

# 임의의 각도로 틀어진 서로 다른 두 도파관 사이의 임의의 형상 다중 공동으로 결합되는 방향성 결합기의 해석

정회원 박종국\*, 남상욱\*

## A General Rigorous Analysis of Arbitrary-shaped Multiaperture-coupled Directional Coupler Between Two Dissimilar Rectangular Waveguides Crossing with an Arbitrary Angle

Jongkuk Park\*, Sangwook Nam\* *Regular Members*

### 요 약

임의의 각도로 틀어진 서로 다른 두 도파관 사이에 임의의 형상을 가진 다중 공동으로 결합되는 방향성 결합기의 특성을 요한 요소 경계 적분법으로 해석하였다. 이러한 구조를 해석하는데 있어서 보통의 유한 요소법과의 계산 시간을 비교하여 제시된 방법이 매우 효율적임을 보였다. 또한 Moreno coupler에 대한 기존의 다른 논문들의 결과와 비교하여 잘 일치함을 보임으로써 본 논문에서 제시한 방법의 타당성을 입증하였다.

### ABSTRACT

The FE-BI (finite element- boundary integral) method is used for the characterization of an arbitrary-shaped multiaperture-coupled directional coupler between two rectangular waveguides crossing with an arbitrary angle. The method is shown to be much more effective than the ordinary FEM for the structures under consideration. The computation time is compared with that of the ordinary FEM. The results of other papers for Moreno coupler are compared with the theoretical prediction and a good agreement is obtained.

### I. 서 론

도파관을 이용한 방향성 결합기는 여러 가지 초고 주파 통신 장비나 계측 장비에 있어서 유용하게 사용

되는 요소이다. 오랫동안 이러한 도파관 방향성 결합기를 해석하기 위해서 여러 가지 해석방법들이 제시되었다. 많은 방법들 중에서 도파관 벽의 두께를 고려할 수 있고 엄밀하고 정확한 해를 주는 모멘트 방법(Method of Moments)이 많이 사용되어 왔다[1][2]. 그러나 두 도파관을 결합(coupling)시키는 공동(aperture)이 사각형이나 원 모양의 정규화된 모양이 아니고 복

\* 서울대학교 전기공학부  
論文番號 : 98046-0203  
接受日字 : 1998年 2月 3日

잡한 구조이면 모멘트 방법을 거의 적용할 수 없다. 따라서 이러한 방향성 결합기를 해석하기 위하여 유한 요소법과 모멘트법을 혼합하여 사용하는 방법이 제시되었다[3]. 하지만 임의의 형상을 다룰 수 있는 유한 요소법등과 비교하여 그 효율성이 얼마나 되는지는 밝히지 않았으며 결합기의 두 도파관이 임의로 틀어져 있거나 여러 개의 공동으로 결합되는 일반적인 구조에 대해서는 해석하지 않았다. 따라서 본 논문에서는 유한 요소법과 모멘트법을 혼합, 사용하는 유한 요소 경계 적분법[4]을 이용하여 보통의 유한 요소법보다 효율적임을 보였고 Moreno coupler와 같이 일반적인 구조를 해석하였다.

두 도파관을 결합시키는 공동은 임의의 단면을 가진 기둥 모양이므로 이 부분은 삼각 기둥 요소[5][6]를 사용하여 유한 요소법을 적용하고, 공동과 도파관의 결합면에서는 경계적분법을 적용하여 모멘트법으로 해를 구하였다. 이렇게 모멘트법을 사용하기 위해서는 삼각형 영역에 대한 도파관 그린 함수의 적분이 필요하다. 도파관 그린 함수는 삼각 함수들의 합으로 되어 있는 스펙트럴 영역 무한 급수 형태로 되어 있거나 자유 공간 영상들의 합으로 되어 있는 공간 영역 무한 급수 형태로 되어 있는데 이 두 형태의 급수 모두 수렴이 매우 느리다. 따라서 삼각형 영역에서 도파관 그린 함수를 수치 적분하려면 도파관 그린 함수를 빠르게 계산하는 방법을 사용하여야 한다. 도파관 그린 함수를 빠르게 하는 방법에는 Kummer 변환과 Poisson 급수 공식을 적용하는 방법[7], Ewald 급수 공식을 이용하는 방법[8] 등이 있는데 본 논문에서는 전자의 방법을 사용하였다. 또한 모멘트법을 적용하는데 있어서 적분에서의 특이점을 제거하는 것이 매우 중요한데 본 논문에서는 삼각형 영역에서의 이중 표면적분을 해석적으로 수행하여 적분의 특이점을 제거하였다[9].

경계 적분법의 성질 때문에 전체 시스템 행렬이 그리 성긴 행렬(sparse matrix)이 되지는 않지만 행렬의 조밀한 부분이 비교적 작기 때문에 행렬의 조건수(condition number)가 작으므로 conjugate gradient 방법을 사용하여 빠르게 행렬 방정식을 풀어낼 수 있었다.

위에서 언급한 것처럼 제안된 방법의 유효성을 검증하기 위해 간단한 구조를 해석하여 일반적인 유한 요소법과 비교하고 또 다른 논문에 나와 있는 Moreno 결합기에 대한 결과와 비교하였다.

## II. 이 론

그림 1은 본 논문에서 해석하고자 하는 도파관 결합기의 일반적인 구조이다. 일반적으로 유한 요소법을 적용하는데는 일반화된 변분법(generalized variational method)과 가중 잔차법(weighted residual method)을 사용하는데 본 논문에서는 범함수의 유도 없이 쉽게 시스템 행렬을 구할 수 있는 가중 잔차법을 사용하였다. 맥스웰 방정식과 가중 잔차가 없어져야 한다는 조건으로부터 지배방정식은 다음과 같다.

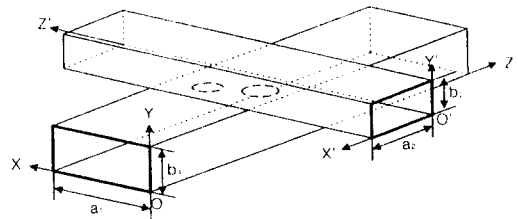


그림 1. Structure of the waveguide coupler with arbitrary-shaped multiaperture

$$\int_V (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) - k_0^2 \vec{W} \cdot \vec{E} dv + \oint_S \vec{W} \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}) = 0 \quad (1)$$

이 식에서 나타내는 부피  $V$ 는 도파관과 도파관을 결합하는 결합 공동 전체의 부피를 나타내며  $S$ 는 결합 공동의 표면 전체를 나타낸다. 그림 2는 해석을 위해 전체 구조를 세 부분으로 나눈 것을 나타낸다. 등가 원리로부터 영역 1의 전자장은 입사파와 영역 1과 영역 3의 경계면  $S_1$ 에서의 등가 자기 전류  $\vec{E} \times \hat{n}_1$

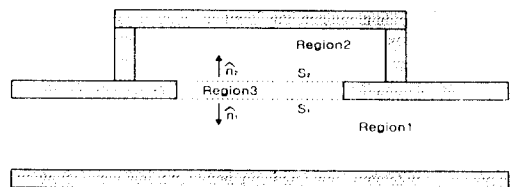


그림 2. Division of the region

에 의한 산란파로 나타낼 수 있고, 영역 2의 전자장은 영역 2와 영역 3의 경계면  $S_2$ 에서의 등가 자기 전류

$\vec{E} \times \hat{n}_2$ 에 의한 산란파로 나타낼 수 있다. 즉

$$\vec{E} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{scat} (\vec{E} \times \hat{n}_1) \quad (\text{영역1}) \quad (2)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{scat} (\vec{E} \times \hat{n}_2) \quad (\text{영역2}) \quad (3)$$

식(1)의 표면 적분은  $S_1$ 과  $S_2$ 의 적분으로만 구성된다. 식(2)와 식(3)의 양변에 curl을 취하면  $S_1$ 과  $S_2$ 의 표면 적분은 각각 다음과 같다.

$$\int_{S_1} (\hat{n}_1 \times (\nabla \times \vec{E})) \cdot \vec{W} dS = -jk_0 Z_0 \int_{S_1} (\hat{n}_1 \times \vec{H}_{inc}) \cdot \vec{W} dS - jk_0 Z_0 \int_{S_1} (\hat{n}_1 \times \vec{H}_{scat}) \cdot \vec{W} dS \quad (4)$$

$$\int_{S_2} (\hat{n}_2 \times (\nabla \times \vec{E})) \cdot \vec{W} dS = -jk_0 Z_0 \int_{S_2} (\hat{n}_2 \times \vec{H}_{scat}) \cdot \vec{W} dS \quad (5)$$

식(4), (5)를 식(1)에 대입하고 벡터정리를 이용하여 간단히 한 다음, 산란파  $\vec{H}_{scat}$ 를 전기 벡터 전위(electric vector potential)로 나타내고, 벡터 전위에 대한 그린 함수의 표현식을 대입하여 간단히 하면 다음과 같은 식이 된다.

$$FV + FS_{1a} + FS_{1b} + FS_{2a} + FS_{2b} = FS_{inc} \quad (6)$$

$$FV = \int_V (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) - k_0^2 \vec{W} \cdot \vec{E} dv \quad (7)$$

$$FS_{1a} = -k_0^2 \int_{S_1} (\vec{W} \times \hat{n}_1) \cdot \int_{S_1} (\vec{E} \times \hat{n}_1) \cdot \vec{G}_{F1} dS dS \quad (8)$$

$$FS_{1b} = - \int_{S_1} (\vec{W} \times \hat{n}_1) \cdot \nabla (\nabla \cdot \int_{S_1} (\vec{E} \times \hat{n}_1) \cdot \vec{G}_{F1} dS dS) \quad (9)$$

$$FS_{2a} = -k_0^2 \int_{S_2} (\vec{W} \times \hat{n}_2) \cdot \int_{S_2} (\vec{E} \times \hat{n}_2) \cdot \vec{G}_{F2} dS dS \quad (10)$$

$$FS_{2b} = - \int_{S_2} (\vec{W} \times \hat{n}_2) \cdot \nabla (\nabla \cdot \int_{S_2} (\vec{E} \times \hat{n}_2) \cdot \vec{G}_{F2} dS dS) \quad (11)$$

$$FS_{inc} = jk_0 Z_0 \int_{S_1} (\vec{W} \times \hat{n}_1) \cdot \vec{H}_{inc} dS \quad (12)$$

여기서  $V$ 는 공동 전체의 부피이며  $S_1, S_2$ 는 각 도파관과 공동의 경계면을 나타낸다. 또한  $\vec{G}_{F1}$ 과  $\vec{G}_{F2}$

은 각각 영역1과 영역2의 전위 다이아덕 그린 함수로 그 표현식은 다음과 같다.

$$G_{Fx} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{2aby_{mn}} e^{-\gamma_{mn}|z-z'|} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y'}{b} \quad (13)$$

$$G_{Fy} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{2aby_{mn}} e^{-\gamma_{mn}|z-z'|} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y'}{b} \quad (14)$$

$$G_{Fz} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{2aby_{mn}} e^{-\gamma_{mn}|z-z'|} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y'}{b} \quad (15)$$

$$\gamma_{mn} = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}, & \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \geq k^2 \\ j\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, & \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 < k^2 \end{cases} \quad (16)$$

서론에서 언급한 것처럼 공동은 그 단면이 임의의 모양을 가진 기둥 모양이므로 유한 요소법에서 일반적으로 사용되는 삼각셀보다 삼각 기둥으로 잘 근사할 수 있어서 유한 요소법의 질차에 따라 공동을 삼각기둥 모양으로 잘게 나눈 다음 Galerkin방법을 적용하였다. 이 때 삼각 기둥 변요소에 대한 벡터 기저 함수는 다음과 같다[5][6].

$$\begin{aligned} \vec{N}_i &= \vec{S}_i \frac{1}{l_z} (z_c + \frac{l_z}{2} - z) & (i=1,2,3) \\ \vec{N}_i &= \vec{S}_{i-3} \frac{1}{l_z} (z + \frac{l_z}{2} - z_c) & (i=4,5,6) \\ \vec{N}_i &= L_{i-6} \hat{z} & (i=7,8,9) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $\vec{S}_i$ 는  $i$ 번째 변에 대한 보통의 삼각형 벡터 기저 함수이며  $L_i$ 는  $i$ 번째 절점에 대한 보통의 삼각형 절점 기저 함수이다[4].

한편, 해석하고자 하는 구조의 벽의 두께가 비교적 얇다면 벽의 두께 방향으로의 전자장의 변화가 심하지 않으므로 많이 나눌 필요가 없어지며 따라서 결과적인 시스템 행렬은 조밀한 행렬이 되지만 그 크기가 작으므로 시스템 행렬을 푸는데 걸리는 시간은 그리 오래

걸리지 않는다. 또 해석하고자 하는 구조의 벽의 두께가 두꺼워서 두께 방향으로 잘게 나누어야 하고 그에 따라 시스템 행렬이 커진다 하더라도 이 행렬은 점점 성긴 행렬이 되므로 성긴 행렬에 대한 반복 계산법(iterative method)을 사용하여 계산 시간을 줄일 수 있다. 그러므로 어느 경우이나 제안된 방법을 수행하는데 있어서 지배적인 요소는 시스템 행렬을 계산하는 시간이 아니라 식(8), (9), (10), (11)을 계산하는 시간이 된다. 본 논문에서는 식(8), (9), (10), (11)의 표면 적분을 효율적으로 수행하기 위해서 Kummer 변환과 Poisson 급수 공식을 사용하여 그런 함수를 빠르게 계산하였는데 이 내용은 참고문헌[7]에 자세히 나와 있으므로 생략하였다. 또한 식(8), (9), (10), (11)을 엄밀하게 수행하기 위해서는 동일한 삼각형 영역에서의 적분을 수행할 때 생기는 특이점을 제거해야 한다[6][9]. 그런데 해석하고자 하는 구조는 관측점(observation point)과 전원점(source point)이 모두 도파관의 벽면에 존재하므로 전원점이 관측점과 일치할 때 그 전원점 뿐만 아니라 그 전원점의 벽면에 의해 생기는 일차 영상(first order image)도 제거해 주어야 한다. 본 논문에서는 전원점과 일차 영상에 의해 생기는 특이 적분을 모두 제거하여 식의 계산에 엄밀함을 기하였다.

### III. 수치 해석 결과

제안된 방법의 효율성을 입증하기 위해서 그림 3에 보는 것과 같은 간단한 도파관 결합기를 해석하였다.

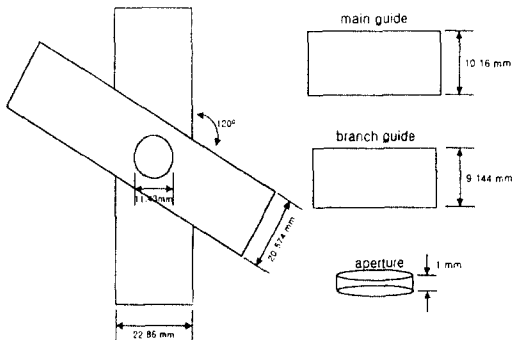


그림 3. Structure of the simple waveguide coupler with circular aperture

해석한 도파관 결합기는 WR-90 표준 도파관과 가로, 세로 길이가 WR-90 표준 도파관의 0.9배 되는 도파관으로 이루어져 있고 60° 틀어져 있는 구조이다. 그림 4(a)에서 보통의 유한 요소법을 이용한 결합도와 격리도의 결과와 비교하였으며 두 결과는 0.5dB 내의 차이로 일치함을 알 수 있었다. 그림 4(b)에서 y 축은 주어진 정확도에 대해 보통의 유한 요소법과 비교한 계산 시간의 비를 나타낸다. 그림 4(b)에서 보는 바와 같이 정확도가 높아짐에 따라 계산 시간의 비가 줄어드는 경향을 보이며, 따라서 보통의 유한 요소법을 적용한 것보다 더욱 효율적임을 알 수 있다. 사용한

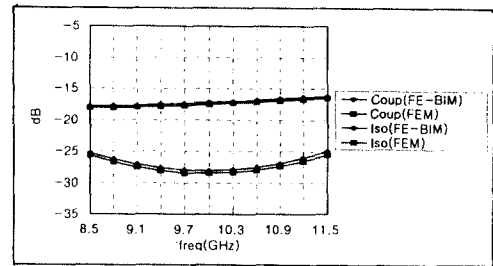


그림 4(a). Comparison of the result of FEM

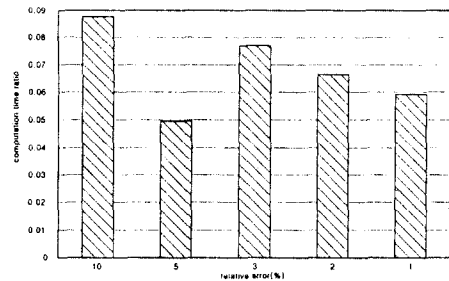


그림 4(b). Comparison of the computation time with FEM ( $t_{FE-BIM}/t_{FEM}$ )

미시수의 개수는 1%정확도에서 1587개이다. 또한 참고문헌[10]에 나와 있는 그림 5의 구조로 되어 있는 Ku 밴드 Moreno 결합기에 대해, 그림 6에서 서로 다른 도파관 벽의 두께에 대한 결합 계수를 비교하여, 문헌의 결과와 도파관 벽의 두께에 관계없이 잘 일치함을 보임으로써 제시된 방법의 타당성을 입증하였다. 그리

고 결합 계수들 사이에  $|Γ|^2 + |T|^2 + |C_1|^2 + |C|^2 = 1$  이라는 전력 보존(power conservation)의 관계식이 성립하여야 하는데 위의 모든 결과에 대하여  $10^{-5}$  이하의 오차를 가지는 정확도를 보임을 확인하였다.

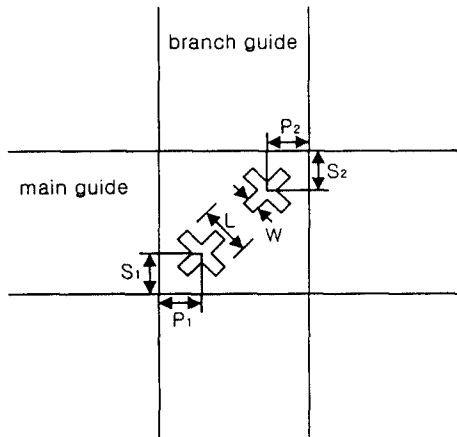


그림 5. Dimensions of Moreno coupler ( $P_1 = S_1 = P_2 = S_2 = 4.46\text{mm}$ ,  $L = 6.25\text{mm}$ ,  $W = 1.563\text{mm}$ )

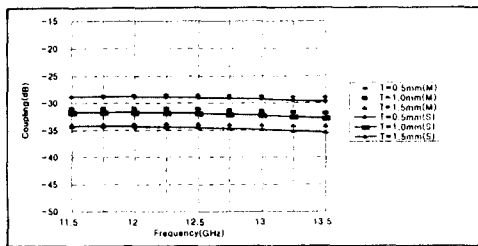


그림 6. Comparison with the other data

#### IV. 결 론

임의의 각도로 틀어진 서로 다른 두 도파관 사이에 임의의 형상을 가진 다중 공동으로 결합되는 방향성 결합기의 특성을 요한 요소 경계 적분법으로 엄밀하고 효율적으로 해석하였다. 유한 요소 경계 적분법의 특성을 이용하여 해석하고자 하는 영역을 전부 분

할하지 않고 결합 공동만을 분할하여 효율성을 높였으며 도파관 그린 함수의 적분에 걸리는 시간을 줄이기 위해 Kummer 변환과 Poisson 합 공식을 이용하였고 삼각형의 적분 영역에서 생기는 특이점을 적절히 제거하여 제시된 방법의 엄밀성을 높였다.

#### 참 고 문 헌

1. A. Datta, A. M. Rajeev, A. Chakrabarty, and B. N. Das, "S matrix of a broad wall coupler between dissimilar rectangular waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 43, no. 1, pp. 56-62, 1995.
2. A. J. Sangster and H. Wang, "A Generalized analysis for a class of rectangular waveguide coupler employing narrow wall slots," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* vol. 44, no. 2, pp. 283-290, 1996.
3. A. J. Sangster and H. Wang, "Hybrid analytical technique for waveguide coupling by means of aperture or slot," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 6, pp. 829-831, 1993.
4. J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. New York: Wiley: 1993.
5. Jongkuk Park and Sangwook Nam, "Analysis of arbitrary shaped crosssectional discontinuity in rectangular waveguides using FEM-BIM with triangular prism elements," *IEEE AP-S International Symposium Digest*, pp.672-675, 1997.
6. 박 중국, 남 상욱, "유한 요소 경계 적분법을 이용한 구형 도파관 내 임의의 형상 iris 해석 및 도파관 여파기 설계에의 응용", 한국통신학회 논문지, vol. 22, No. 6, pp. 1244-1250, June, 1997.
7. B. C. Ahn, "Moment method analysis of a narrow wall inclined slot on a rectangular waveguide," Ph.D. dissertation, Univ. Mississippi, Oxford 1992.
8. Myun-Joo Park and Sangwook Nam, "Efficient calculation of the green's function in rectangular waveguides," *IEEE AP-S International Symposium Digest*, pp.2354-2357, 1997.
9. Paolo Arcioni, Marco Bressan, and Luca Perregrini, "On the evaluation of the double space inte-

grals arising in the application of the boundary integral method to 3-D problems," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* vol. 45, no. 3, pp. 436-439, 1997.

10. 유 경완, 이 재현, 박 광량, 김 재명, "Ku-Band 십자형 방향성 결합기 설계 및 제작", 한국통신학회 추계 종합 학술발표회 논문집, vol. 12, No. 2, pp. 299-303, 1993.



박 종 국(Jongkuk Park) 학생회원

1971년 8월 31일생

1995년 2월: 서울대학교 전자공학과 학사

1997년 2월: 서울대학교 대학원 전자공학과 석사

1997년 3월~현재: 서울대학교 대학원 전기공학부 박사과정 재학중

※주관심분야: 전자파 수치해석, 마이크로파 및 밀리미터파 수동회로 해석

남 상 욱(Sangwook Nam)

정회원

1959년 2월 2일생

1981년 2월: 서울대학교 전자공학과 학사

1983년 2월: 한국과학기술원 전기전자공학과 석사

1983년 2월~1986년 8월: 금성사 중앙연구소 주임연구원

1989년 5월: 미국 Texas 주립대학교 전기공학과 박사

1989년 6월~1989년 9월: 미국 Texas 주립대학교 Post Doc. 연구원

1989년 9월~1990년 1월: 금성정밀 연구소 선임 연구원

1990년~현재: 서울대학교 전기공학부 교수

※주관심분야: 전자파 수치해석, 초고주파 측정, 안테나 및 초고주파 회로 설계