

자기상관유사행렬을 이용한 과도기적 신호의 분석

정회원 최 규 성*, 김 영 수**

Analysis of Transient Signal Using Autocorrelation-like Matrix

Gyu-Sung Choi*, Young-Soo Kim** *Regular Members*

요 약

본 논문에서는 잡음환경하에서의 과도기형태 신호의 매개변수를 효율적으로 추정하기 위한 새로운 방법을 제안한다. 이 방법은 선형예측모델을 토대로 하여 확장된 차수를 갖는 자기상관유사행렬의 truncated singular value decomposition을 이용한다.

제안된 자기상관유사행렬의 우수성을 보여주기 위하여 감쇄계수가 같은 경우와 감쇄계수가 다른 경우에 대하여 각각 일반적인 데이터 행렬방법과 통계적 성능을 비교분석하였다. 시뮬레이션 결과 데이터 행렬 방법보다 자기상관유사행렬 방법의 통계적 성능이 보다 우수함을 알 수 있었다. 이러한 결과는 부가된 백색잡음의 자기상관지연값이 클 경우에 잡음의 영향이 어느정도 줄어든다는 성질로 부터 기인한다.

ABSTRACT

In this paper, we present a new method for estimating the parameters of transient-type signal in additive white Gaussian noise. This method makes use of the truncated singular value decomposition of an extended-order autocorrelation-like matrix based on the linear-prediction model. The method is tested on data consisting of two exponentially damped sinusoidal signals with the same damping factor and different damping factor.

Simulation results are illustrated to demonstrate the better performance of the method applied to the autocorrelation-like matrix than that applied to the data matrix.

I. 서 론

모델링은 시간 데이터를 분석하기 위한 가장 중요한 응용 예이다. 만족스러운 모델링은 가장한 모델이 분석할 데이터에 얼마나 잘 부합되는지에 달려 있다.

지금까지 많은 모델링 방법이 제안되어져 왔는데 모델링을 이용한 전통적인 스펙트럼 추정 방법은 데이터열, 또는 데이터열에 대한 상관함수의 FFT 방법에 바탕을 두고 있다. 이 방법에서 데이터 신호는 정현파의 합으로 잘 모델링되어 있다고 가정한다. 보다 새로운 현대적인 방법의 개발에도 불구하고, 전통적인 방법은 데이터열이 길고 통계적으로 안정적일 때 종종 적용된다. 이런 방법들은 분석될 데이터열에 대하여 어떠한 가정도 사용하지 않고 직접 적용된다.

* LG 전자 미디어통신 연구소 연구원

** 경희대학교 전파공학과

論文番號 : 97380-1018

接受日字 : 1997年 10月 18日

FFT 방법을 감쇄가 심한 정현파에 적용하면 이용 가능한 데이터 개수에 비례하는 FFT 방법의 낮은 분해능과 데이터 윈도우에 의한 스펙트럼 퍼짐현상등이 일어난다[3]. Periodogram의 의미는 실제 스펙트럼에 관찰한 데이터에 적용될 윈도우함수의 푸리에변환이 컨벌루션 된 것이다. 만약에 윈도우함수가 상대적으로 협소하다면, 이용가능한 데이터가 짧기 때문에, 윈도우함수의 푸리에 변환된 스펙트럼은 넓게 퍼지게 된다. 이런 스펙트럼의 특성으로 가깝게 인접한 스펙트럼을 분리하기가 어렵거나 불가능하게 된다.

이러한 단점은 랜덤과정에 대한 매개변수 모델을 사용함으로써 극복할 수 있다. 유리함수 모델은 지수함수 모델링에 사용된다. 극점과 영점을 갖는 선형 시스템의 임펄스 응답은 지수함수적으로 감쇄하는 정현파로 구성되어진다. 따라서 분석할 시간데이터를 모델링 하는데 있어 유리함수 모델을 사용할 수 있다. 특히, 복소수 값을 갖는 측정된 데이터 $x(n)$ 은 다음 식과 같은 모델링으로 표현된다.

$$x(n) = \hat{x}(n) + e(n) \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$\hat{x}(n)$ 은 추정된 지수함수 신호로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^p a_k (z_k)^n \quad (2)$$

여기서 $z_k = \exp(\gamma_k + jw_k)$ for $k = 1, 2, \dots, p$ 이고, a_k 은 복소 진폭값, γ_k 는 감쇄계수, w_k 은 라디안값으로 표현되는 극점의 주파수이다.

모델링 오차 $e(n)$ 은 실제 측정된 데이터 $x(n)$ 과 p 개의 지수함수로 구성된 추정모델이 일치하지 않기에문에 발생하는 것이다. 신호모델의 주요한 변수인 $\{a_k, \gamma_k, w_k\}$ 와 신호모델을 구성하는 차수 p 를 알아내기 위한 직접적인 방법으로는 모델 오차 E 를 최소화시키는 것이다.

$$E = \sum_{n=1}^N |x(n) - \hat{x}(n)|^2 \quad (3)$$

위 문제에 대한 해는 비선형 최적화 방법을 사용하여 매개변수를 결정할 수 있으며, 위의 해를 풀기 위한

여러 방법들이 제안되어왔다[3]. 이들 각 방법들은 일반적으로 순방향 또는 역방향 선형예측 방정식을 사용한다.

또 다른 방법은 지수함수적으로 감쇄하는 정현파 신호의 가깝게 인접한 주파수를 정확히 추정할 수 있는 선형예측 방정식에 바탕을 둔 Singular Value Decomposition(SVD)을 이용하는 방법이다[1, 2]. 기존의 방법들에 비해 Truncated SVD는 신호의 신호대 잡음비를 향상시킴으로써 선형시스템의 방정식에 대한 변수를 구하는데 보다 강력한 기능을 가지고 있으며[6, 7], 더 나아가 데이터 신호의 실제 차수를 추정하는데 사용되기도 한다. 일반적으로 잡음의 레벨이 상대적으로 높거나 시간 데이터의 주파수가 가깝게 인접해 있는 경우 truncated SVD가 우수한 성능을 나타낸다는 것은 잘 알려져 있다. 그러나 데이터행렬을 이용하여 지수함수의 스펙트럼을 추정할 경우에는 성능이 저하되기도 한다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 본 논문에서는 자기상관유사행렬을 이용하여 모델 매개변수를 추정하는 방법을 제안하였다.

제 2 장에서는 지수함수 데이터의 모델링에 대하여 살펴보았고, 제 3 장에서는 제안된 자기상관유사행렬에 대한 이론적인 유도과 특성을 분석하였다. 제 4 장에서는 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 통계적 성능을 데이터 행렬을 이용한 경우와 비교분석하였다.

II. 지수함수 데이터의 모델링

식 (1)의 지수함수 모델은 분석할 과도기 형태의 데이터를 추정하기 위해 사용된다. 잡음이 부가된 시간 데이터에 대한 모델의 변수를 알아내기 위해 제안한 방법을 설명하기 전에 먼저 지수함수와 관련된 대수학적인 성질을 알아본다.

2.1 확장된 차수를 갖는 모델

지수함수적으로 감쇄하는 p 개의 정현파로 구성된 실제 지수함수 데이터를 생각해 보자. 다음의 이론은 위에서와 같이 모델링한 지수함수 신호를 특성화하기 위한 대수학적인 의미를 부여한다. 지수함수 데이터 $x(n)$ 과 차수 q 의 선형필터 전달함수 $A_q(z)$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다[1, 6].

$$x(n) = \sum_{k=1}^p a_k e^{s_k n} u(n) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 A_q(z) &= A_p(z)B_{q-p}(z) \\
 &= \prod_{k=1}^q (1 - e^{s_k} z^{-1}) [1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{q-p} z^{-(q-p)}] \\
 &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_q z^{-q} \quad (q > p)
 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $s_k = \gamma_k + j\omega_k$ 이고 $u(n)$ 단위계단 신호이다. $A_q(z)$ 를 인수분해하면, $A_p(z)$ 은 $x(n)$ 을 구성하는 p 개 요소와 일치하는 p 개의 고정된 영점값을 갖는 p 차의 다항식을 나타내며 $B_{q-p}(z)$ 는 임의의 $(q-p)$ 차의 다항식이다. 지수함수 신호에 대한 식 (5)와 같은 선형 FIR 필터의 응답은 다음과 같이 $n > q$ 에 대해 모든 $B_{q-p}(z)$ 다항식은 0이 된다.

$$x(n) + \sum_{k=1}^q a_k x(n-k) = 0 \quad \text{for } n > q \tag{6}$$

식 (6)으로부터 주어진 지수함수 신호는 q 개의 과거값의 선형결합으로 예측할 수 있다. 따라서 $A_q(z)$ 은 예측오차필터로 나타낼 수 있다. 이런 선형예측 표현은 앞으로 전개될 방법에서 a_k 변수를 알아내는 데 사용된다.

p 개의 신호로 구성된 지수함수의 차수를 미리 알 수 없기에 확장차수 q 로 추정하면 p 개 신호의 영점과 $q-p$ 개의 신호와 관련 없는 영점을 가지고 있다. 실제적으로 q 값은 분석하고자 하는 신호의 추정되는 미지의 차수 p 보다 훨씬 크게 선택되어야 한다. 이렇게 차수를 높게 정한 모델을 사용함으로써 부가되는 잡음에 덜 민감해지고, 따라서 영점의 위치 추정을 정확히 할 수 있다. a_k 변수를 전개하기 위해서 식 (6)으로부터 모델 방정식을 전개시키면 다음과 같은 행렬구조로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} x(q+1) & x(q) & \dots & x(1) \\ x(q+2) & x(q+1) & \dots & x(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(q+t) & x(q+t-1) & \dots & x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

윗식을 간단히 표현하면 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_q a_q = 0 \tag{7}$$

윗 식에서 X_q 는 $t \times (q+1)$ Toeplitz 구조로 된 데이터 행렬이고, a_q 는 $(q+1) \times 1$ 의 첫 번째 요소가 1인 순방향 예측계수 벡터이고, 0 는 $t \times 1$ 영벡터이다.

본 논문에서 다룬 과도기적인 형태의 신호는 부가적인 복소백색잡음에서의 p 개의 지수함수적으로 감쇄하는 정현파로 구성되어 있다고 가정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=1}^p a_k e^{s_k n} + w(n) \\
 &= x(n) + w(n)
 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $s_k = \gamma_k + j\omega_k$, a_k 는 복소 진폭, γ_k 는 감쇄 계수, 그리고 ω_k 들은 라디안 값인 극점 주파수들이다. 그리고 $w(n)$ 는 부가적인 백색 가우시안 잡음 데이터이다. 선형예측필터 $A_q(z)$ 의 차수 p 보다 더 큰 차수를 선택하여, 식 (7)에 잡음이 부가된 분석할 데이터를 넣으므로 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$Y_q a_q = [X_q + W_q] a_q = \epsilon \tag{9}$$

여기서,

$$Y_q = \begin{bmatrix} y(q+1) & y(q) & \dots & y(1) \\ y(q+2) & y(q+1) & \dots & y(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(q+t) & y(q+t-1) & \dots & y(t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

식 (9)에서 X_q 는 식 (7)에서 잡음이 없는 경우의 $t \times (q+1)$ 데이터 행렬과 유사하다. W_q 는 잡음 데이터 $w(n)$ 으로 구성된 $t \times (q+1)$ 잡음 행렬이다. ϵ 는 $t \times 1$ 오차벡터이다. 일반적으로 오차 벡터 ϵ 가 0 에 가깝게 되는 그때의 계수 벡터 a_q 를 구하는 것이 목적이다. 계수벡터 a_q 를 알아내는데 고전적인 방법으로는 최소제곱 방법이 있으며, 적당한 계수 a_k 에 의한 예측 오차를 제공하여 더함으로써 다음과 같이 일화시켜 표현할 수 있다.

$$E = \sum_{n=q+1}^N \epsilon_n \epsilon_n^*$$

선형예측방법은 예측계수를 알아내는데 분석적인 면에서 쉬운 방법이다. 때문에 예측오차기준 E 는 계수 a_k 의 2차 방정식이다. 잡음이 없는 확장된 차수를 가진 데이터 행렬의 좋지 않은 불안정성 때문에 이런 방법은 좋은 성능을 나타내지 못한다.

III. 자기상관유사행렬 방법

3.1 제안된 자기상관유사행렬 방법

계수 벡터 \mathbf{a}_q 를 구하기 위한 식 (4)와 같은 표현식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^q a_i \sum_{k=i}^{N-q-i} x(k+q+t-i)x^*(k) = 0 \quad \text{for } t > 0 \quad (11)$$

여기서 $a_0 = 1$ 이다.

식 (11)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같은 모델 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{R}_{xq} \mathbf{a}_q = 0 \quad (12)$$

여기서 $t \times (q+1)$ 자기상관유사행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_{xq} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} x(k+q+1)x^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} x(k+q)x^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} x(k+1)x^*(k) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} x(k+q+2)x^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} x(k+q+1)x^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} x(k+2)x^*(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} x(k+q+t)x^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} x(k+q+t-1)x^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} x(k+t)x^*(k) \end{bmatrix} \quad (13)$$

행렬 \mathbf{R}_{xq} 에서 모든 요소는 시간 데이터 $x(n)$ 의 자기상관 추정값과 유사하며, 이 행렬의 각 행의 요소들은 같은 지연값을 가진 합으로 구성된 것을 알 수 있다. \mathbf{R}_{xq} 는 \mathbf{X}_q 와 같은 행렬차수를 가지므로 \mathbf{R}_{xq} 에 대한 SVD 표현은 p 개의 positive singular 값과 $(q+1-p)$ 개의 0 singular 값을 갖는다. 식 (10)의 데이터 행렬 Y_q 에 적용된 Truncated SVD 알고리즘을 바탕으로 한 방법은 잡음의 크기가 상대적으로 크거나, 두 주파수 성분이 가깝게 인접해 있는 지수함수 신호의 경우에는 그 성능이 저하된다. 이러한 단

점을 극복하기 위하여 본 논문에서는 데이터 행렬 Y_q 비해 상대적으로 잡음의 효과를 최소화시켜 성능을 향상시킬 수 있는 자기상관유사행렬을 사용한다. 식 (7)에 잡음 데이터를 부가시킴으로써 다음과 같은 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R}_{yq} \mathbf{a}_q = [\mathbf{R}_{xq} + \mathbf{R}_{uq}] \mathbf{a}_q = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (14)$$

여기서 \mathbf{R}_{yq} 와 \mathbf{R}_{uq} 는 식 (15)와 같이 표현된다.

$$\mathbf{R}_{yq} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} y(k+q+1)y^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} y(k+q)y^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} y(k+1)y^*(k) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} y(k+q+2)y^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} y(k+q+1)y^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} y(k+2)y^*(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} y(k+q+t)y^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} y(k+q+t-1)y^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} y(k+t)y^*(k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_{uq} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} u(k+q+1)u^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} u(k+q)u^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-1} u(k+1)u^*(k) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} u(k+q+2)u^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} u(k+q+1)u^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-2} u(k+2)u^*(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} u(k+q+t)u^*(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} u(k+q+t-1)u^*(k) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-q-t} u(k+t)u^*(k) \end{bmatrix}$$

식 (14)에서 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 오차 벡터이고, \mathbf{R}_{xq} 은 식 (13)에서 주어진 이상적인 행렬이고, \mathbf{R}_{uq} 는 잡음의 자기상관유사행렬이다. 직관적으로 모든 데이터의 길이 N 이 무한대로 감에 따라 잡음 행렬 \mathbf{R}_{uq} 는 자기상관 추정값이 된다. 즉 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{R}_{uq} \approx \begin{bmatrix} r_u(q+1) & r_u(q) & \dots & r_u(1) \\ r_u(q+2) & r_u(q+1) & \dots & r_u(2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_u(q+t) & r_u(q+t-1) & \dots & r_u(t) \end{bmatrix} \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

잡음 $w(n)$ 은 백색잡음이라 가정하고, $r_u(0)$ 는 \mathbf{R}_{uq} 에서 제외된다. 잡음 행렬 \mathbf{R}_{uq} 의 모든 값은 이론적으로 0이 되어야 한다. 따라서 잡음이 없는 이상적인 경우로 생각할 수 있다. 즉, 데이터 개수가 충분히 많을수록 $\mathbf{R}_{yq} \approx \mathbf{R}_{xq}$ 의 관계식이 성립하게 되는데, 이는 자기상관유사행렬 방법의 기본 개념이 된다. 그러나 실제로 잡음의 상관행렬은 유한 데이터로 인해 영벡터가 아니다.

3.2 SVD 알고리즘

식 (7)에서 확장된 차수를 갖는 데이터 행렬 X_q 에 대한 SVD 표현식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_q = \sum_{k=1}^{q+1} \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \quad (16)$$

여기서 *는 복소공액전치를 뜻한다. $q < t$ 라고 가정한다.

식 (16)의 SVD 표현에서 음수가 아닌 singular values σ_k 는 차수에 따라 점진적으로 감소하는 형태를 갖는다($\sigma_k \geq \sigma_{k+1}$). 반면에 $t \times 1$ left singular 벡터 $\{\mathbf{u}_k\}$ 과 $(q+1) \times 1$ right singular 벡터 $\{\mathbf{v}_k\}$ 는 각각 직교 집합을 구성한다. 확장된 차수를 갖는 데이터 행렬 X_q 의 차수는 p 이기 때문에 이론적으로 실제 p 개의 0이 아닌 singular values ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$)와 $(q+1-p)$ 개의 0의 singular values가 존재한다(즉, $p+1 \leq k \leq q+1$ 인 경우에 대해 $\sigma_k = 0$ 이다.). 즉, 이 영공간 N 의 basis는 식(17)과 같이 표현될 수 있다.

$$N = \{ \mathbf{v}_{p+1}, \mathbf{v}_{p+2}, \dots, \mathbf{v}_{q+1} \} \quad (17)$$

식 (7)을 만족하는 계수벡터 \mathbf{a}_q 는 영공간 N 의 원소로서 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{a}_q = \left(\sum_{k=p+1}^{q+1} \alpha_k \mathbf{v}_k(1) \right)^{-1} \sum_{k=p+1}^{q+1} \alpha_k \mathbf{v}_k \quad (18)$$

여기서 α_k 는 임의의 스칼라 값이고 $\mathbf{v}_k(1)$ 은 \mathbf{v}_k 의 첫 번째 요소이다. $q > p$ 일 때, 식 (18)을 만족하는 계수벡터는 무한개가 존재한다. 위의 경우는 잡음이 없는 경우에 대한 데이터 행렬 X_q 의 SVD 표현과 계수벡터 \mathbf{a}_q 를 구하는 방법에 대해 알아보았다. 그러나 잡음의 환경하에서 계수벡터 \mathbf{a}_q 를 구하기 위해서는 부가된 잡음의 영향을 고려해야 한다. 본 논문에서는 잡음의 영향을 줄이기 위하여 Truncated SVD를 사용하였다. 잡음이 부가된 식 (10)의 데이터 행렬 Y_q 의 SVD 표현식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_q = \sum_{k=1}^{q+1} \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \quad (19)$$

실제적으로 데이터 행렬 Y_q 의 각 열벡터는 잡음으로 인하여 선형 독립성을 갖는다. 즉, 잡음이 없는 경우에 0이 될 $q+1-p$ 개의 singular 값들이 작은 singular 값을 갖기 때문에 $Y_q \mathbf{a}_q = \mathbf{0}$ 를 만족하는 벡터 \mathbf{a}_q 는 존재하지 않을 것이다[4, 5]. 그러나 상대적으로 큰 p 개의 singular 값을 이용하여 계수벡터 \mathbf{a}_q 를 구할 수 있다. Truncated SVD를 취한 데이터 행렬 $Y_q^{(p)}$ 는 최소제곱면에서 Y_q 를 근사화하기 위해 사용될 수 있다. 더구나 순방향 예측계수벡터 \mathbf{a}_q 는 $p+1 \leq k \leq q+1$ 범위에서, $q+1-p$ 개의 right singular 벡터 \mathbf{v}_k 에 의해 확장되는 $Y_q^{(p)}$ 의 영공간에 놓인다. 다시 말해 모델의 계수벡터는 무한개의 해가 존재한다. 적당한 부가적인 잡음의 대해서, 가장 작은 Euclidean norm을 갖는 해가 선택된다. 이 유일한 해는 다음과 같다[1].

$$\mathbf{a}_q = \frac{\left[\mathbf{e}_1 - \sum_{k=1}^p v_k^*(1) \mathbf{v}_k \right]}{\left[1 - \sum_{k=1}^p |v_k(1)|^2 \right]} = \frac{\left[\sum_{k=p+1}^{q+1} v_k^*(1) \mathbf{v}_k \right]}{\left[\sum_{k=p+1}^{q+1} |v_k(1)|^2 \right]} \quad (20)$$

여기서 \mathbf{e}_1 는 첫 번째 요소가 1이고, 나머지 모두가 0인 표준 단위 벡터를 나타낸다. 여기서 구한 순방향 예측계수벡터 \mathbf{a}_q 의 해는 복소 지수함수의 주파수와 감쇄계수를 결정하기 위해서 사용된다.

$$A_q(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a^{-q} z^{-q} = \prod_{k=1}^q (1 - e^{s_k} z^{-1}) \quad (21)$$

식 (21)로부터 q 개의 지수함수를 얻게 된다. 이러한 q 개의 구성요소들로부터 p 개의 신호극점을 추출하고 q 개의 지수함수 신호 크기 값을 구하는데는 부가적인 연산이 요구된다.

IV. 시뮬레이션 및 고찰

자기상관유사행렬의 우수한 성능을 보여주기 위하

여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

입력신호 $x(n)$ 은 두 개의 과도기형태 신호와 부가성 백색 가우시안 잡음으로 구성되어 있다고 가정하였다.

$$x(n) = A_1 e^{s_1 n} + A_2 e^{s_2 n} + w(n)$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad (N=64) \quad (22)$$

여기서, 진폭 $A_1=1$, 진폭 $A_2=1$ 이고, 정규화된 주파수는 각각 $f_1=0.2$ 와 $f_2=0.22$ 를 사용하였다. $w(n)$ 은 백색 가우시안 복소 잡음을 나타낸다. 신호와 잡음은 wide-sense stationary 신호로서 에르고딕 과정

이고 상호 무상관 관계에 있다고 가정하였다. 시뮬레이션은 두가지 경우로 나누어 수행하였다. 첫 번째의 경우는 신호의 진폭과 감쇄계수가 같은 조건하에서 수행하였고($r_1=r_2=-0.01$), 두 번째의 경우는 한 신호의 감쇄계수가 상대적으로 큰 경우에 대하여 수행하였다($r_1=-0.01, r_2=-0.02$). 각각 다른 신호대 잡음비에 대해 입력신호의 64개 데이터 개수를 가지고 각각 100번의 독립시행을 수행하였으며 Truncated SVD를 사용할 때 행렬의 차수는 2로 가정하였다. 두 방법을 통계적 성능을 비교하기 위한 척도로서 두 번째 신호의 주파수를 기준으로 표본분산과 표본바이어스, 최소제곱오차를 구하여 비교하였다.

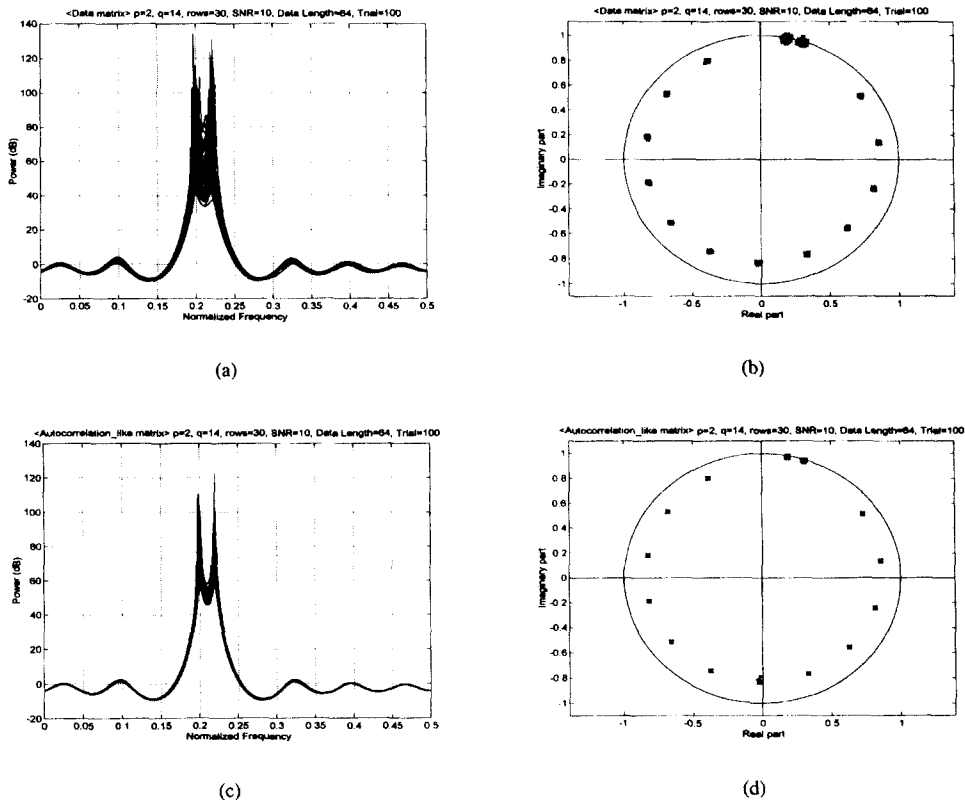


그림 1. 과도기 신호의 스펙트럼과 극점-영점 (감쇄계수가 같을 경우, $r_1=0.01, r_2=0.01, SNR=10$ dB)

- (a) 스펙트럼 (데이터 행렬)
- (b) Pole-zero 그림 (데이터 행렬)
- (c) 스펙트럼 (자기상관유사행렬)
- (d) Pole-zero 그림 (자기상관유사행렬)

Fig. 1 Spectrum and pole-zero plot of a transient-type signal (Damping factor 1=0.01, Damping factor 2=0.01, SNR=10 dB)

- (a) Spectrum of data matrix method
- (b) Pole-zero plot of data matrix method
- (c) Spectrum of Autocorrelation-like matrix method
- (d) Pole-zero plot of Autocorrelation-like matrix method

Case 1. 감쇄계수가 같은 경우.

진폭과 감쇄계수가 같은 경우에 대하여 데이터 행렬과 자기상관유사행렬을 사용한 방법의 시뮬레이션을 통하여 성능을 비교분석하였다. (그림 1)은 신호대 잡음비가 10 dB 환경하에서 시뮬레이션을 한 결과 그림이다. 그림에서 보듯이 (그림 1-(a), (b))가 데이터 행렬을 사용한 결과이고, (그림 1-(c), (d))가 자기상관 유사행렬을 사용한 결과 그림이다. 그림에서 신호의 극점은 단위원에 가깝게 인접해 있고, 잡음의 극점은 단위원 안쪽으로 분포되어 있다. 자기상관유사행렬을 사용한 방법이 데이터 행렬을 사용한 방법보다 신호의 극점 위치 추정이 더 안정되어 있는 것을 볼 수 있다. (표 1)은 수치로서 두 방법의 통계적인 성능을 비교분석한 것이다. 수치비교를 통해서도 자기상관 유사행렬을 사용한 방법이 표본분산과 표본바이어스, 최소제곱오차 면에서 데이터 행렬로 구한 결과 수치보다 더 작게 나타남을 알 수 있다. (그림 2)와 (그림 3)은 표본분산과 표본바이어스를 그림으로 나타낸 것이다. (그림 2)와 (그림 3)으로부터 자기상관유사행렬을 사용한 방법이 통계적인 성능 면에서 데이터 행렬을 사용한 방법보다 월등한 성능을 나타내는 것을 알 수 있다. 이는 백색 잡음의 자기상관 특성 때문에 나타나는 현상으로, 자기상관의 지연값이 어느정도 큰 경우 부가된 잡음의 영향이 크게 줄어들기 때문이다.

Case 2. 감쇄계수가 다를 경우.

한 신호의 감쇄계수를 다른 한 신호의 감쇄계수보다 크게 하여 시뮬레이션을 수행하였다. 감쇄계수가

표 1. 데이터 행렬과 자기상관유사행렬 방법의 통계적 성능비교

$A_1=1, A_2=1, f_1=0.2, f_2=0.22, r_1=0.01, r_2=0.01$, 확장차수(열)=14, 행=30, 데이터 개수=64

Table 1. Comparative performance between data matrix and autocorrelation-like matrix.

$A_1=1, A_2=1, f_1=0.2, f_2=0.22, r_1=0.01, r_2=0.01$, Damping factor 2=0.01, Overdetermined order=14, Rows=30, Data length=64

SNR(dB)	성능척도	Sample Variance		Sample Bias		MSE	
		Data	Auto_like	Data	Auto_like	Data	Auto_like
5		**	2.5860e-6	**	1.6081e-4	**	2.5860e-6
10		8.6858e-6	6.7234e-7	2.2097e-4	8.5988e-5	8.6477e-5	6.7301e-7
15		1.9790e-6	2.7573e-7	9.9853e-5	5.3016e-5	1.9692e-6	2.7578e-7
20		5.3121e-7	9.4419e-8	5.6807e-5	2.9390e-5	5.2913e-7	9.4339e-8

** 는 두 주파수를 분해하지 못함.

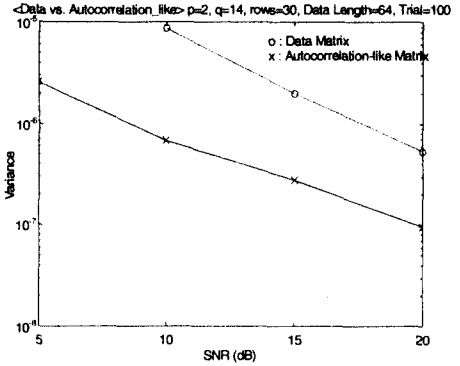


그림 2. 표본분산의 비교
Fig. 2 Comparison of sample variance of data-matrix method and autocorrelation-like matrix

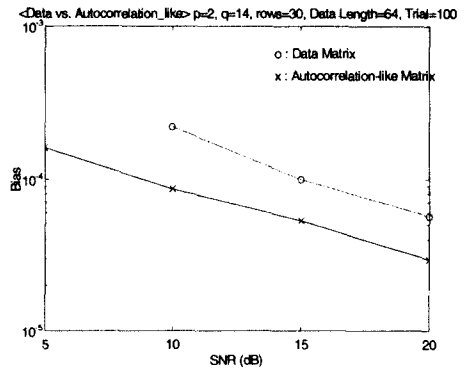


그림 3. 표본 바이어스의 비교
Fig. 3 Comparison of sample bias of data-matrix method and autocorrelation-like matrix

클 경우 그 신호는 다른 신호에 비해 빨리 감쇄한다. (그림 4)는 신호대 잡음비가 15 dB 인 경우에 시뮬레이션을 한 결과로서 감쇄계수가 상대적으로 큰 신호는 신호전력레벨이 작음을 알 수 있다. (그림 4-(a), (b))는 데이터 행렬을 이용한 결과이고, (그림 4-(c), (d))는 자기상관유사행렬을 이용한 결과이다. (그림 4)로부터 감쇄계수가 큰 신호의 전력밀도스펙트럼이나 pole-zero 그림에서의 신호의 극점 위치 추정이 자기상관유사행렬을 사용한 결과가 데이터 행렬을 이용한 결과보다 통계적으로 안정되어 있는 것을 알 수 있다. 감쇄계수가 상대적으로 큰 주파수 2를 기준으로 통계적인 수치를 나타낸 것이 (표 2)이다. (표 2)로

부터 자기상관유사행렬을 사용한 방법이 표본분산과 최소제곱오차면에서 통계적으로 우수하다는 것을 알 수 있다. (표 2)에 보인 결과수치에서 감쇄계수가 같을 때와 다르게 상대적으로 감쇄계수가 크고 신호전력이 약한 한 신호가 가깝게 인접한 경우 두 신호를 분해해 내지 못하는 경우도 있다. 이들 수치를 도식적으로 나타낸 것이 (그림 5)와 (그림 6)이다. 데이터 행렬보다 자기상관유사행렬을 사용한 방법이 보다 작은 표본분산값과 표본 바이어스 값을 제공함을 알 수 있으며, 이와같은 좋은 성능은 자기상관유사행렬이 잡음의 통계적 성질을 이용하였기 때문에 나타나는 결과라고 생각된다.

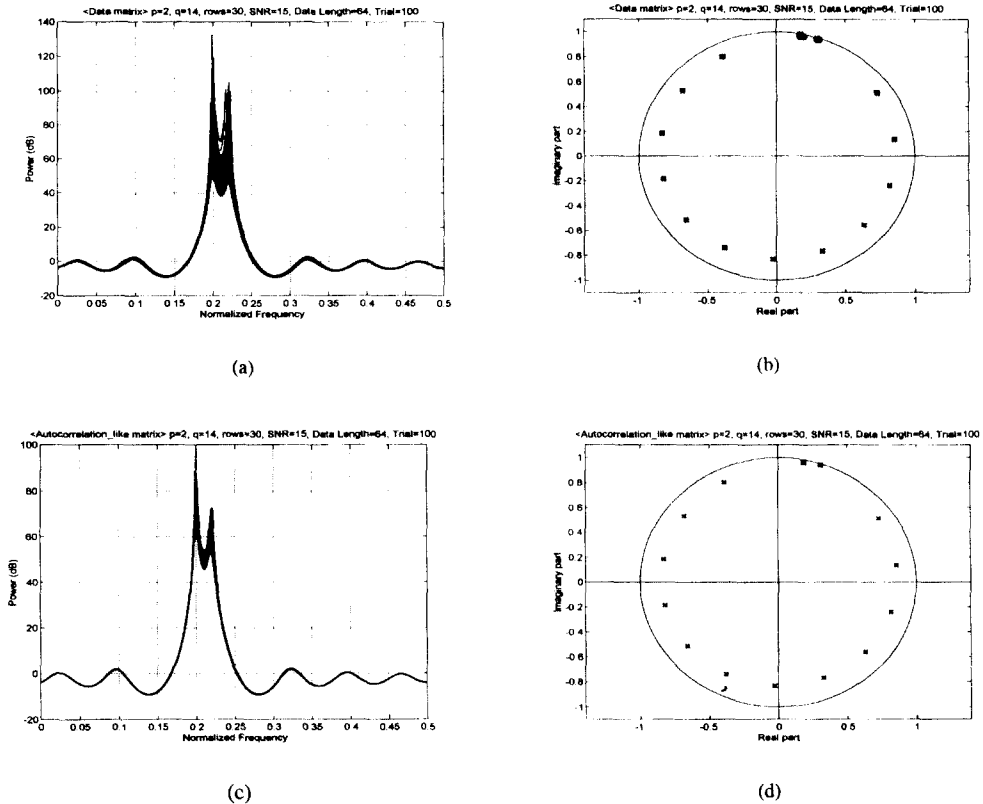


그림 4. 과도기 신호의 스펙트럼과 극점-영점 (감쇄계수가 다른 경우, $r_1=0.01$, $r_2=0.02$, SNR=15 dB)

- (a) 스펙트럼 (데이터 행렬)
- (b) Pole-zero 그림 (데이터 행렬)
- (c) 스펙트럼 (자기상관유사행렬)
- (d) Pole-zero 그림 (자기상관유사행렬)

Fig. 4 Spectrum and pole-zero plot of a transient-type signal (Damping factor 1=0.01, Damping factor 2=0.02, SNR=15 dB)

- (a) Spectrum of data matrix method
- (b) Pole-zero plot of data matrix method
- (c) Spectrum of Autocorrelation-like matrix method
- (d) Pole-zero plot of Autocorrelation-like matrix method

표 2. 데이터 행렬과 자기상관유사행렬 방법의 통계적 성능비교

$A_1=1, A_2=1, f_1=0.2, f_2=0.22, r_1=0.01, r_2=0.02$, 확장차수(열)=14, 행 = 30, 데이터 개수 = 64

Table 2. Comparative performance between data matrix and autocorrelation-like matrix.

$A_1=1, A_2=1, f_1=0.2, f_2=0.22, r_1=0.01, r_2=0.02$, Overdetermined order=14, Rows=30, Data length=64

성능 척도 SNR (dB)	Sample Variance		Sample Bias		MSE	
	Data	Auto_like	Data	Auto_like	Data	Auto_like
5	**	**	**	**	**	**
10	**	1.5842e-6	**	7.9173e-5	**	1.5753e-6
15	3.1082e-6	4.5971e-7	1.7407e-4	1.5212e-6	3.1072e-6	4.5434e-7
20	7.5843e-7	1.2162e-7	4.7761e-5	1.1941e-6	7.5343e-7	1.2033e-7

** 는 두 주파수를 분해하지 못함.

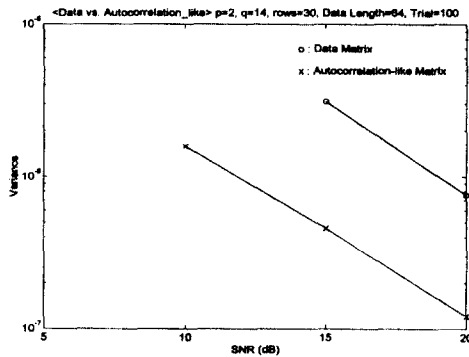


그림 5. 표본분산의 비교

Fig. 5 Comparison of sample variance of data-matrix method and autocorrelation-like matrix

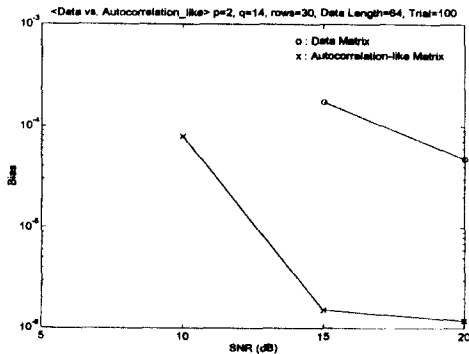


그림 6. 표본 바이어스의 비교

Fig. 6 Comparison of sample bias of data-matrix method and autocorrelation-like matrix

V. 결론

본 논문에서 선형예측모델과 SVD를 이용한 과도기 신호의 파라미터를 효율적으로 추정할 수 있는 자기상관유사행렬 모델을 제안하였다. 제안한 자기상관유사행렬 방법이 데이터 행렬을 이용한 방법보다 우수한 통계적 성능을 보여주었는데 이는 잡음에 대한 영향을 줄여주었기 때문에 나타난 결과로 분석되었다. 그러나 데이터 개수, 즉 행과 열이 증가할수록 계산시간이 급속히 증가하며, 어느정도 이상의 데이터 개수에서는 데이터 행렬방법의 통계적 성능과 거의 유사하였다. 따라서 본 논문에서 제안된 방법은 데이터열이 짧은 경우에 보다 좋은 성능을 나타낼 수 있었다. 현재 보다 나은 성능을 제공할 수 있는 모델의 계수벡터를 효율적으로 구하기 위한 연구가 진행중이다.

참고문헌

1. J. A. Cadzow, B. Baseghi and T. Hsu, "Singular-value decomposition approach to time series modelling", IEE Proc., vol. 130, No. 3, pp. 202-210, Apr. 1983.
2. R. Kumaresan and D. W. Tufts, "Estimating the parameters of exponentially damped sinusoid and pole-zero modeling in noise", IEEE Trans. on ASSP, vol. 30, no. 6, pp. 833-840, Dec. 1982.
3. S. M. Kay and S. L. Marple Jr, "Spectrum an-

- alysis-a modern perspective," IEEE Proc., vol. 69, no. 11, pp. 1380-1419, Nov. 1981.
4. C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992.
 5. M. H. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, John Wiley & Sons, New York, 1996.
 6. S. L. Marple, *Digital Spectral Analysis with Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
 7. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.



崔圭聖(Gyu-Sung Choi) 정회원
1996년 2월 : 경희대학교 전파공학과(공학사)
1998년 2월 : 경희대학교 대학원 전파공학과(공학석사)
1997년 12월 ~ 현재 : LG 전자 미디어통신 연구소 연구원

※ 주관심분야 : 스펙트럼 추정, MODEM
E-mail : cgs333@lge.co.kr



金榮洙(Young-Soo Kim) 종신회원
1981년 2월 : 연세대학교 전자공학과(공학사)
1983년 2월 : 연세대학교 대학원 전자공학과(공학석사)
1988년 12월 : Arizona State University 전기공학과(공학박사)

1985년 5월 ~ 1986년 5월 : Consultant, Signal-System Technology Inc., U.S.A.
1986년 6월 ~ 1988년 12월 : Research Associate, Arizona State University.
1989년 3월 ~ 1992년 8월 : ETRI 전파기술부, 전파응용 연구실, 실장.
1992년 9월 ~ 1996년 8월 : 경희대학교 전파공학과 조교수.
1996년 9월 ~ 현재 : 경희대 전자전산전파 공학부 부교수.
※ 주관심분야 : 레이더/소나신호처리, 스펙트럼 추정, 적응필터, 이동통신 등
E-mail : yskim@nms.kyunghee.ac.kr