인 잡음 신호이다.

식(8)과 식(9)는 결정형 신호(deterministic signal)에 대한 문제 설정 및 해이다. 본 연구에서는 가정한 영상 모델에 바탕을 두고 식(8)을 다음과 같은 확률적 기대값(probabilistic expectation value)을 최소화하는

문제로 재설정한다.

$$\hat{\mathbf{h}}_n = \underset{\mathbf{h}_n}{\text{argmin}} E \left[ \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} (FD(\mathbf{s}) + \mathbf{h}_n^T \mathbf{g}_n(\mathbf{s}))^2 \right], \quad n = 2, 6.$$

위의 문제의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{\mathbf{h}}_n = -E \left[ \left( \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} (\mathbf{g}_n(\mathbf{s}) \mathbf{g}_n(\mathbf{s})^T) \right)^{-1} E \left[ \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} (\mathbf{g}_n(\mathbf{s}) FD(\mathbf{s})) \right] \right], \quad n = 2, 6. \quad (14)$$

여기에서 주목할 점은 식(9)와 식(14)의 관계이다. 실제 영상에서 이동 추정을 할 때 사용되는 식은 식(9)이므로, 이를 이론적으로 분석하기 위하여 사용되는 식(14)는 식(9)를 통계적으로 가능한한 정확히 표현할 수 있어야 한다. 식(14)는 식(9)의 행렬내의 값들을 확률적 기대값으로 단순히 바꾼 형태임을 알 수 있다. 다음 절부터는 본 절에서의 결과들을 이용하여, 이론적 추정치를 유도한다.

#### 3.2 2-파라미터 이동 모델의 추정치 유도

공간 경사  $g_x(\mathbf{s})$ 와  $g_y(\mathbf{s})$ 를 영상으로부터 어떻게 근사적으로 취하는가는 미분 이동 추정 기법의 수렴 특성을 결정짓는 중요한 사항중 하나이다. 본 절에서는 기존의 관련 연구들에서 가장 널리 사용되고 있는 두가지의 방법에 대하여 각각 분석을 행한다.

우선 가장 간단한 형태로, 이전 영상의 이웃한 두 밝기값의 평균을 취하는 방법[14]이 있다. 즉, 공간 경사는 다음의 식으로 주어진다.

$$g_x(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} (I_{t-1}(\mathbf{s}_r) - (I_{t-1}(\mathbf{s}_l))), \quad (15)$$

$$g_y(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} (I_{t-1}(\mathbf{s}_t) - (I_{t-1}(\mathbf{s}_b))). \quad (16)$$

위 식에서  $\mathbf{s}_r = \mathbf{s} + \mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{s}_l = \mathbf{s} - \mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{s}_t = \mathbf{s} + \mathbf{n}_y$ ,  $\mathbf{s}_b = \mathbf{s} - \mathbf{n}_y$ 이고,  $\mathbf{n}_x = [1, 0]^T$ ,  $\mathbf{n}_y = [0, 1]^T$ 이다.

식(1), (4), (10)-(12), (15), (16)를 식(14)에 대입함으로써 추정치  $\hat{\mathbf{h}}_2$ 를 다음과 같이 구할 수 있다. 위 식의 자세한 유도 과정은 부록 6.1절에 설명되어 있다.

$$\hat{t}_1 = \frac{e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) - \mathbf{n}_x)\|} - e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) + \mathbf{n}_x)\|}}{(1 - \rho_x^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2}, \quad (17)$$

$$\hat{t}_2 = \frac{e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) - \mathbf{n}_y)\|} - e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) + \mathbf{n}_y)\|}}{(1 - \rho_y^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2}. \quad (18)$$

위의 식은, 실제 이동 파라미터 및 영상 모델링에 관련된 인자들인 분산, 상관 계수등의 함수로, 추정치가 표현됨을 보여준다. 추후의 분석의 편의를 위하여, x 방향의 움직임만이 있는 경우를 고려하면, 이 때는  $t_2 = 0$ 이므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\hat{t}_1 |_{t_2=0} = \frac{\rho_x^{|t_1-1|} - \rho_x^{|t_1+1|}}{(1 - \rho_x^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2}, \quad (19)$$

$$\hat{t}_2 |_{t_2=0} = 0. \quad (20)$$

이번에는 공간 경사로써 현재 영상과 이전 영상으로부터 평균값을 사용하는 방법[2, 15]에 대하여 추정치를 유도한다. 이 때, 공간 경사는 다음 식으로 표현되며,

$$g_x(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \left( \frac{I(\mathbf{s}_r) - I(\mathbf{s}_l)}{2} + \frac{I_{l-1}(\mathbf{s}_r) - I_{l-1}(\mathbf{s}_l)}{2} \right), \quad (21)$$

$$g_y(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \left( \frac{I(\mathbf{s}_t) - I(\mathbf{s}_b)}{2} + \frac{I_{l-1}(\mathbf{s}_t) - I_{l-1}(\mathbf{s}_b)}{2} \right), \quad (22)$$

마찬가지로 식(1), (4), (10)-(12), (21), (22)를 식(14)에 대입함으로써 추정치를 유도할 수 있다. 그러나, 이 경우에는 추정치 수식의 복잡성으로 인하여, x방향의 이동만이 있는 경우에 대해서만 아래에 기술한다.

$$\hat{t}_1 |_{t_2=0} = \frac{2(\rho_x^{|t_1-1|} - \rho_x^{|t_1+1|})}{(1 - \rho_x^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2 - D(t_1)}, \quad (23)$$

$$\hat{t}_2 |_{t_2=0} = 0. \quad (24)$$

위의 식에서

$$D(t_1) = \frac{1}{2} (\rho_x^{|t_1-2|} - 2\rho_x^{|t_1|} + \rho_x^{|t_1+2|})$$

이다.

### 3.3 6-파라미터 이동 모델의 추정치 유도

6-파라미터 이동 모델은 공간 경사를 이전 영상으로부터 취하는 경우에 대하여만 유도한다. 즉, 식(15)과 (16)을 공간 경사로 한다. 또한, 영역의 모양이 x-, y-방향으로 대칭이며, 좌표 원점을 영역의 중심으로 하는 제한 조건하에서 유도한다. 이 제한 조건하에서는 다음의 식이 성립된다.

$$\sum_{\mathbf{s} \in \Omega} x = \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} y = \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} (xy) = 0. \quad (25)$$

식(1), (3), (10)-(12), (15), (16)을 식(14)에 대입하면 다음과 같은 추정치를 얻을 수 있다. 자세한 유도 과정은 부록 6.2절에 설명되어 있다.

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum (xH(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6))}{((1 - \rho_x^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2) \sum x^2}, \quad (26)$$

$$\hat{a}_2 = \frac{\sum (yH(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6))}{((1 - \rho_x^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2) \sum y^2}, \quad (27)$$

$$\hat{a}_3 = \frac{\sum H(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6)}{((1 - \rho_x^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2) \sum 1}, \quad (28)$$

$$\hat{a}_4 = \frac{\sum (xV(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6))}{((1 - \rho_y^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2) \sum x^2}, \quad (29)$$

$$\hat{a}_5 = \frac{\sum (yV(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6))}{((1 - \rho_y^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2) \sum y^2}, \quad (30)$$

$$\hat{a}_6 = \frac{\sum V(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6)}{((1 - \rho_y^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2) \sum 1}. \quad (31)$$

위의 식에서

$$H(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6) = e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6) - \mathbf{n}_x)\|} - e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6) + \mathbf{n}_x)\|},$$

$$V(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6) = e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6) - \mathbf{n}_y)\|} - e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_6) + \mathbf{n}_y)\|}$$

이다.

추후의 분석의 편의와 각 파라미터별 독립적 특성을 파악하기 위하여, 식(26)을,  $a_1$ 을 제외한 나머지 파라미터가 모두 0인 경우에 대하여 간략화하면,

$$\hat{a}_1 |_{a_i=0, (i=2,3,4,5,6)} = \frac{\sum (x(\rho_x^{|a_1x-1|} - \rho_x^{|a_1x+1|}))}{((1 - \rho_x^2) + \sigma_n^2 / \sigma_s^2) \sum x^2} \quad (32)$$

이 되며,  $\hat{a}_2, \dots, \hat{a}_6$ 는 모두 0가 된다. 마찬가지로 식 (27)-(31)에 대하여 간략화하면,

$$\hat{a}_2 \Big|_{a_k=0, (k=1,3,4,5,6)} = \frac{\sum (y(\rho_x^{|a_2 y-1|} - \rho_x^{|a_2 y+1|}))}{((1-\rho_x^2) + \sigma_n^2/\sigma_s^2) \sum y^2}, \quad (33)$$

$$\hat{a}_3 \Big|_{a_k=0, (k=1,2,4,5,6)} = \frac{\rho_x^{|a_3-1|} - \rho_x^{|a_3+1|}}{(1-\rho_x^2) + \sigma_n^2/\sigma_s^2}, \quad (34)$$

$$\hat{a}_4 \Big|_{a_k=0, (k=1,2,3,5,6)} = \frac{\sum (x(\rho_y^{|a_4 x-1|} - \rho_y^{|a_4 x+1|}))}{((1-\rho_y^2) + \sigma_n^2/\sigma_s^2) \sum x^2}, \quad (35)$$

$$\hat{a}_5 \Big|_{a_k=0, (k=1,2,3,4,6)} = \frac{\sum (y(\rho_y^{|a_5 y-1|} - \rho_y^{|a_5 y+1|}))}{((1-\rho_y^2) + \sigma_n^2/\sigma_s^2) \sum y^2}, \quad (36)$$

$$\hat{a}_6 \Big|_{a_k=0, (k=1,2,3,4,5)} = \frac{\rho_y^{|a_6-1|} - \rho_y^{|a_6+1|}}{(1-\rho_y^2) + \sigma_n^2/\sigma_s^2} \quad (37)$$

이 된다.

#### IV. 수렴 특성 분석

본 절에서는 이상의 유도 결과를 이용하여, 미분 이동 추정 기법의 수렴 특성을 분석하고, 실험 결과와의 비교를 통하여 이를 검증한다.

##### 4.1 이론적 분석

그림 1은 식(19)과 식(23)을 잡음이 없는 경우에 대하여 그린 그래프이다. 그림에서 가로축은 x-방향으로의 실제 이동의 크기를 나타내며, 세로축은 이에 대한 이

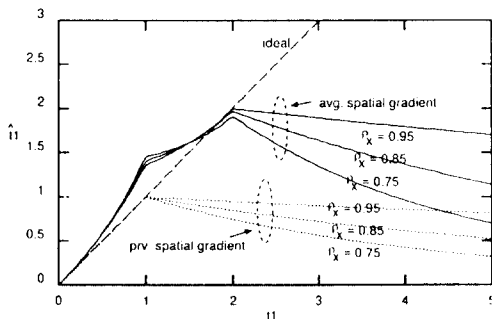


그림 1. x-방향 병진 이동에 대한 2-파라미터 모델의 이론적 추정치  
Fig. 1 Theoretical estimate of 2-parameter model for x-directional translational motion

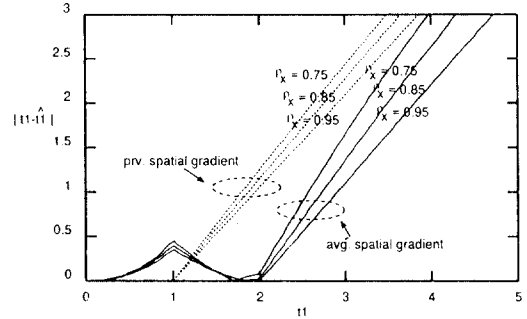


그림 2. x-방향 병진 이동에 대한 2-파라미터 모델의 이론적 추정 오차  
Fig. 2 Theoretical estimation error of 2-parameter model for x-directional translational motion

론적 추정치를 의미한다. 그림 2는 그림 1을 실제치와 추정치 사이의 절대 오차로 변환하여 그린 그래프이다. 이동이 커짐에 따라, 실제치와 추정치 사이에 상당한 오차가 발생함을 볼 수 있는데, 여기에서 주의할 점은 식(19)와 식(23)은 최종 수렴치를 나타내는 식이 아니라, 갱신 벡터에 대한 추정치를 의미한다는 점이다. 그러므로, 그림에서 존재하는 오차는 매 반복에서의 오차의 크기를 나타낼 뿐이며, 수렴치는 2장에서 언급한 반복 과정을 이용하여 구해야 한다. 예를 들어, 실제 이동이 x-방향으로 5이고, 평균 공간 경사를 이용하는 식(23)을 이용하여 이동 추정을 한다고 하자. 상관 계수가 0.95라고 하면, 그림 1에서 추정치는 약 1.7이 된다. 이 값을 이용하여, 이전 영상을 1.7화소만큼 이동시키고, 이 영상과 현재 영상을 이용하여 다시 추정치를 구한다. 이 때는 실제치가 약 5-1.7=3.3이 되며, 추정치는 약 1.8이 된다. 이와 같은 과정을 반복하면, 3번의 반복으로 0.5화소 이하의 오차를 갖는 수렴치를 구할 수 있음을 알 수 있다. 이후부터 오차라 함은 실제치와 수렴치간의 오차가 아니라, 갱신 벡터 추정치간의 오차를 의미함에 주의하자.

그림 1과 그림 2에서 먼저 주목해야 할 점은 공간 경사의 선택 방법에 따른 오차의 차이이다. 실제치가 상당히 작은 경우(약 1화소 이하)는 식(15), 식(16)으로 주어지는 이전 영상의 경사를 이용하는 것이, 그렇지 않은 경우는 식(21), 식(22)으로 주어지는 평균 경사를 이용하는 것이 오차가 더 적다. 그러나, 실제치가 1화소 이하일때 두 방법의 오차의 차이는 0.5화

소 이하이며, 이는 수렴 속도측면에서는 중요하지 않다. 즉, 그 차이는 평균 경사를 이용하는 경우가 1회의 반복을 더 수행함으로써 없앨 수 있는 정도이다. 그러므로, 이동이 큰 경우에 주목하여 두 방법을 비교하여 보자. 식(19)를 잡음이 없고,  $t_1 \geq 1$ 인 경우에 대하여 다시 정리하면,

$$\hat{t}_1 = \rho_x^{t_1-1} \quad (38)$$

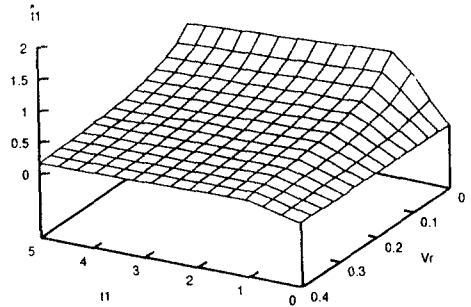
이며, 식(23)을 잡음이 없고,  $t_1 \geq 2$ 인 경우에 대하여 다시 정리하면,

$$\hat{t}_1 = \left( \frac{4}{2 + \rho_x^{t_1} - \rho_x^{t_1-2}} \right) \rho_x^{t_1-1} \quad (39)$$

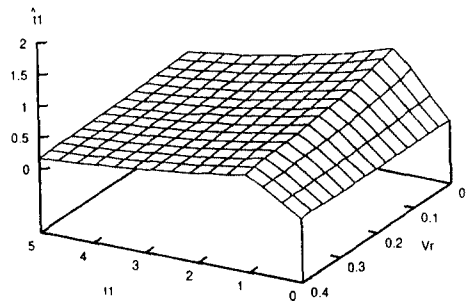
이다. 일반적으로 영상의 상관 계수가 1에 가깝다는 사실로부터, 식(38)는 1, 식(39)는 2로 근사화할 수 있고, 이로부터 평균 경사를 이용하는 경우가 이전 경사만을 이용하는 경우에 비하여 그 추정치의 크기가 약 2배 더 크음을 알 수 있다. Bierling은 평균 경사를 이용함으로써 이동 제한식 유도 과정에서 무시되는 2차항의 효과를 반영시킬 수 있음을 보였고[2], 그 후, 여러 논문에서 이를 사용하여 왔다[3, 4, 7, 16, 17]. 그러나, 실제 이동 추정시에 그 효과가 어떻게 나타나는지에 대한 분석이 없었다는 점에서 본 연구의 정량적인 분석은 그 가치가 크다고 할 수 있다. 그림 1와 그림 2에서 주목해야 할 또 하나는, 상관 계수에 따른 추정치 크기의 변화이다. 상관 계수가 낮아짐에 따라 추정치의 오차가 점점 커짐을 볼 수 있다. 이는 이동 제한식이 영상 신호의 선형 근사화에 바탕을 두고 있다는 점에 기인한다. 즉, 이동 제한식은 화소 단위로 그 화소와 주변의 몇 개의 화소들을 이용하는 경사값에 의하여 전체 영상을 근사화하므로, 화소간의 상관성이 감소하면 고차항의 무시로 인한 추정치의 오차가 커지게 된다.

그림 3은 이전 영상의 경사를 이용하는 경우에 대하여, 잡음에 의한 추정치의 변화를 도시한 그래프이다. 그림에서  $Vr = \sigma_n^2 / \sigma_s^2$ 이다. 잡음의 양이 증가할수록, 추정치의 크기가 작아짐을 알 수 있다. Moon은 잡음이 첨가되면 수렴 속도가 느려짐을 실험을 통하여 관찰한 바 있는데[12], 위의 분석은 이를 정량적으

로 보이고 있다. 그림에서 가장 주목해야 할 점은,  $\rho_x = 0.95$ 인 그림 3-(a)의 경우가  $\rho_x = 0.75$ 인 그림 3-(b)의 경우에 비하여 잡음이 증가함에 따라 추정치의 크기가 급속히 작아진다는 것이다. 즉, 잡음이 없을 때는 상관 계수가 높은 경우가 수렴 속도면에서 유리하지만, 어느 정도의 잡음이 첨가된 상황에서는 오히려 상관 계수가 낮은 경우가 유리하다. 이것은 저역 필터링의 필요성을 보여주는 결과이다. 저역 필터링은 영상을 평활화시켜 상관 계수를 높이는 효과를 가져 올 뿐만 아니라, 잡음을 감소시키는 역할도 한다. 이와 같은 저역 필터링의 중요성에 대한 언급은



(a)



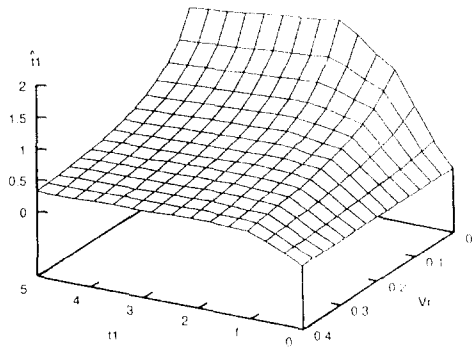
(b)

그림 3. 잡음의 양에 의한 이론적 추정치의 변화 (이전 영상의 공간 경사 사용, 2-파라미터 모델) (a)  $\rho_x = 0.95$  (b)  $\rho_x = 0.75$

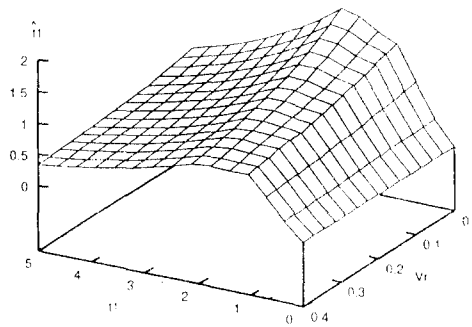
Fig. 3 Variation of theoretical estimate due to noise (spatial gradient of previous frame, 2-parameter model) (a)  $\rho_x = 0.95$  (b)  $\rho_x = 0.75$

다른 여러 문헌들에서도 되어 있다[4, 5, 7, 16, 17, 18]. 그림 4는 평균 경사를 이용하는 경우에 대한 그래프로서, 마찬가지로의 관찰들을 할 수 있다. 그림 3과 그림 4을 비교하면, 잡음이 첨가된 경우에도 평균 경사를 이용하는 경우가 이전 영상의 경사만을 이용하는 경우에 비하여 추정치 실제값에 더 근접함을 알 수 있다.

이상은 x-방향의 이동만이 존재하는 경우의 2-파라미터 추정에 대한 분석이었다. 일반적으로 x-, y-방향의 이동이 존재하는 경우도, 마찬가지로의 특성을 보임을 쉽게 보일 수 있다. 6-파라미터 추정의 경우, 식의 복



(a)



(b)

그림 4. 잡음의 양에 의한 이론적 추정치의 변화 (두 영상의 평균 공간 경사 사용, 2-파라미터 모델) (a)  $\rho_x=0.95$  (b)  $\rho_x=0.75$

Fig. 4 Variation of theoretical estimate due to noise (average spatial gradient from two frames, 2-parameter model) (a)  $\rho_x=0.95$  (b)  $\rho_x=0.75$

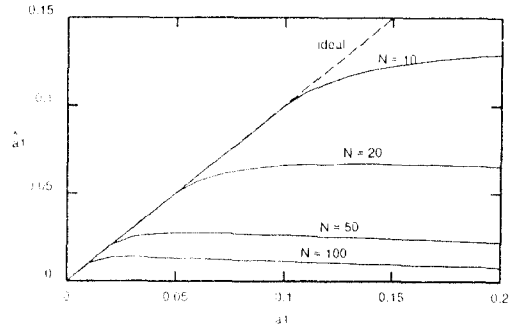


그림 5. 영역 크기  $(2N+1) \times (2N+1)$ 에 의한 이론적 추정치  $\hat{a}_1$ 의 변화(이전 영상의 공간 경사 사용, 6-파라미터 모델,  $\rho_x = \rho_y = 0.95$ )

Fig. 5 Variation of theoretical estimate  $\hat{a}_1$  due to region size  $(2N+1) \times (2N+1)$  (spatial gradient of previous frame, 6-parameter model,  $\rho_x = \rho_y = 0.95$ )

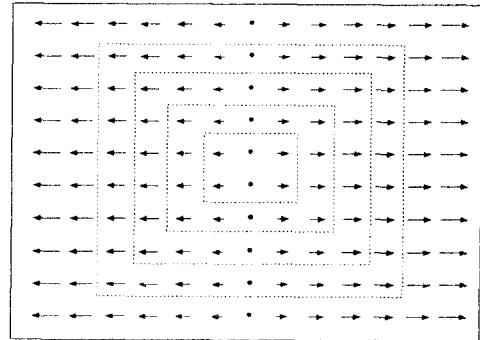


그림 6.  $a_1$ 만이 0이 아닌 경우의 이동 벡터장. 점선들은 이동 추정 영역을 나타냄.

Fig. 6 Motion vector field in the case that only  $a_1$  is non-zero. The dotted lines represent regions used for motion estimation

잡음으로 인하여 이전 영상의 경사만을 이용하는 경우에 대하여 3.3절에서 추정치를 유도한 바 있다. 그러나, 6-파라미터 역시, 앞의 직관적인 해석에 근거하면, 평균 경사를 이용하는 것이 수렴 속도측면에서 유리할 것이라는 것을 예상할 수 있다. 이것은 4.2절에서 실험을 통하여 검증한다. 상관 계수 및 잡음에 의한 추정치의 영향과 둘 사이의 관계는 식(26)-(31)을 이용하면 앞서와 마찬가지로의 결과를 얻을 수 있다. 이상으로부터 수렴 속도를 향상시키기 위해서는, 이동



추정 전에 지역 필터링을 수행하고, 공간 경사로써 평균 경사를 이용하는 것이 좋다는 결론을 내릴 수 있다.

6-파라미터 추정의 경우, 주목할만한 새로운 특성은 이동 추정 영역  $\Omega$ 의 크기와 추정치 사이의 관계이다. 식(34)와 (37)를 살펴보면,  $\hat{a}_3, \hat{a}_6$ 는 2-파라미터의  $i_1, i_2$ 와 각각 동일한 식이며, 영역의 크기는 수렴 속도와 무관함을 알 수 있다. 반면에, 식(32), (33), (35), (36)는 주어진 실제 이동 파라미터에 대하여, 영역의 크기가 커짐에 따라 수렴 속도가 느려지게 된다. 그림 5는 식(32)을 이용하여  $\hat{a}_1$ 에 대한 실제치와 추정치 사이의 관계를 도시한 그래프이다. 그림에서  $N$ 은 영역의 크기를 나타내는 값으로  $(2N+1) \times (2N+1)$ 이 영역의 크기이다. 영역의 크기가 커짐에 따라 추정치의 크기가 작아짐을 볼 수 있다. 그림 6은  $\hat{a}_1$ 이 0이 아닌 경우, 식(32)에 의하여 생기는 이동 벡터장을 도시한 것이다. 이 그림에서 볼 수 있듯이, 영역이 커짐에 따라 크기가 큰 이동 벡터들이 점점 더 많이 포함되어짐을 알 수 있다. 이로 인하여, 화소 단위의 근사화에 바탕을 둔 이동 제한식의 근사 오차가 점점 더 커지게 되고, 따라서 추정치의 오차도 커지게 된다.  $\hat{a}_2, \hat{a}_4, \hat{a}_5$ 에 대해서도 마찬가지로의 결과를 얻을 수 있다. 이상으로부터, 2-파라미터 이동과는 달리, 6-파라미터 이동처럼 영역내의 이동 벡터들이 위치에 따라 가변할 수 있는 경우에는 영역의 크기도 수렴 속도에 영향을 준다는 결론을 얻을 수 있다.

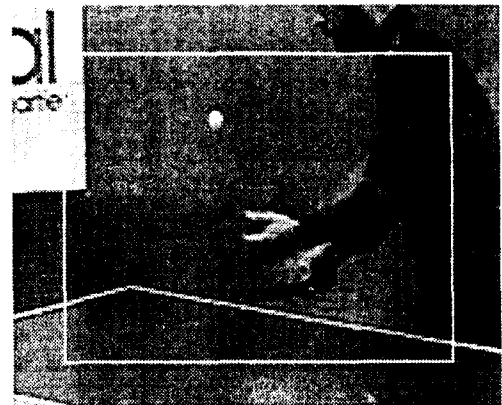
#### 4.2 실험 결과와의 비교

지금까지의 분석은 3.1절에서 가정한 영상 모델을 바탕으로 하여 유도된 식(14)를 이용한 것이었다. 반면에, 실제 이동 추정시에는 식(9)를 이용하여 직접 주어진 영상으로부터 추정치를 구해야 한다. 식(9)와 식(14)에 의한 실험적 추정치와 이론적 추정치의 차이는 가장한 영상 모델의 정확도에 따라 달라질 것이다. 이러한 차이를 알아보기 위하여 몇가지 실험을 수행하였다. 잡음에 의한 영향은 Moon의 실험 결과 [12]에서 이미 보인 바 있으므로 생략하였다.

그림 7은 실험에 사용한 영상으로, 'Miss America'(MSAM) 첫번째 프레임과 'Pingpong'(PIPO) 50번째 프레임이다. 영상 크기는  $176 \times 144$ 이며, 휘도(luminance) 성분만을 사용하였다. 그림에 표시된 사각형은 이동 추



(a)



(b)

그림 7. 실험에 사용된 영상. 실선은 이동 추정 영역을 나타냄. (a) 'Miss America'(MSAM) 첫 번째 프레임. 영역 크기  $81 \times 81$ .

Fig. 7 Test images for experiments. The solid line represents a region used for motion estimation (a) 'Miss America'(MSAM) the 1st frame. Region size  $81 \times 81$ .  $\rho_x = 0.992, \rho_y = 0.991$  (b) 'Pingpong'(PIPO) the 50th frame. Region size  $141 \times 111$ .  $\rho_x = 0.939, \rho_y = 0.848$

정 영역( $\Omega$ )으로 MSAM의 경우는  $81 \times 81$ , PIPO의 경우는  $141 \times 111$ 의 크기이다. 이 영상들은 이전 영상으로 사용되며, 이 영상으로부터 주어진 이동 파라미터에 의하여 현재 영상을 만든다. 이 때, 이전 영상의 부

화소(subpel) 단위의 밝기값은 쌍선형 보간(bilinear interpolation)에 의하여 구하였다. 이렇게 구한 이전과 현재 영상에 대하여 이동 추정 문제를 고려하였다. 현재 영상의 이동 추정 영역도 이전 영상과 동일하다.

이론적 추정치를 구하기 위해서는, 이전 영상의 이동 추정 영역으로부터 상관 계수를 구해야 하는데, 다음의 식들을 이용하여 근사적으로 구하였다. 우선, 평균  $m = \sum_{s \in \Omega} I_{t-1}(s) / \sum_{s \in \Omega} 1$ 을 계산한 뒤, 이를 이용하여

$$\rho_x = \frac{\sum_{s \in \Omega} \{ (I_{t-1}(s) - m) / (I_{t-1}(s + \mathbf{n}_x) - m) \}}{\sum_{s \in \Omega} (I_{t-1}(s) - m)^2}$$

$$\rho_y = \frac{\sum_{s \in \Omega} \{ (I_{t-1}(s) - m) / (I_{t-1}(s + \mathbf{n}_y) - m) \}}{\sum_{s \in \Omega} (I_{t-1}(s) - m)^2}$$

을 구한다.

그림 8은 x-방향의 병진 이동만이 존재하는 경우, 2-파라미터 추정에 대한 이론치와 실험치를 비교하고 있다. 둘 사이에 오차가 존재하고 있으나, 전체적인 그래프의 모형은 일치하고 있음을 볼 수 있다. 실험치의 경우는 y-방향의 추정치가 정확히 0은 아니지만, 상당히 작은 값이다. 이동이 클 때, 평균 경사를 이용하는 경우가 이전 영상의 경사만을 이용하는 경우에 비하여 추정치가 더 크며, 또한, 상관 계수가 작은

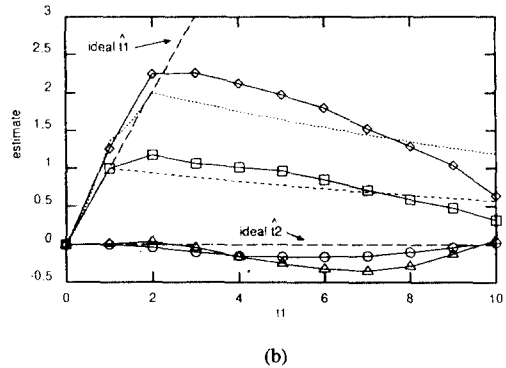
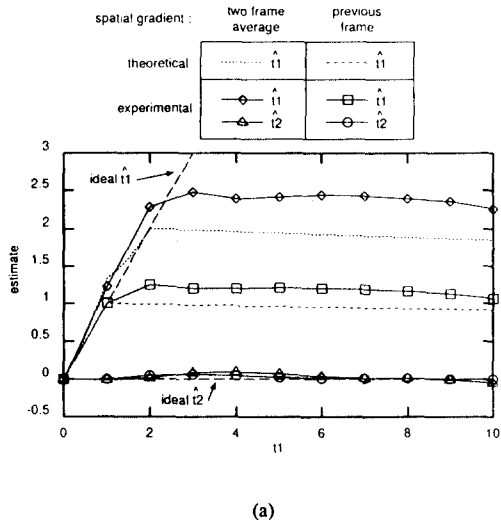


그림 8. x-방향 병진 이동에 대한 실험치와 이론치의 비교 (2-파라미터 모델) (a) MSAM (b) PIPO  
Fig. 8 Comparison of experimental and theoretical estimates of x-directional translational motion (2-parameter model) (a) MSAM (b) PIPO

PIPO 영상이 MSAM 영상에 비하여 추정치가 더 작았다. 이러한 관찰은 이론적 분석과 일치한다.

표 1과 2는 각각 MSAM와 PIPO 영상의 경우에 대한, 6-파라미터의 추정 결과이다. 여러가지 상황을 고려하기 위하여 병진 이동, 확대, 회전에 대한 결과를 각각 보였다. 비교의 편의를 위하여 다음과 같이 정의되는 평균 사상 오차 (AME; average mapping error)

표 1. 6-파라미터 이동 추정에 대한 실험치와 이론치의 비교 MSAM 영상. (a) 병진 이동 (b) 확대 (c) 회전 (5°)

Table 1. Comparison of experimental and theoretical estimates of 6-parameter motion estimation. MSAM image. (a) Translation (b) Zooming (c) Rotation (5°)

		gradient	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>	AME
$\hat{h}_6$	actual		0.000	0.000	3.000	0.000	0.000	-2.000	3.62
	theoretical	previous	0.000	0.000	0.771	0.000	0.000	-0.571	2.65
		average	-0.009	0.015	1.990	0.011	-0.010	-1.445	1.27

(a)

		gradient	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>	AME
$\hat{h}_6$	actual		0.200	0.000	0.000	0.000	0.200	0.000	6.61
	theoretical	previous	0.026	0.000	0.000	0.000	0.028	0.000	5.72
		average	0.101	0.026	-0.072	0.007	0.084	0.002	3.62

(b)

		gradient	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	AME
$h_6$ (actual)			0.004	-0.087	0.000	0.087	0.004	0.000	2.88
$\hat{h}_6$	theoretical	previous	0.001	-0.026	0.000	0.028	0.001	0.000	1.99
	empirical	previous	-0.002	-0.048	-0.011	0.047	-0.001	-0.034	1.32
		average	0.000	-0.090	0.005	0.087	0.002	-0.043	0.13

(c)

표 2. 6-파라미터 이동 추정에 대한 실험치와 이론치의 비교  
PIPO 영상. (a) 병진 이동 (b) 확대 (c) 회전 (5°)

Table 2. Comparison of experimental and theoretical estimates of 6-parameter motion estimation. PIPO image.  
(a) Translation (b) Zooming (c) Rotation (5°)

		gradient	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	AME
$h_6$ (actual)			0.000	0.000	3.000	0.000	0.000	-2.000	3.61
$\hat{h}_6$	theoretical	previous	0.000	0.000	0.357	0.000	0.000	-0.674	2.96
	empirical	previous	0.007	-0.012	0.404	0.003	0.010	-0.329	3.14
		average	0.016	-0.032	0.813	0.008	0.019	-0.693	2.89

(a)

		gradient	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	AME
$h_6$ (actual)			0.200	0.000	0.000	0.000	0.200	0.000	10.36
$\hat{h}_6$	theoretical	previous	0.005	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000	10.04
	empirical	previous	0.008	0.005	0.094	0.002	0.001	0.127	10.09
		average	0.017	0.007	0.322	0.004	0.001	0.342	9.83

(b)

		gradient	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	AME
$h_6$ (actual)			0.004	-0.087	0.000	0.087	0.004	0.000	4.51
$\hat{h}_6$	theoretical	previous	0.001	-0.008	0.000	0.012	0.000	0.000	3.97
	empirical	previous	-0.002	-0.008	0.094	0.004	-0.003	0.147	4.24
		average	-0.007	-0.019	0.247	0.010	-0.010	0.342	3.89

(c)

[12]를 각 표의 마지막 열에 표기하였다.

$$AME = \frac{\sum_{s \in \Omega} \|s - s'\|}{\sum_{s \in \Omega}}$$

위의 식에서  $s'$ 은 추정전의  $s$ 의 대응되는 이전 프레임에서의 위치 (표에서 2번째 행), 또는 1회의 추정치 계산 후 이동 보상 후의 대응되는 위치 (표에서 3, 4, 5번째 행)를 나타낸다. 6-파라미터의 경우도 평균 경

사를 사용하는 것이 이전 영상의 경사만을 이용하는 경우에 비하여 더 정확한 추정치를 얻을 수 있음을 실험적으로 볼 수 있다. 병진 이동의 경우, 상관 계수의 차이로 인하여 PIPO 영상의 추정치가 MSAM 영상에 비하여 상대적으로 작는데, 이론치와 추정치 모두 이를 잘 보여 주고 있다. 확대와 회전의 경우, 상관 계수의 차이뿐만 아니라 영역 크기의 차이로 인하여 PIPO 영상의 추정치가 현저히 작은 것이 이론치와 추정치에 잘 나타나 있다.

이상의 비교 결과로부터, 본 연구의 이론적 분석이 실제 이동 추정시의 여러가지 특성들을 잘 설명할 수 있음을 알 수 있다.

### V. 결 론

본 논문에서는 2차원 이동 파라미터 추정을 위한 미분 이동 추정 기법의 수렴 특성을 분석하였다. 비분리 지수형 공분산 모델 및 백색 잡음에 의한 영상 모델링에 근거하여, 2-파라미터와 6-파라미터 이동 모델에 대하여 갱신 벡터를 유도하였다. 이 유도 결과들을 이용하여, 잡음, 상관 계수, 공간 경사의 선택 방법, 영역의 크기등이 수렴 속도에 주는 영향을 정량적으로 분석하였으며, 실험을 통하여 이를 검증하였다. 잡음의 양이 적을수록, 상관 계수가 클수록 수렴 속도가 높아짐을 보였으며, 이를 바탕으로 저역 필터링의 필요성을 설명하였다. 공간 경사로서, 두 영상의 경사를 평균하여 사용하는 것이 이전 영상만을 사용하는 것에 비하여 수렴 속도를 높일 수 있음과, 병진 이동이 아닌 경우에는 영역의 크기가 수렴 속도에 영향을 줄 수 있음을 보였다.

본 연구의 결과들은 추후에, 미분 이동 추정 기법의 특성을 이해하고, 그 성능을 향상시키는데에 중요한 역할을 할 수 있을 것으로 판단된다.

### VI. 부 록

수식 표기의 편의상  $I(\cdot) = I_{t-1}(\cdot)$ ,  $I(\cdot) = I_{t-1}(\cdot)$ ,  $N(\cdot) = N_{t-1}(\cdot)$ 으로 표기하고,  $g_x = g_x(s)$ ,  $g_y = g_y(s)$ ,  $FD = FD(s)$ 로 표기한다.

6.1 식 (17)와 식(18)의 유도

식(14)는 2-파라미터의 경우, 다음과 같다.

$$\hat{h}_2 = - \left\{ \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} \begin{bmatrix} E[g_x^2] & E[g_x g_y] \\ E[g_x g_y] & E[g_y^2] \end{bmatrix} \right\}^{-1} \sum_{\mathbf{s} \in \Omega} \begin{bmatrix} E[g_x FD] \\ E[g_y FD] \end{bmatrix} \quad (40)$$

공간 경사는 식(15)에 의하여 주어지므로,

$$E[g_x^2] = \frac{1}{4} (E[\dot{I}(\mathbf{s}_r)^2] + E[\dot{I}(\mathbf{s}_l)^2] - 2E[\dot{I}(\mathbf{s}_r)\dot{I}(\mathbf{s}_l)]) \quad (41)$$

이 된다. 이 식에서,  $E[\dot{I}(\mathbf{s}_r)^2] = E[\dot{I}(\mathbf{s}_l)^2] = E[\dot{I}(\mathbf{s})^2]$ 이고,

$$E[\dot{I}(\mathbf{s})^2] = E[(I(\mathbf{s}) + N(\mathbf{s}))^2] = E[I(\mathbf{s})^2] + E[N(\mathbf{s})^2] + 2E[I(\mathbf{s})N(\mathbf{s})] = \sigma_s^2 \rho_x^2 + m^2 \quad (42)$$

이며, 또한,

$$E[\dot{I}(\mathbf{s}_r)\dot{I}(\mathbf{s}_l)] = E[(I(\mathbf{s}_r) + N(\mathbf{s}_r))(I(\mathbf{s}_l) + N(\mathbf{s}_l))] = E[I(\mathbf{s}_r)I(\mathbf{s}_l)] = \sigma_s^2 \rho_x^2 + m^2 \quad (42)$$

이므로, 식(41)은

$$E[g_x^2] = \frac{1}{2} (\sigma_s^2 - \sigma_s^2 \rho_x^2 + \sigma_n^2) \quad (44)$$

이 된다. 마찬가지로 계산하면,

$$E[g_y^2] = \frac{1}{2} (\sigma_s^2 - \sigma_s^2 \rho_y^2 + \sigma_n^2), \quad (45)$$

$$E[g_x g_y] = 0 \quad (46)$$

가 된다. 또한,

$$E[g_x FD] = \frac{1}{2} E[(I(\mathbf{s}_r) - I(\mathbf{s}_l))(I(\mathbf{s}) - I(\mathbf{s}))] = \frac{1}{2} E[(I(\mathbf{s}_r) - I(\mathbf{s}_l))(I(\mathbf{s}) + N(\mathbf{s}) - I(\mathbf{s}))]$$

$$= \frac{1}{2} E[(I(\mathbf{s}_r) - I(\mathbf{s}_l))(I(\mathbf{s} - \mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2)) + N(\mathbf{s}) - I(\mathbf{s}))] = \frac{1}{2} E[(I(\mathbf{s}_r) - I(\mathbf{s}_l))I(\mathbf{s} - \mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2))]$$

이므로, 정리하면,

$$E[g_x FD] = \frac{1}{2} \sigma_s^2 (e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) + \mathbf{n}_s)\|} - e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) - \mathbf{n}_s)\|}) \quad (47)$$

이 되며, 마찬가지로,

$$E[g_y FD] = \frac{1}{2} \sigma_s^2 (e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) + \mathbf{n}_s)\|} - e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) - \mathbf{n}_s)\|}) \quad (48)$$

가 된다.

이상의 식(44)-(48)를 식(40)에 대입하면, 식(17)와 식(18)를 구할 수 있다.

### 6.2 식(26)-(31)의 유도

우선,  $E[g_x FD]$ 와  $E[g_y FD]$ 는 각각 식(47)와 식(48)의 계산 과정을 참고하면, 다음과 같이 된다.

$$E[g_x FD] = \frac{1}{2} \sigma_s^2 (e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) + \mathbf{n}_s)\|} - e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) - \mathbf{n}_s)\|}), \quad (49)$$

$$E[g_y FD] = \frac{1}{2} \sigma_s^2 (e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) + \mathbf{n}_s)\|} - e^{-\|c(\mathbf{v}(\mathbf{s}; \mathbf{h}_2) - \mathbf{n}_s)\|}). \quad (50)$$

식(46)에서  $E[g_x g_y] = 0$ 이고, 또한, 식(44), (45)에서  $E[g_x]$ 와  $E[g_y]$ 는 좌표  $\mathbf{s}$ 와 무관하므로, 식(14)는 다음의 두 식으로 간략화 된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\sum x^2) E[g_x^2] (\sum xy) & E[g_x^2] (\sum x) & E[g_x^2] \\ (\sum xy) E[g_x^2] (\sum y^2) & E[g_x^2] (\sum y) & E[g_x^2] \\ (\sum x) E[g_x^2] (\sum y) & E[g_x^2] (\sum 1) & E[g_x^2] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum (x E[g_x FD]) \\ \sum (y E[g_x FD]) \\ \sum (E[g_x FD]) \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\sum x^2) E[g_y^2] (\sum xy) & E[g_y^2] (\sum x) & E[g_y^2] \\ (\sum xy) E[g_y^2] (\sum y^2) & E[g_y^2] (\sum y) & E[g_y^2] \\ (\sum x) E[g_y^2] (\sum y) & E[g_y^2] (\sum 1) & E[g_y^2] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum (x E[g_y FD]) \\ \sum (y E[g_y FD]) \\ \sum (E[g_y FD]) \end{bmatrix}. \quad (52)$$

영역이 대칭이고, 좌표 원점이 영역의 중심이라는 식 (25)으로부터, 위의 식은 더욱 간략화될 수 있다.

$$\hat{a}_1 = - \frac{\sum (x E[g_x FD])}{E[g_x^2] \sum x^2}, \quad (53)$$

$$\hat{a}_2 = - \frac{\sum (y E[g_x FD])}{E[g_x^2] \sum y^2}, \quad (54)$$

$$\hat{a}_3 = - \frac{\sum E[g_x FD]}{E[g_x^2] \sum 1}, \quad (55)$$

$$\hat{a}_4 = - \frac{\sum (x E[g_y FD])}{E[g_y^2] \sum x^2}, \quad (56)$$

$$\hat{a}_5 = - \frac{\sum (y E[g_y FD])}{E[g_y^2] \sum y^2}, \quad (57)$$

$$\hat{a}_6 = - \frac{\sum E[g_y FD]}{E[g_y^2] \sum 1}. \quad (58)$$

결국, 식(44), (45), (49), (50)를 식(53)-(58)에 대입함으로써, 식(26)-(31)을 구할 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. J. R. Jain and A. K. Jain, "Displacement measurement and its application in interframe image coding", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. COM-29, pp. 1799-1808, Dec. 1981.
2. M. Bierling, "A differential displacement estimation algorithm and improved stability", *Proc. of SPIE Image Coding*, Vol. 594, pp. 170-174, 1985.
3. M. Hötter, "Differential estimation of the global motion parameters zoom and pan", *Signal Processing*, Vol. 16, pp. 249-265, 1989.
4. S. F. Wu and J. Kittler, "A differential method for simultaneous estimation of rotation, change of scale and translation", *Signal Processing: Image Communication*, Vol. 2, No. 1, pp. 69-80, May 1990.
5. J. M. Odobez and P. Bouthemy, "Robust multiresolutional estimation of parametric motion models", *J. of Visual Comm. Image Rep.*, Vol. 6, No. 4, pp. 348-365, Dec. 1995.
6. G. J. Keesman, "Motion estimation based on a moon model incorporating translation, rotation and zoom" *Proc. Signal Processing IV: Theories and Ap-*

- plications*, pp. 31-34, 1988.
7. M. Hötter and R. Thoma, "Image segmentation based on object oriented mapping parameter estimation", *Signal Processing*, Vol. 15, pp. 315-334, 1988.
8. C. A. Papadopoulos and T. G. Clarkson, "Motion compensation using second-order geometric transformations", *IEEE Trans. Circ. Sys. Video Tech.*, Vol. 5, No. 4, pp. 319-331, Aug. 1995.
9. ISO/IEC 14496-2 CD, "Information technology-coding of audio-visual objects: visual", ISO/IEC JTC1/SC29/WG11 N1902, Oct. 1997.
10. J.-H. Lee and S.-D. Kim, "An error analysis of gradient-based methods", *Signal Processing*, Vol. 35, No. 2, pp. 157-162, 1993.
11. J. K. Kearney, W. B. Thompson and D. L. Boley, "Optical flow estimation: an error analysis of gradient-based methods with local optimization", *IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell.*, Vol. PAMI-9, No. 2, pp. 229-244, Mar. 1987.
12. J.-H. Moon and J.-K. Kim, "On the accuracy and convergence of 2-D motion models using minimum MSE motion estimation", *Signal Processing: Image Communication*, Vol. 6, No. 4, pp. 319-333, Aug. 1994.
13. A. K. Jain, "Advances in mathematical models for image processing," *Proc. IEEE*, Vol. 69, No. 5, pp. 502-528, May 1981.
14. C. Cafforio, "The differential method for image motion estimation", in: T. S. Huang, ed., *Image Sequence Processing and Dynamic Scene Analysis*, Springer, Berlin, pp. 104-124, 1983.
15. R. Robert, C. Cafforio and F. Rocca, "Time/space recursions for differential motion estimation", *Proc. of SPIE Image Coding*, Vol. 594, pp. 175-185, 1985.
16. S. F. Wu and J. Kittler, "A gradient-based method for general motion estimation and segmentation", *J. of Visual Comm. Image Rep.*, Vol. 4, No. 1, pp. 25-38, Mar. 1993.
17. M. Bierling and R. Thoma, "Motion compensating field interpolation using a hierarchically structured displacement estimator", *Signal Processing*,

Vol. 11, No. 4, pp. 387-404, Dec. 1986.

18. J.-L. Dugelay and H. Sanson, "Differential methods for the identification of 2D and 3D motion models in image sequences", *Signal Processing: Image Communication*, Vol. 7, No. 1, pp. 105-127, Mar. 1995.



이 상 희(Sang-hee Lee) 정회원

1993년 2월 : 한국과학기술원 전기  
및 전자공학과 졸업  
(공학사)

1995년 2월 : 한국과학기술원 전기  
및 전자공학과 졸업  
(공학석사)

1995년 3월 ~ 현재 : 한국과학기술원  
전기 및 전자공학  
과 박사과정 재학중

※주관심분야: video signal processing and coding,  
multimedia system architecture

e-mail : sanghee@viscom.kaist.ac.kr



유 국 열(Kook-yeol Yoo) 정회원

1991년 2월 : 경북대학교 전자공학  
과 졸업(공학사)

1995년 2월 : 한국과학기술원 전기  
및 전자공학과 졸업  
(공학석사)

1995년 3월 ~ 현재 : 한국과학기술원  
전기 및 전자공학  
과 박사과정 재학중

※주관심분야: video signal processing and coding, visual  
communication, network analysis

김 재 균(Jae-kyoon Kim)

통신학회 논문지 제23권 제3호 참조

현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 교수