

에너지 감쇠역을 포함하는 파랑장에 대한 반복기법의 적용

윤 종 태*
(97년 10월 28일 접수)

Application of Iterative Procedure to the Wave Field with Energy Dissipation Area

Jong-Tae Yoon*

Key Words : Mild Slope Equation(완경사 방정식), Conjugate Gradient Method(공액경사법), Energy Dissipation Area(에너지 감쇠역), Diffraction (회절), Reflection (반사), Elliptic Model (타원형 모형), Iterative Solution (반복해)

Abstract

An Elliptic model for calculating the combined refraction / diffraction of monochromatic linear waves is developed, including a term which allows for the dissipation of wave energy. Conjugate gradient method is employed as a solution technique. Wave height variations are calculated for localized circular and rectangular dissipation areas. It is shown that the numerical results agree very well with analytical solution in the case of circular damping region. The localized dissipation area creates a shadow region of low wave energy and the recovery of wave height by diffraction occurs very slowly with distance behind the damping region.

1. 서 론

해안구조물의 설치나 해양환경 문제를 다룰 때 가장 필수적인 것이 그 지역에서의 정확한 파랑자료이다. 비교적 평탄한 형상의 심해 파랑은 천해역으로 접어들어 해안선을 향해 오면서 수심 변화에 따른 복잡하고도 급격한 변형을 겪게 된다. 회절과 굴절, 그리고 반사 및 쇄파 등의 다양한 물리적 현상이 발생할 수 있는 복잡한 지형을 가진 해안에

서의 정확한 파랑 계산은 용이한 일이 아니다.

이러한 파랑변형을 설명하고자 하는 수학적 모형이 꾸준히 개발되어 왔으며, Berkhoff⁽¹⁾에 의해 처음 발표된 완경사 방정식은 비회전류의 지배방정식인 속도포텐셜의 Laplace방정식에 Galerkin-eigenfunction법을 적용하여 유도 되었는데, 심해에서 천해역까지의 전 수심대에서 파랑의 선형 분산성을 정확히 예측할 수 있는 모형이다. 이로 인해 종래 개별적으로 다루던 회절과 굴절을 함께 취급

* 정희원, 경성대학교 공과대학 토목공학과

할 수 있게 되었고, 파향선이 교차할 때 생기는 불합리한 에너지의 집중(caustics)을 해결할 수 있게 되었다. 이 방정식은 상당히 유용하여 다양한 공학적 문제의 해결에 이용되어 왔다.

파랑이 천해역으로 전파해 오면서 앞서 언급한 지형 변화에 의한 다양한 변형외에 에너지의 감쇠가 발생할 수 있다. 과도하게 성장한 파랑에너지의 최종적 소산 과정으로서의 백파 및 쇄파 외에도 국부적인 감쇠 요인을 만나면 에너지가 손실되고 파고가 작아진다. 모래 바닥으로 된 해저면에 위치한 국부적인 점성토 구역이나 대규모의 해초 밀집지역, 말뚝 군(群) 혹은 수중 수목 등을 만나면 이러한 장애 요인에 의해 에너지가 감쇠될 뿐만 아니라 회절이 발생하여 파랑의 분포가 급격하게 달라지게 된다. 이러한 다양한 요인들에 의한 에너지 감쇠효과에 대해서는 많은 연구가 있어 왔지만²⁾, 이런 에너지 감쇠 영역을 대상 해역에 포함하는 파랑장에 대한 계산 예는 많지 않다. Darlymple등은³⁾ 해저 수초군이 있을 때의 회절 현상을 연구한 바 있지만, 수치모형에서 반사파를 무시하여 충분히 파의 산란을 고려하지는 못하였다.

환경사방정식은 그 유용성에도 불구하고 식이 비분리 타원형이기 때문에 계산의 효율성을 기하고자 할 때에는 포물선형이나 쌍곡선형 편미분방정식으로 변환시켜 사용해 왔는데, 각자의 장단점에 대해선 많은 연구가 되어 있다. 이러한 변환들이 부적합한 경우엔 원래의 타원형 식을 사용해야 하는데, Gauss 소거법으로 만족스럽게 다룰 수 있는 영역은 약 10파장 이내이다. 반면에 반복기법을 사용하면 이와같은 용량 문제를 피할 수 있고 비사각형 영역에도 쉽게 적용할 수 있지만, 원래의 방정식이 일반적인 반복기법의 수렴 조건을 만족하지 않는다. Panchang등⁴⁾은 차분화된 행렬방정식을 반복기법이 가능하게 변환시켜 CG(Conjugate Gradient)기법을 사용하여 해를 구한 바 있고, 운중태⁵⁾도 CG기법을 사용해 구형 해저 지형과 이안제가 설치된 파랑장에 적용하여 해를 구한 바 있다. 포물선형 방정식을 사용하는 모형이나 RCPWAVE 모형⁶⁾, EVP모형⁷⁾ 등의 경우는 파의 주진행방향(x)이 주어져야 하고 회절은 y 방향으로만 발생한다던가 $-x$ 방향으로의 반사파를 무시하는 등의

가정이 필요하지만, 이 기법은 사전 가정이 도입되지 않으므로 환경사 방정식의 물리적 구조를 모두 재현할 수 있고, Panchang등(1991)에 의하면 파랑의 주 방향에 제약받지 않을 뿐만 아니라 대단히 불규칙한 지형에도 쉽게 적용할 수 있다. 본 연구에서는 대상해역에 지역적인 에너지 감쇠 영역을 설정하여 이로 인한 에너지의 감쇠 및 회절 효과를 확인해 보았다. 수치 기법은 CG기법을 사용하였고, 원형 감쇠역을 가진 경우의 해석해와 비교한 후 구형 감쇠역에서의 파랑 분포를 계산해 보았다.

2. 환경사 방정식

환경사 해역에서 회절과 굴절을 고려한 미소진폭파의 전파는 다음 식으로 표시된다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} \sigma^2 \phi = 0 \quad (1)$$

여기서, $\phi(x, y)$ 는 정상 상태의 평균 해수면 상의 속도 포텐셜, σ 는 각주파수, $C(x, y)$ 는 파속, $C_g(x, y)$ 는 군속도이다. 그리고, k 를 파수, 수심을 h , 중력가속도를 g 라 두면, 분산방정식은 $\sigma^2 = gk \tanh kh$ 이다.

에너지 감쇠역에서는 감쇠 효과를 고려해야 하므로 $i\sigma W\phi$ 를 더해주면 다음과 같다.⁸⁾

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) + \left(\frac{C_g}{C} \sigma^2 + i\sigma W\right) \phi = 0 \quad (2)$$

여기서, W 는 감쇠계수이다. (2)식이 에너지 감쇠역에서의 환경사방정식이다. 수치기법 적용시의 편의를 위해 다음과 같이 변환된 식을 사용한다.

$$\nabla^2 \phi + K^2(x, y) \phi = 0 \quad (3)$$

여기서,

$$\phi = \Phi(CC_g)^{0.5} \quad (4)$$

$$K^2 = k^2 + \frac{i\sigma W}{CC_g} - \frac{\nabla^2 CC_g^{0.5}}{CC_g^{0.5}} \quad (5)$$

식(3)은 타원형 방정식이므로 해석 영역의 전 경계에서 조건이 주어져야 한다. 입사파를 $\phi_i = \exp(ikx)$ 라 두고 반사파를 고려하면 입사경계는

다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = iK(2\phi_j - \phi) \quad (6)$$

다른 경계들은 지형적으로 안벽, 해안선 혹은 외해가 될 것인데, 이 경우엔 다음 조건을 사용할 수 있다.⁹⁾

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - ika\phi = 0 \quad (7)$$

여기서 n 은 경계에 수직한 단위 벡터이고 a 는 반사계수이다.

3. 수치기법

Fig. 1의 격자점 (i, j) 에서의 포텐셜을 ϕ_j^i 라 할 때, 식(3)을 2차의 기법으로 차분화하면 ($\Delta x = \Delta y$),

$$\begin{aligned} &\phi_j^{i-1} + \phi_j^{i+1} + \phi_{j-1}^i + \phi_{j+1}^i \\ &+ [(K\Delta x)^2 - 4]\phi_j^i = \end{aligned} \quad (8)$$

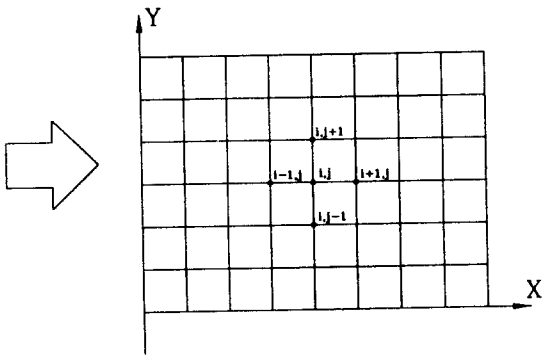


Fig. 1 Model Grid

대상 해역 전 격자점에서 위와 같은 차분식을 구성하면, 행렬로 표시되는 다음과 같은 연립방정식을 얻게 된다.

$$[A]\{\phi\} = \{f\} \quad (9)$$

여기서 $[A]$ 는 계수행렬, $\{\phi\}$ 는 미지벡터, 그리

고 $\{f\}$ 는 경계 조건의 차분화로부터 생기는 계수 벡터이다.

반복기법이 수렴하기 위해선 계수행렬 $[A]$ 의 대각 요소가 지배적이거나(diagonally dominant), 혹은 대칭이면서 양의 한정성(positive definite)을 가져야 한다. 하지만 $[A]$ 는 일반적으로 이 조건을 만족하지 못하므로 $[A]$ 의 공액전치 행렬 $[A^*]$ 를 곱하여 새 계수 행렬을 양의 정수로 만들어 준다.

$$[A^*][A]\{\phi\} = [A^*]\{f\} \quad (10)$$

식 (10)의 계수 행렬은 수렴 조건을 만족하지만 새 계수 행렬의 스펙트럼 영역이 커져 수렴 속도가 썩 빠르지는 못하므로, 다음과 같이 후술할 실행렬 $[Q]$ 를 사용하여 수렴 속도를 향상시킨 PCG (Preconditioned Conjugate Gradient)기법을 사용하였다.

$$[A']\{\phi'\} = \{f'\} \quad (11)$$

여기서,

$$[A'] = ([Q]^{-1}[A][Q]^{-T}) \quad (12)$$

$$\{\phi'\} = [Q]^{-T}\{\phi\}$$

$$\{f'\} = [Q]^{-1}\{f\}$$

식(12)에 대해 앞서처럼 Gauss 변환을 적용하면

$$[A^{**}][A']\{\phi'\} = [A^{**}]\{f'\} \quad (13)$$

식 (13)에 대해 PCG의 알고리즘은 다음과 같다.

1. 초기치 ϕ_0 를 선택
2. 오차벡터(residual vector) $\{r_0\} = [A^*][M^{-1}]\{f\} - [A]\{\phi_0\}$, 추적방향벡터(search direction vector) $\{p_0\} = [M^{-1}]\{r_0\}$ 를 계산한다.
3. i 번째 반복에서,

$$\alpha_i = \frac{\{r_i\}[M^{-1}]\{r_i\}}{[A]\{p_i\}[M^{-1}][A]\{p_i\}}$$
 를 계산한다.
4. 새로운 해 $\{\phi_{i+1}\} = \{\phi_i\} + \alpha_i\{p_i\}$ 를 구한다.
5. 수렴여부를 허용치 ϵ 에 대해 검사한다.

$$\frac{\sum |(\nabla^2 \phi + K^2 \phi)|^2}{\sum |\phi|^2} < \epsilon$$

6. 수렴조건을 만족하지 않으면 $\{p_i\}$ 에 수직 (orthogonal)하도록 새로운 오차벡터

$$\{r_{i+1}\} = \{r_i\} - \alpha_i [A^*][M^{-1}][A]\{p_i\} \text{를 계산한다.}$$

7. i 번째 반복에서,

$$\beta_i = \frac{\{r_{i+1}\}[M^{-1}]\{r_{i+1}\}}{\{r_i\}[M^{-1}]\{r_i\}} \text{를 계산한다.}$$

8. $\{r_{i+1}\}$ 을 사용해 $\{p_i\}$ 에 공액(conjugate)이 되는 새로운 추적방향벡터

$$\{p_{i+1}\} = [M^{-1}]\{r_{i+1}\} + \beta_i \{p_i\} \text{를 구한다.}$$

9. $i = i + 1$ 로 두고 3) 과정으로 돌아간다.

여기서,

$$[M] = [Q][Q^T] \text{ 혹은 } [M^{-1}] = [Q^{-T}][Q^{-1}] \quad (14)$$

실행렬 $[Q]$ 는 Axelsson 등¹⁰⁾이 제안한 다음 식을 사용한다.

$$[Q] = [(2-\omega)\omega]^{-1/2} ([D_0] + \omega[L_0])[D_0]^{-1/2} \quad (15)$$

$[D_0]$, $[L_0]$, $[U_0]$ 는 각각 행렬 $[A]$ 에서 $K = 0$ 일때의 대각 행렬 그리고 아래 위의 삼각 행렬이다. ω 는 이완계수이다.

계산 과정에서 특별한 것은 반복되는 $[M^{-1}]$ 과 다른 벡터와의 곱인데, 그 과정은 다음과 같다.

$[M^{-1}]\{r\}$ 을 $\{Y\}$ 로 표시하면 식(14), (15)로부터

$$\{Y\} = ([D_0] + \omega[U_0])^{-1} [D_0] (2-\omega) ([D_0] + \omega[L_0])^{-1} \omega \{r\} \quad (16)$$

식 (16)을 다시쓰면

$$\{Y'\} = ([D_0] + \omega[L_0])^{-1} \omega \{r\} \quad (17)$$

$$\{Y\} = ([D_0] + \omega[U_0])^{-1} [D_0] (2-\omega) \{Y'\} \quad (18)$$

그러므로, 식(16)의 계산은 두 단계로 나누어진다. 식(17)로부터,

$$\{Y'\} = [D_0]^{-1} \omega (\{r\} - [L_0] \{Y'\}) \quad (19)$$

즉, (1, 1)격자로부터 (M, N) 격자까지 다음 식을 사용해 $\{Y'\}$ 벡터를 구한다.

$$Y'(i, j) = \left(\frac{-2}{\Delta x^2} + \frac{-2}{\Delta y^2} \right)^{-1} \omega [r(i, j) - \left(\frac{Y'(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{Y'(i, j-1)}{\Delta y^2} \right)] \quad (20)$$

식(18)로부터,

$$\{Y\} = (2-\omega) \{Y'\} - [D_0]^{-1} \omega [U_0] \{Y\} \quad (21)$$

이는 역순으로 계산해 다음 식으로 Y 벡터를 결정한다.

$$Y(i, j) = (2-\omega) Y'(i, j) - \left(\frac{-2}{\Delta x^2} + \frac{-2}{\Delta y^2} \right)^{-1} \times \omega \left(\frac{Y(i+1, j)}{\Delta x^2} + \frac{Y(i, j+1)}{\Delta y^2} \right) \quad (22)$$

4. 수치실험 및 검토.

4-1. 원형감쇠역에 대한 실험

앞서 기술한 수치 기법의 적용성을 검토하기 위해 원형 감쇠역을 포함한 해역을 대상으로 하여

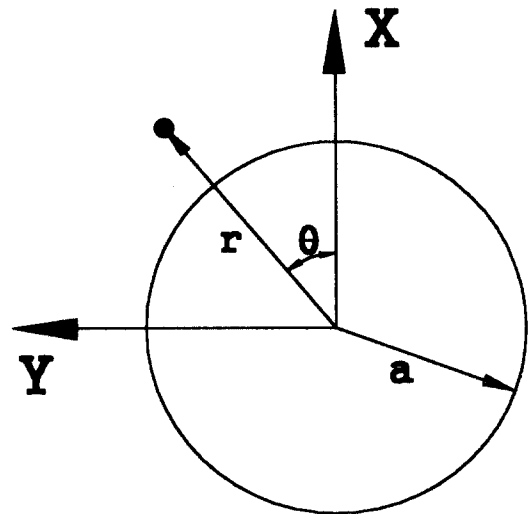


Fig. 2 Definition Sketch and Coordinates

Darlymple 등이 구한 해석해와 비교해 보았다¹¹⁾ (Fig. 2). 계산조건은 파수 $k = 0.0264 m^{-1}$, 감쇠역의 반경 $a = 476 m$, 수심 $h = 15.24 m$, 각주파수

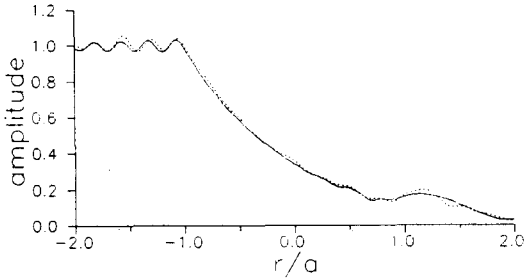


Fig. 3 Wave Amplitude Distribution along Radial Line where $\theta = 0 \rightarrow \pi$ (—Analytical Solution ; - - - Numerical Result)

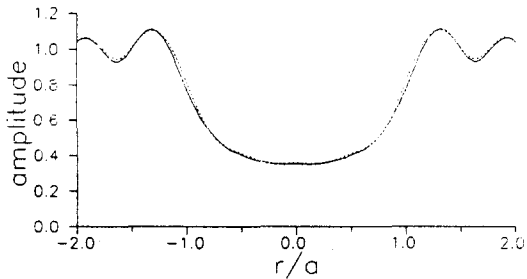


Fig. 4 Wave Amplitude Distribution along Radial Line where $\theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (—Analytical Solution ; - - - Numerical Result)

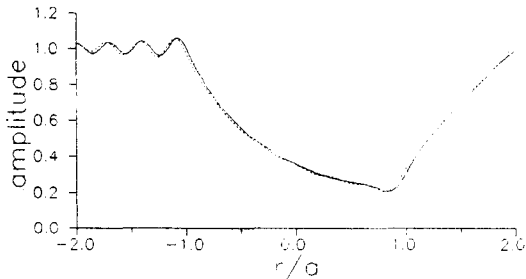


Fig. 5 Wave Amplitude Distribution along Radial Line where $\theta = -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ (—Analytical Solution ; - - - Numerical Result)

$\sigma = 0.3142 \text{ sec}^{-1}$, 감쇠계수 $W = 0.05 \text{ sec}^{-1}$ 이다. $2a \times 2a$ 의 해역에 대해 $\Delta x = \Delta y = 11.9 m$ 를 사용하였다. 계산 결과는 $\theta = 0 \rightarrow \pi$, $\theta = -\pi/2 \rightarrow \pi/2$, 그리고 $\theta = -\pi/4 \rightarrow 3\pi/4$ 선을 따라 나타내었다(Fig. 3-5). 전반적인 계산결과는 차분 오차를 고려할 때 대단히 잘 일치하는 것으로 판단된다. Fig. 3의 경우 감쇠역 전면에서 반사파가 생성되는 것을 뚜렷이 확인할 수 있고 특히 감쇠역 내부에서는 계산 결과가 매우 잘 일치한다. 하지만 감쇠역 전면의 반사파에서 약간의 진폭 및 위상 오차가 나타나고 있고 하류부에서도 약간의 부적절한 반사파가 형성됨을 볼 수 있다. 이는 Kirby¹²⁾의 지적대로 사용된 경계조건들이 경계에 경사지게 접근하는 파랑을 충분히 투과시키지 못함으로 인하여 부적절한 반사파가 내부로 전달되어 생기는 현상으로 생각된다. 감쇠역 전면 반원부에서 다양한 방향으로 반사파가 형성되고 하류부에선 회절 현상이 수반되는 복잡한 산란 과정을 생각할 때 계산 결과는 대단히 양호한 것으로 생각된다.

4-2 구형감쇠역에 대한 실험

감쇠 계수의 크기에 따른 변화 양태를 비교하고

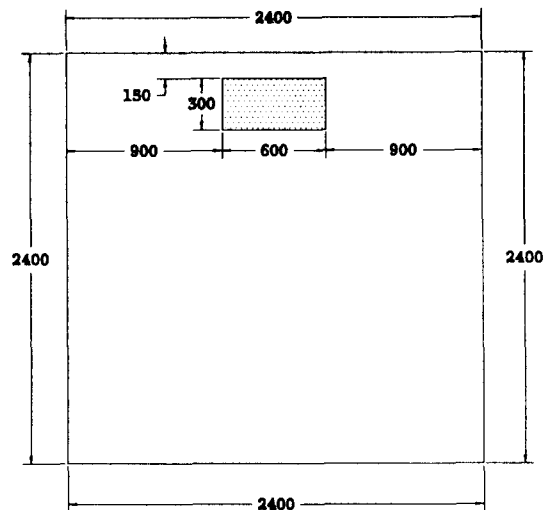


Fig. 6 Experimental Setup

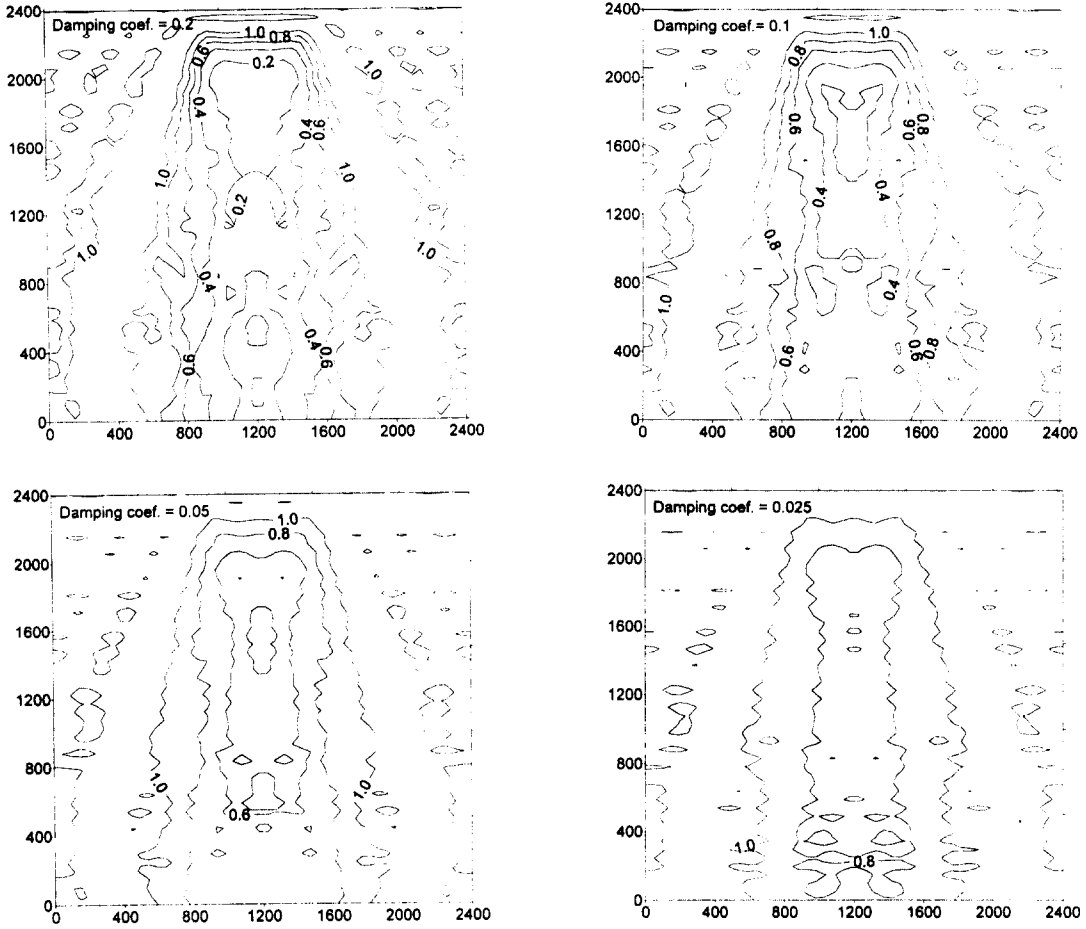


Fig. 7 Contours of Transmission Coefficient Relative to Incident Wave Amplitude

감쇠역 후면부의 회절 효과를 확인해 보기 위해 Fig. 6과 같은 대상 해역을 설정하였다. 감쇠계수 W 는 0.2, 0.1, 0.05, 0.025를 사용하였고, 파랑 조건은 파고 6.1m, 주기 20 sec에 수심 15.24m를 사용하였고, $\Delta x = \Delta y = 30m$ 를 사용하였다. 계산 결과는 입사파에 대한 파고비로 표시하였고 등고선 간격은 0.2이다 (Fig. 7). $W = 0.2$ 의 경우 수중 말뚝군 혹은 수중 수목의 강한 감쇠에 해당한다.³⁾ 감쇠계수의 크기에 따른 파고 분포의 변화가 현저하게 나타나고 감쇠역 후면에서는 감쇠역으로부터의 거리에 따라 회절 효과에 의한 파고의 복원이 매우 완만히 진행됨을 확인할 수 있다. Fig. 8은 해

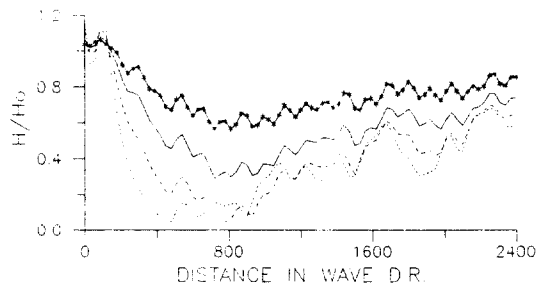


Fig. 8 Wave Amplitude Distributions along Center Line

(..... : $W = 0.2$, ---- : $W = 0.1$, — : $W = 0.05$, *-* : $W = 0.025$)

역의 중앙에서 파의 진행방향 거리에 따른 파고의 변화를 나타낸 것이다. 감쇠역 전면에서 반사파가 형성되고 감쇠역(150~450m)을 지나서도 파고의 감소가 계속되다가 800m정도에서부터 회절되어 오는 파로 인하여 파고가 완만히 증가하는 것을 볼 수 있다.

5. 결 론

에너지 감쇠역을 포함한 해역에 대하여 환경사방정식을 적용하여 해를 구하여 보았다. 타원형 방정식을 그대로 사용하였고, 수치기법은 PCGM을 사용하였다.

원형감쇠역에 대한 실험을 통하여 감쇠역 전면부에서의 반사파의 생성, 감쇠효과에 의한 파고 감소 등을 확인할 수 있었고, 해석해와 비교한 결과 매우 양호한 일치율을 보여 주었다. 하지만 감쇠역 전면의 반사파에서 약간의 위상 및 진폭 오차가 있었고 후면부에서도 약간의 부적절한 반사파가 형성되었다. 구형 감쇠역에 대한 실험을 통하여 감쇠계수의 크기에 따른 파고 분포의 변화를 살펴 보았고, 감쇠역 후면에서는 감쇠역으로부터의 거리에 따라 회절 효과에 의한 파고의 증가가 서서히 진행됨을 확인할 수 있었다.

이러한 수치실험을 통하여 에너지 감쇠구조 또한 반복기법을 사용한 타원형 수치모형으로 잘 묘사할 수 있음을 확인하였다. 추후 산란파를 충분히 투과시킬 수 있는 새로운 개방 경계조건을 개발하여 모형의 정확도를 높이고자 한다.

6. 참고문헌

- 1) Berkhoff, J.C.W., "Computation of Combined Refraction / Diffraction", Proceeding, 13th International Coastal Engineering Conference, ASCE, Vancouver, B.C., 1972.
- 2) Liu, P.L-F., "Damping of Water Waves over Porous Bed", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.99, HY12, pp. 2263-2271, 1973.
- 3) Darlymple, R.A., Kirby, J.T., and Hwang,

- P.A., "Wave Diffraction Due to Areas of Energy Dissipation", Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, Vol.110, No. 1, pp. 67-79, 1984 .
- 4) Panchang, V.G., Pearce, B.R., Wei, G. and Cushman-Roison, B., "Solusion of the Mild-slope Wave Problem by Iteration ", Applied Ocean Reserch, Vol. 13, No. 4, pp. 187-199, 1991.
- 5) 윤종태, "CGM을 이용한 환경사방정식의 수치 해석", 한국해안·해양공학회지, 5권 2호, pp. 84-90, 1993.
- 6) Ebersole, B.A., Cialone, M.A. and Prater, M.D., "Regional Coastal Processes Numerical Modeling System : Report 1 : RCPWAVE -A Linear Wave Propagation Model for Engineering Use", TR CERC-86-4., Coastal Engineering Center, WES, Vicks burg, Miss. 39180, 1986.
- 7) Panchang, V.G., Cushman-Roisin, B. and Pearce, B.R., "Combined Refraction-Diffraction of Short Waves for Large Domains", Coastal Engineering, 12, pp. 133-156, 1988.
- 8) Booij, N., "Gravity Waves on Water of Variable Depth with Non-Uniform Current " Rep. No. 81-1, Dept. of Civil Engineering, Delft Univ., Delft, The Netherlands, 1981.
- 9) Tsay, T. K. and Liu, P.L-F., "A Finite Element Model for Wave Refraction and Diffraction ", Applied Ocean Reserch, Vol. 5, No. 1, pp. 30-37, 1983.
- 10) Axelsson, O., Brinkemper, S. and Ilin, V.P., "On Some Versions of Incomplete Block-Matrix Factorization Iterative Methods", Linear Algebra and Its Aplications, Vol. 58, pp. 3-15, 1984.
- 11) Darlymple, R.A., Hwang, P.A. and Liu, P. L-F., "Water Waves and Circular Damping Regions", ASCE, Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 110, No. 2, pp. 273-276, 1984.

- 12) Kirby, J.T., " A Note on Parabolic Radiation Boundary Conditions for Elliptic Wave Calculations", Coastal Engineering, Vol. 13, pp. 211-218, 1989.
- 13) Liu, P. L-F., Yoon, S.B., Darlymple, R.A., "Wave Reflection from Energy Dissipation Region ", ASCE, Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 112, No. 6, pp. 632-645, 1986.