

# 곱셈잡음 잡음모형에서 비모수 확률 신호 검파기

正會員 배진수\*, 박정순\*\*, 김광순\*\*, 송익호\*\*\*

## A Nonparametric Detector for Random Signals in a Multiplicative Noise Model

Jinsoo Bae\*, Jeongsoon Park\*\*, Kwang Soon Kim\*\*,  
Iickho Song\*\*\* *Regular Members*

### 요 약

이동통신 시스템을 분석할 때 중요한 여러길 전파를 모형화하는 데에는 곱셈잡음 잡음이 쓸모있다고 알려져 있다. 이 논문에서는 곱셈잡음 잡음에서 약한 신호의 비모수 검파를 생각한다. 관측값의 부호와 순위를 바탕으로 한 국소최적 검파기는 어떤 잡음 분포에서도 신호의 세기가 약할 때 이를 검파하는 성능이 좋도록 한 것이다. 이 검파기는 곱셈잡음 잡음에서 확률 신호를 검파하는 국소최적 검파기와 비슷하다는 것을 보인다. 그리고, 이 비모수 검파기는 국소최적 검파기와 점근적으로 거의 같은 성능을 갖는다는 것을 보인다.

### ABSTRACT

Multiplicative noise is known to be useful in modeling multipath propagation, which is crucial in mobile communication systems analysis. In this paper, nonparametric detection of weak random signals in multiplicative noise is considered. The locally optimum detector based on signs and ranks of observations is derived for good weak-signal detection performance under any noise probability density function. The detector has similarities to the locally optimum detector for random signals in multiplicative noise. It is shown that the nonparametric detector asymptotically has almost the same performance as the locally optimum detector.

### I. 머리말

잡음에서 신호를 찾아내는 알맞은 이산시간 검파기의 설계는 잡음과정의 분포를 정확히 알 수 없을 때 매우 어려운 문제가 된다. 검파기의 성능은 잡음과정의 분포에 꽤 민감하기 때문에 네이만-피어슨 정리를 바탕으로 한 최적 검파기는 잡음의 분포를 미리 알지 못하면 성능이 많이 떨어진다. 그런 때에는 일

\*앤더슨 컨설팅

\*\*한국과학기술원 전기 및 전자공학과

\*\*\*한국통신학회 논문지 편집위원

論文番號: 97150-0506

接受日字: 1997年 5月 6日

정한 오경보확률을 보장해주는 비모수 검파기가 쓰인다. 가장 잘 알려진 비모수 검파기는 수신된 자료 표본의 부호와 순위를 바탕으로 한다[1-3].

한편, 신호 검파문제에서 일반화된 관측 모형이 [4]에서 제안되었다. 이 논문에서 생각하는 곱셈곱 잡음 모형은 [4]에서 다룬 일반화된 관측 모형의 특별한 경우이다. 이동통신이 점점 더 많이 쓰이면, 여러길 전파 문제의 분석이 매우 중요해 진다. 여러길 전파 문제를 생각할 때, 곱셈곱 잡음 모형이 쓸모있다고 알려져 있다. 보기를 들면, 신호원에서 나와 수신기에 직접적으로, 그리고 반사를 통해 간접적으로 도착하는 확률 신호를 생각할 수 있다. 반사도가 확률적이고 두 길 사이의 전파 지연을 무시할 만하면, 곱셈곱 잡음 모형을 쓸 수 있다.

이 논문에서는 부호와 순위 통계량에 바탕을 두고 곱셈곱 잡음에서 약한 확률 신호 검파를 생각한다. 검정 통계량을 유도하고, 점수 함수식과 이의 근사식을 얻으며 성능을 분석할 수 있도록 점근상대효율도 계산한다.

## II. 관측모형

전형적인 확률 신호 검파 문제에서 이산시간 관측값  $X_i$ 에 대한 덧셈곱 잡음모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_i = \theta S_i + W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

여기서,  $S_i, i = 1, 2, \dots, n$ 은 공분산함수  $r_s(i, k) = E\{S_i, S_k\}, i, k = 1, 2, \dots, n$ 이고 평균이 0인 확률 신호이다.  $W_i$ 는  $i$ 제 표본시간에서 잡음성분이며,  $\theta$ 는 신호의 세기를 나타내는 매개변수이고,  $n$ 은 표본 크기이다.  $W_i$ 는 서로 독립이고 같은 분포를 갖는 확률변수라 하자.

이제 곱셈곱 잡음을 포함할 수 있는 좀 더 일반적인 모형을 생각해 보자. 전형적인 확률 신호검파 문제에서 이산시간 관측값  $X_i$ 에 대한 곱셈곱 잡음모형은 다음과 같이 쓸 수 있다 [4].

$$X_i = \theta S_i + \theta S_i N_i + W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

곧, (2)에는 (1)의 덧셈곱 잡음모형 가정을 유지하면

서 잡음성분  $N_i$ 가 하나 더 들어 갔다.  $N_i$ 와  $W_i$ 는 일반적으로 상관관계가 있으며 각각은 서로 독립이고 같은 분포를 갖는 확률변수이다.  $(N_i, W_i)$ 의 결합확률밀도함수를  $f_{NW}$ 라 하고,  $f_N, f_W, \sigma_N, \sigma_W$ 는 각각  $N_i$ 의 확률밀도함수,  $W_i$ 의 확률밀도함수,  $N_i$ 의 분산,  $W_i$ 의 분산이라 하자.

머릿말에서 밝혔듯이 곱셈곱 잡음모형 (2)는 실제 일어나는 여러 상황에서 쓸모있다. 보기를 들면, 여러길 전송의 전파 계통에서 여러 전파경로를 거쳐 신호가 수신기에 닿았을 때의 효과는 진폭이 레일리 확률변수로 모형화되는 감쇄신호로 나타낼 수 있다. 직접경로신호가 있을 때, 수신기에는 기본적으로 두 신호성분이 있다: 주 신호와 부가적인 감쇄 신호가 곧 그 둘이다. 잡음이 있을 때 그런 신호를 복조함으로써 감쇄 진폭을 (2)식으로 나타낼 수 있다.

검파 문제는 관측벡터  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 의 결합확률밀도함수  $\phi(x|\theta)$ 를 나타내는 쿨무가설  $H$ 와 대립가설  $K$  사이에서 하나를 고르는 가설검정문제이다. 여기서,  $x$ 는  $X$ 의 실제값이다.  $H$ 에서는  $\theta = 0$ 이고,  $K$ 에서는  $\theta > 0$ 이며, 다음을 만족시킨다.

$$\phi(x|\theta) = \int_{R^n} \prod_{i=1}^n \int f_{NW}(n_i, y_i(\theta)) dn_i f_S(s) ds. \quad (3)$$

여기서,

$$y_i(\theta) = x_i - \theta s_i - \theta s_i n_i. \quad (4)$$

(3)에서  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n), f_S(s)$ 는  $S_i, i = 1, 2, \dots, n$ 의 결합확률밀도함수이고,  $R_n$ 은  $n$ 차원 실수공간이다. (3)에서  $\theta = 0$ 이면 쿨무가설 확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$f_N, f_W, f_{NW}$ 는 충분히 부드럽고, 미분과 적분 순서를 바꾸는 것과 같은 수학 연산을 보장하는 정칙조건을 (regular condition) 만족시킨다고 하자. 실수  $x$ 가 어떤 값을 갖더라도  $f_W(x) > 0$ 이고,  $f_W(x)$ 는 짝수함수이고, 다음의 값들은 모두 존재하고 유한하다고 하자.

$$I_1(f_W) = \int g_1^2(x) f_W(x) dx, \quad (5)$$

$$I_2(f_W) = \int g_1(x) g_2(x) f_W(x) dx, \quad (6)$$

$$I_3(f_W) = \int g_2^2(x) f_W(x) dx, \quad (7)$$

$$I_4(f_w) = \int g_2(x) h_1(x) f_w(x) dx, \quad (8)$$

$$I_5(f_w) = \int h_1^2(x) f_w(x) dx, \quad (9)$$

$$I_6(f_w) = \int h_1(x) h_2(x) f_w(x) dx, \quad (10)$$

$$I_7(f_w) = \int h_2^2(x) f_w(x) dx, \quad (11)$$

$$I_8(f_w) = \int h_2(x) h_3(x) f_w(x) dx, \quad (12)$$

$$I_9(f_w) = \int h_3^2(x) f_w(x) dx, \quad (13)$$

$$I_{10}(f_w) = \int h_3(x) h_1(x) f_w(x) dx. \quad (14)$$

여기서,

$$g_1(x) = -f_w'(x)/f_w(x), \quad (15)$$

$$g_2(x) = -u'(x)/f_w(x), \quad (16)$$

$$h_1(x) = -f_w'(x)/f_w(x), \quad (17)$$

$$h_2(x) = u'(x)/f_w(x), \quad (18)$$

$$h_3(x) = v'(x)/f_w(x). \quad (19)$$

이고,

$$u(x) = \int n f_{NW}(n, x) dn = f_w(x) E\{N|W=x\}, \quad (20)$$

$$v(x) = \int n^2 f_{NW}(n, x) dn = f_w(x) E\{N^2|W=x\}. \quad (21)$$

이다. 식 (5)의  $I_1(f_w)$ 는  $f_w$ 의 피서 정보이다. 식 (16), (18), (19)의  $g_2(x)$ ,  $h_2(x)$ ,  $h_3(x)$ 는 국소최적 비선형함수  $g_1(x)$ ,  $h_1(x)$ 의 일반화이며, 가중 조건부 평균  $u(x)$ 와 가중 조건부 분산  $v(x)$ 를 통해 두 잡음과정 (덧셈잡음과 곱셈잡음) 사이의 상관관계로부터 나오는 것이다.  $E\{N|W\}=0$ 은  $N$ 과  $W$ 가 상관관계가 없음을 뜻한다. 마지막으로,  $N_i$ 는  $W_i$ 와 대칭적으로 상관관계를 갖는다고 하자. 곧,  $N\{N|W=x\} = E\{N|W=-x\}$ 이라고 두자. 이런 상관관계는 감쇄 신호 모형에 대한 대부분의 쓸모있는 확률밀도함수에서 일어난다. 보기로써,  $W$ 와  $Z$ 가 평균이 0, 분산이 1이며 독립인 확률변수일 때  $N = \sqrt{W^2 + Z^2}$ 라 하면  $N$ 은 감쇄채널에 대한 가장 널리 알려진 모형 가운데 하나인 레일레이 분포를 갖는다. 이렇게 두면,  $E\{N|W=x\}$ 는  $x$ 의 짝수함수이고, 따라서  $f_w(x)$ 가 대칭이면  $u(x)$ 도 짝수함수이다.

### III. 국소최적 순위검파기 검정 통계량

일반적으로 최강 검파기를 얻기 어려운 비정규잡음 환경에서 신호를 검파하는 문제를 생각할 때에는 국소최적 검파기를 낳는 약한 신호 검파기 설계 문제에 관심을 쏟을 수 있다. 일반화된 네이만-피어슨 정리를 따르면, 국소최적검파기는 원점에서 검파력 함수의 기울기를, 오경보확률이 같은 모든 검파기 가운데에서, 가장 크게 한다. 국소최적검파기의 검파력은, 가벼운 조건에서 적어도 0이 아닌 어떤 구간  $(0, \theta_M)$ 의 신호크기에서 다른 검파기의 검파력보다 작지 않다는 것이 보장된다.

곱셈잡음에서 약한 확률 신호 검파 문제에 대한 검정 통계량의 일개를 잠깐 살펴보자. 국소최적검파기의 검정통계량은 확률 신호의 공분산함수  $r_s(i, k)$ ,  $i, k=1, 2, \dots, n$ 와 잡음과정의 결합확률밀도함수  $f_{NW}$ 에 의존한다고 알려져 있다. 이 경우 국소최적검파기의 검정통계량은 다음과 같음이 잘 알려져 있다 [4].

$$T_{LO}(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n r_s(i, k) \{g_1(X_i) + g_2(X_i)\} \{g_1(X_k) + g_2(X_k)\} + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \{h_1(X_i) + 2h_2(X_i) + h_3(X_i)\} \quad (22)$$

여기서,  $\sigma_i^2 = r_s(i, i)$ 이다.

관측값의 부호와 순위를 바탕으로 한 검파 방법을 생각할 수 있도록,  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$   $Z_i = \text{sgn}(X_i)$ 를 부호 벡터로 놓고, 집합  $\{|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|\}$ 에서  $|X_i|$ 의 순위로 이루어진 벡터를  $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ 라 두며, 이 집합에서  $i$ 째로 작은 원소를  $|X|_{[i]}$ 로 쓰자.

이제 이 논문의 주 관심사인 곱셈잡음에서 확률 신호를 검파하는 국소최적순위 검파기를 생각한다. 곱셈잡음에서 확률 신호를 국소최적순위검파하는 문제는 대립가설  $K$ 에 대해 귀무가설  $H$ 를 검정하는 문제가 된다.

$p(q, z|H)$ 와  $p(q, z|K)$ 를  $H$ 와  $K$ 에서  $Q$ 와  $Z$ 의 결합 확률밀량함수라 하자. 그러면, 다음과 같다.

$$H: p(q, z|H) = \frac{1}{2^n n!}, \quad (23)$$

$$K: p(q, z|K) = \int_B \int_{R^n} \prod_{i=1}^n \int f_{NW}(n_i, y_i(\theta)) dn_i f_S(s) ds. \quad (24)$$

여기서,  $B = \{x | Q = q, Z = z\}$ 이다. 일반화된 네이만-피어슨정리에서

$$K: \theta > 0 \tag{25}$$

에 대한

$$H: \theta = 0 \tag{26}$$

의 국소최적순위 검파기 검정 통계량은 다음과 같이 얻을 수 있다 [5].

$$T_{LOR}(x) = \frac{1}{p(q, z | H)} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d^2 p(q, z | K)}{d\theta^2} \tag{27}$$

식 (23), (24), (27)을 써서 곱셈꼴 잡음에서 확률신호에 대한 국소최적순위 검파기의 검정 통계량은 다음과 같음을 보일 수 있다 [6].

$$\begin{aligned} T_{LOR}(X) &= \frac{1}{p(q, z | H)} \int_B \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d^2 \phi(x | K)}{d\theta^2} dx \\ &= 2^n n! \int_B T_{LO}(x) \phi(x | H) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n r_S(i, k) Z_i Z_k \{c_1(Q_i, Q_k) + c_2(Q_i, Q_k) \\ &\quad + c_2(Q_i, Q_k) + c_3(Q_i, Q_k)\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \{c_4(Q_i) + 2c_5(Q_i) + c_6(Q_i)\} \end{aligned} \tag{28}$$

여기서,

$$c_1(i, k) = E_H\{g_1(|X|_{[i]})g_1(|X|_{[k]})\}, \tag{29}$$

$$c_2(i, k) = E_H\{g_1(|X|_{[i]})g_2(|X|_{[k]})\}, \tag{30}$$

$$c_3(i, k) = E_H\{g_2(|X|_{[i]})g_2(|X|_{[k]})\}, \tag{31}$$

$$c_4(i) = E_H\{h_1(|X|_{[i]})\}, \tag{32}$$

$$c_5(i) = E_H\{h_2(|X|_{[i]})\}, \tag{33}$$

$$c_6(i) = E_H\{h_3(|X|_{[i]})\}. \tag{34}$$

이다.

귀무가설에서 ( $Q = q, Z = z$ )의 확률은 (23)에서 볼 수 있듯이 잡음과정의 확률밀도함수와 독립이다. 일단 오경보확률이 정해지면, 잡음분포를 모르더라도 순위 검파기의 문턱값을 정할 수 있다.

#### IV. 점수 함수

이 절에서는, (28)의 검정통계량을 정해주는 (29)-(34)의 점수함수  $c_1(i, k), c_2(i, k), c_3(i, k), c_4(i), c_5(i), c_6(i)$ 의 표현식을 얻는다. 먼저  $f = f_W$ 의 누적분포함수를  $F = F_W$ 로 쓰고  $\lambda(n, i) = \frac{2^{n-i+1} n!}{(n-1)!(i-1)!}$ ,  $\mu(n, i, k) = \frac{2^{n-k+1} n!}{(n-i)!(i-k-1)!(k-1)!}$  라 두자. 순서 통계의 극한과 결합 분포에 대한 결과를 쓰면 [7] (29)-(34)에서 표 1의 결과를 얻을 수 있다.

대부분의 알려진 확률밀도함수에 대해서, 점수 함수  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 의 표현식은 해석적으로 얻을 수 없다. 이럴 때 이들 점수 함수의 값을 얻으려면 수치 해석의 방법을 쓸 수 있지만, 이 논문에서는 점근 근사법을 쓰도록 하자. 먼저 다음과 같이 정의한다.

$$a_1(i) = E_H\{g_1(|X|_{[i]})\}, \tag{35}$$

$$a_2(i) = E_H\{g_2(|X|_{[i]})\}. \tag{36}$$

이제, [7]과 같은 방법을 쓰면, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} a_1(i) &= E\{g_1(F^{-1}(\frac{U[i]+1}{2}))\} \cong g_1(F^{-1}(E\{\frac{U[i]+1}{2}\})) \\ &= g_1(F^{-1}(\frac{n+i+1}{2n+2})), \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} a_2(i) &= E\{g_2(F^{-1}(\frac{U[i]+1}{2}))\} \cong g_2(F^{-1}(E\{\frac{U[i]+1}{2}\})) \\ &= g_2(F^{-1}(\frac{n+i+1}{2n+2})). \end{aligned} \tag{38}$$

여기서,  $U_{[i]}$ 는 서로 독립이고 분포가 같으면서,  $(0, 1)$ 에서 균일분포된 확률변수들로 이루어진 집합  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ 에서  $i$ 번째 작은 원소이다. 그러면, 표 2와 같이 점수 함수의 점근 근사식을 얻을 수 있다 (부록). 보기로,  $n = 10$ 일 때 표 1의 식으로 얻은  $c_1(i, k)$ 의 참값과 표 2의 점근 근사식으로 얻은  $c_1(i, k)$ 의 근사값을 표 3에 보았다.

식 (28)에 이들 근사 점수 함수를 쓰면, 국소준최적순위 검파기를 얻을 수 있다.  $n \rightarrow \infty$ 이면 근사 점수 함수는 정확한 점수 함수에 수렴한다는 것과 따라서 국소준최적순위 검파기도 국소최적 검파기에 수렴한

표 1. 점수 함수의 표현식

$c_1(i, k)$	$i > k$	$\mu(n, i, k) \int_0^\infty \int_0^y f(x)f(y)(F(y) - F(x))^{i-k-1} \cdot (2F(x) - 1)^{k-1} (1 - F(y))^{n-i} dx dy$
	$i = k$	$\lambda(n, i) \int_0^\infty \{f(x)/f(x)\}^2 f(x) (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i} dx$
	$i < k$	$\mu(n, k, i) \int_0^\infty \int_0^y f(x)f(y)(F(y) - F(x))^{k-i-1} \cdot (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(y))^{n-k} dx dy$
$c_2(i, k)$	$i > k$	$\mu(n, i, k) \int_0^\infty \int_0^y f(y)u'(x)(F(y) - F(x))^{i-k-1} \cdot (2F(x) - 1)^{k-1} (1 - F(y))^{n-i} dx dy$
	$i = k$	$\lambda(n, i) \int_0^\infty \{f(x)u'(x)/f(x)\} (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i} dx$
	$i < k$	$\mu(n, k, i) \int_0^\infty \int_0^y f(x)u'(y)(F(y) - F(x))^{k-i-1} \cdot (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(y))^{n-k} dx dy$
$c_3(i, k)$	$i > k$	$\mu(n, i, k) \int_0^\infty \int_0^y u'(x)u'(y)(F(y) - F(x))^{i-k-1} \cdot (2F(x) - 1)^{k-1} (1 - F(y))^{n-i} dx dy$
	$i = k$	$\lambda(n, i) \int_0^\infty \{u'(x)/f(x)\}^2 f(x) (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i} dx$
	$i < k$	$\mu(n, k, i) \int_0^\infty \int_0^y u'(x)u'(y)(F(y) - F(x))^{k-i-1} \cdot (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(y))^{n-k} dx dy$
$c_4(i)$		$\lambda(n, i) \int_0^\infty f'(x) (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i} dx$
$c_5(i)$		$\lambda(n, i) \int_0^\infty u''(x) (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i} dx$
$c_6(i)$		$\lambda(n, i) \int_0^\infty v''(x) (2F(x) - 1)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i} dx$

표 2. 점수 함수의 점근 근사식

$c_1(i, k)$	$a_1(i) a_1(k)$
$c_2(i, k)$	$a_1(i) a_2(k)$
$c_3(i, k)$	$a_2(i) a_2(k)$
$c_4(i)$	$h_1(F^{-1}(\frac{n+i+1}{2n+2}))$
$c_5(i)$	$h_2(F^{-1}(\frac{n+i+1}{2n+2}))$
$c_6(i)$	$h_3(F^{-1}(\frac{n+i+1}{2n+2}))$

표 3.  $n=10$ 일 때,  $c_1(i, k)$ 의 참값과 점근 근사값

(i,k)	exact	approx.	(i,k)	exact	approx.
(1,1)	0.025	0.013	(8,1)	0.139	0.133
(2,1)	0.037	0.027	(8,2)	0.281	0.268
(2,2)	0.076	0.054	(8,3)	0.429	0.408
(3,1)	0.051	0.041	(8,4)	0.586	0.556
(3,2)	0.103	0.083	(8,5)	0.754	0.714
(3,3)	0.158	0.126	(8,6)	0.942	0.888
(4,1)	0.065	0.056	(8,7)	1.159	1.087
(4,2)	0.131	0.113	(8,8)	1.427	1.324
(4,3)	0.201	0.171	(9,1)	0.170	0.164
(4,4)	0.275	0.233	(9,2)	0.343	0.332
(5,1)	0.080	0.071	(9,3)	0.524	0.505
(5,2)	0.162	0.145	(9,4)	0.714	0.688
(5,3)	0.248	0.220	(9,5)	0.920	0.884
(5,4)	0.338	0.300	(9,6)	1.147	1.100
(5,5)	0.438	0.385	(9,7)	1.409	1.345
(6,1)	0.097	0.089	(9,8)	1.730	1.639
(6,2)	0.196	0.180	(9,9)	2.172	2.029
(6,3)	0.299	0.274	(10,1)	0.221	0.216
(6,4)	0.409	0.373	(10,2)	0.448	0.438
(6,5)	0.527	0.479	(10,3)	0.683	0.667
(6,6)	0.660	0.596	(10,4)	0.931	0.908
(7,1)	0.116	0.109	(10,5)	1.197	1.167
(7,2)	0.235	0.220	(10,6)	1.492	1.451
(7,3)	0.358	0.335	(10,7)	1.830	1.775
(7,4)	0.489	0.456	(10,8)	2.241	2.164
(7,5)	0.630	0.586	(10,9)	2.800	2.678
(7,6)	0.788	0.729	(10,10)	3.800	3.534
(7,7)	0.971	0.891			

다는 것은 눈여겨 볼 만 하다.

보기

$W$ 와  $Z$ 가 독립인 정규확률변수일 때  $N = \sqrt{W^2 + Z^2}$ 라 놓자. 앞절에서 나타났듯이  $N$ 은 레일레이 확률변수이다. 이 논문에서 문제는 레일레이 감쇄와 덧셈잡음이 있을 때 약한 신호를 검파하는 것이다.  $u(x)$ 를 얻으려면 먼저  $E\{N|W=x\}$ 의 값을 얻어야 한다. 그러나, 이것은 다음에 보인 바와 같이 닫힌 형태로 나타낼 수 없다.

$$E\{N|W=x\} = 2 \int_0^\infty \sqrt{x^2 + z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) dz. \tag{39}$$

먼저  $x$ 가 작은 값일 때 (보기,  $x=1, 2, \dots, 10$ ) (39)의 값을 계산한다. 이 값들로  $x \geq 0$ 일 때 쓸모있는  $x$ 의 보간다항식을 얻는다.  $E\{N|W=x\}$ 가 짝수 함수이므로  $x \leq 0$ 일 때 또 다른 다항식을 바로 얻을 수 있다.  $x$ 가 크면 (39)는  $x$ 에 가까와 진다는 것을 쉽게 보일 수 있다. 이로부터 다음을 얻는다.

$$E\{N|W=x\} \cong p(x) \quad (40)$$

$$= \begin{cases} -x & \text{if } x < -5, \\ 0.7969 - 0.3071x + 0.3293x^2 + 0.0855x^3 + 0.012x^4 + 0.000863x^5 & \text{if } -5 \leq x \leq 0, \\ 0.7969 + 0.3071x + 0.3293x^2 + 0.0855x^3 + 0.012x^4 + 0.000863x^5 & \text{if } x > 5. \end{cases}$$

식 (15), (16), (20), (40)에서 다음을 얻는다.

$$g_2(x) \cong -p'(x) + xp(x). \quad (41)$$

위와 같이  $c_i, i=1, 2, \dots, 6$ 의 참값과 근사값을 얻어 보면 [6]  $i, k$  가운데 하나가 고정되고 다른 하나가 커지면 참값과 근사값의 차이도 커진다는 것, 모든 근사값이 참값보다 작다는 것,  $n \rightarrow \infty$ 면 근사값은 참값에 가까와진다는 것을 알 수 있다.

### V. 접근 성능 분석

가장 일반적으로 쓰는 검파기의 상대적 접근성능 측정방법은 접근상대효율이다. 검정 통계량  $T_1$ 과  $T_2$ 를 바탕으로 한 두 검파기  $D_1$ 과  $D_2$ 의  $ARE_{1,2}$ 는 정칙 조건에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$ARE_{1,2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad (42)$$

여기서,

$$\xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \frac{d^2 E_K\{T_i\}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} \right]^2}{nV_H\{T_i\}}, \quad i=1, 2, \quad (43)$$

은 검파기의 효능이다. 국소최적순위 검파기의 효능은 [2]에서와 비슷한 과정을 거쳐 다음과 같음을 보일 수 있다 [6].

$$\xi_{LOR} = 2(\|r_S^2\| - \|\sigma^4\|)(I_1 + 2I_2 + I_3)^2 + (\|\sigma^4\| - \|\sigma^2\|^2)(I_5 + 4I_6 + 4I_7 + 4I_8 + I_9 + 2I_{10}), \quad (44)$$

여기서,

$$\|r_S^2\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_S^2(i, k), \quad (45)$$

$$\|\sigma^k\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^k. \quad (46)$$

이다.

한편, 국소최적검파기의 효능은 다음과 같다[4].

$$\xi_{LO} = 2(\|r_S^2\| - \|\sigma^4\|)(I_1 + 2I_2 + I_3)^2 + \|\sigma^4\|(I_5 + 4I_6 + 4I_7 + 4I_8 + I_9 + 2I_{10}). \quad (47)$$

이제,  $ARE_{LOR, LO}$ 은 (42), (44), (47)로부터 쉽게 얻을 수 있다.

국소최적 검파기와 다른 검파기들의 접근성능은 [4]에서 이미 견주어 보았으므로, 여기서는 국소최적순위 검파기와 국소최적 검파기의 성능을 견주어 보는 것으로 충분하다. 먼저  $n \rightarrow \infty$ 이면 근사 점수 함수는 정확한 점수 함수에 가까와지므로  $ARE_{LOR, LSR} = 1$ 이 된다. 이제, 신호의 시간상관을 다음과 같이

$$\alpha = \frac{\|r_S^2\| - \|\sigma^4\|}{\|\sigma^4\|}, \quad (48)$$

그리고 신호전력 시간비균질성을 다음과 같이 나타내자.

$$\beta = \frac{\|\sigma^4\| - \|\sigma^2\|^2}{\|\sigma^4\|}. \quad (49)$$

음이 아닌 값을 갖는  $\alpha$ 는 신호 순간상관이 검파 성능에 미치는 영향을 나타낸다. 신호의 상관관계가 커지면  $\alpha$ 도 커진다. 신호사이에 상관관계가 없다면,  $\alpha$ 는 0이 된다. 신호의 분산  $\sigma_i^2$ 가 모든  $i$ 에 대해 같다면,  $\beta=0$ 이 된다. 신호 분산의 비균질성이 늘어나면  $\beta$ 도 커지며, 늘  $0 \leq \beta \leq 1$ 이다. 이제 다음을 얻을 수 있다.

$$ARE_{LOR, LO} = \frac{2\alpha(I_1 + 2I_2 + I_3)^2 + \beta(I_5 + 4I_6 + 4I_7 + 4I_8 + I_9 + 2I_{10})}{2\alpha(I_1 + 2I_2 + I_3)^2 + (I_5 + 4I_6 + 4I_7 + 4I_8 + I_9 + 2I_{10})}. \quad (50)$$

그림 1에  $\alpha$ 가 바뀔 때  $ARE_{LOR, LO}$ 를  $\beta$ 의 함수로써 보였다.  $\beta \rightarrow 1$ 이면 국소최적순위 검파기와 국소최적 검파기가 접근적으로 같은 성능을 갖는다는 사실은 흥미롭다; 곧,  $\beta \rightarrow 1$ 일 때  $ARE_{LOR, LO} = 1$ 이 된다. 이것은 표본크기가 크고, 가중이 적절하며, 신호전력이 시

간적으로 꽤 비균질적이면, 실제 관측값 대신 관측값의 부호와 순위만을 써서 확률 신호를 검파하더라도 정의의 손실이 매우 적다는 것을 뜻한다.  $\alpha \rightarrow \infty$ 이면  $\beta$ 에 관계없이  $ARE_{LOR, LO}$ 는 1이 된다.  $\alpha$ 가 커지면 국소최적순위 검파기의 성능은 더 좋아지고  $\beta$ 가 바뀌더라도 성능이 유지됨을 알 수 있다. 국소최적순위 검파기는 확률신호를 검파할 때 확률신호의 상관과 신호 분산의 차이에 반응한다는 것은 주목할 만하다.

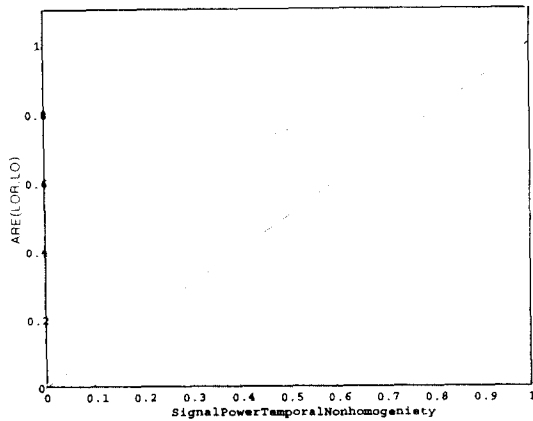


그림 1.  $ARE_{LOR, LO}$  (solid:  $\alpha=0$ , dashed:  $\alpha=1$ , dotted:  $\alpha=2$ , dashdot:  $\alpha=\infty$ )

### VI. 맺음말

이 논문에서는, 곱셈곱 잡음에서 약한 확률 신호의 비모수 검파를 생각했다. 국소최적순위 검파기의 검정통계량은 확률신호를 검파하는 국소최적 검파기의 검정통계량과 꽤 비슷하다는 것을 보였다. 국소준최적순위 검파기 일개를 또한 얻었는데, 국소준최적순위 검파기는 성능이 약간 떨어지지만 간단하게 구현할 수 있어 쓸모있다. 점근상황에서 확률신호에 대한 국소최적순위 검파기와 국소최적 검파기의 성능을 견주어 보았다.

### 참고 문헌

1. J.M. Morris, "Optimal probability-of-error thresholds and performance for two versions of the sign

detector," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 39, pp. 1726-1728, Dec. 1991.

2. I. Song and S.A. Kassam, "Locally optimum rank detection of correlated random signals in additive noise," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 38, pp. 1311-1322, July 1992.

3. R.S. Blum, "locally optimum distributed detection of correlated random signals based on ranks," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, pp. 931-942, May 1996.

4. I. Song and S. A. Kassam, "Locally optimum detection of signals in a generalized observation model: the random signal case," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36, pp. 516-530, May 1990.

5. S.A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*, New York: Springer-Verlang, 1988.

6. J. Bae, *Signal Detection in Various Disturbance Models*, Ph.D. Dissertation, Dept. of Elect. Eng., Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon, Korea, 1998.

7. J. Hajek and Z. Sidak, *Theory of Rank Tests*, New York: Academic Press, 1967.

### 부 록

먼저,  $c_1(k, i)$ ,  $c_2(k, i)$ ,  $c_3(k, i)$ 에 대해 생각하자.  $i = k$  라 하면 (37)과 (38)을 써서, (29)-(31)로부터 다음과 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$c_1(i, i) = E\{g_1^2(F^{-1}(\frac{U[i]+1}{2}))\} \approx g_1^2(F^{-1}(E\{\frac{U[i]+1}{2}\}))$$

$$= g_1^2(F^{-1}(\frac{n+i+1}{2n+2})) \approx a_1(i), \tag{51}$$

$$c_2(i, i) = E\{g_1(F^{-1}(\frac{U[i]+1}{2}))g_2(F^{-1}(\frac{U[i]+1}{2}))\}$$

$$\approx g_1(F^{-1}(E\{\frac{U[i]+1}{2}\}))g_2(F^{-1}(E\{\frac{U[i]+1}{2}\}))$$

$$= g_1(F^{-1}(\frac{n+i+1}{2n+2}))g_2(F^{-1}(\frac{n+i+1}{2n+2}))$$

$$\approx a_1(i)a_2(i), \tag{52}$$



