

## 열충격이 작용하는 취성구조의 신뢰성 평가

이 치 우\* · 장 건 익\*\* · 김 종 태\*\*\*  
(97년 9월 30일 접수)

### Reliability Evaluation of Brittle Structures Under Thermal Shocks

Chi-woo Lee\* · Kun-ik Chang\*\* · Jong-tae Kim\*\*\*

**Key Words** : Brittle Structure (취성구조), Weakest Link Hypothesis Model(최약 링크 가설 모델), Weibull Distribution (웨이블 분포), Thermal Shock (열충격), Reliability (신뢰도)

#### Abstract

An analysis method for the reliability of ceramic structures subjected to thermal shocks is presented. Flaws with the size of given probability distribution function are assumed to be distributed at random with a certain density per unit volume in the structures. Criteria for crack instability are derived for brittle solids under general thermal stresses. A probabilistic failure model is presented to study the probability of crack instability for brittle solids containing cracks with uncertain crack size. The reliabilities of brittle structures are evaluated based on the weakest-link hypothesis, which states that a structure fails when the cracks in any differential volume become unstable. A numerical example is given to demonstrate the application of the proposed method.

#### 1. 서 론

세라믹 재료는 고온 및 화학적 내성을 갖고 있지만, 재료의 기본적인 성질로 파괴되기 전에는 소성변형과 균열에 대한 저항력을 거의 갖지 않으며, 대부분의 세라믹 구조는 원래 취성이기 때문에 열충격하에서 파괴에는 대단히 민감하게 작용한다.<sup>1)</sup>

또한, 재료내에 미소결함이 불규칙하게 분포되어 있으며, 서로 다른 크기의 결함 존재로 인한 세라믹의 열응력 저항은 확률변수로서 거동하게 되므로, 세라믹으로 조립된 시스템을 설계할 때에 고려해야 할 중요 변수는 시스템의 신뢰성이라고 생각할 수 있다. 이와 같은 취성 재료에 대한 열충격 파괴 연구는 높은 인장응력, 열전도 및 열확산도와

\* 정회원, 경남대학교 공과대학 기계설계학과

\*\* 전주공업전문대학 기계과

\*\*\* 통일중공업 차축개발부

낮은 열팽창 계수, 탄성 계수, 푸아송률 및 복사로 조합되므로 파괴초기 열응력에 대한 저항이 우수한 것으로 알려져 있다.<sup>2,3)</sup>

본 연구에서는 일정 분포 열응력 하의 취성 세라믹의 열충격파괴에 대한 Hasselman<sup>4)</sup>의 파괴 기구 이론을 세라믹 구조에 작용하는 불규칙한 열응력 분포에 일반화시켜서, 일반적인 응력이 작용하는 취성체에 대한 균열의 불안정성을 평가하고, 불확실한 크기의 균열을 포함한 취성체의 파괴를 규명하기 위한 확률 파괴 모델을 제시한다. 또한, 구조에 대한 신뢰성은 어떤 시점에서 균열의 불안정으로 인하여 구조가 파괴되므로 최약링크가설모델(weakest-link hypothesis model)을 기초로 평가하고, 그 적용 예를 수치해석하여 이 방법의 유용성을 검토하였다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 열충격 파괴의 기초 이론

열충격에 의한 파괴는 열충격체 내에서 응력장으로 유도할 수 있고, 열응력에 의한 파괴는 간단한 열적 모델로 나타낼 수 있는데 강체로 구성된 모델에서 온도차  $\Delta T$ 로 인하여 일정하게 냉각되므로 이때 열응력  $\sigma$ 는

$$\sigma = \frac{\alpha E \Delta T}{1 - 2\nu} \quad (1)$$

로 주어진다. 여기서,  $\alpha$ 는 열팽창계수,  $E$ 는 영률 및  $\nu$ 는 푸아송률이다. 이 모델의 재료는 취성으로 Griffith의 미소결합의 형태는 기계적 결합이 재료 전체에 일정하게 분포된 재료로 구성된다. 불안정한 균열은 단위체적당 비슷한 수로 포함되며, 크랙의 크기는 일정하고 불안정한 점에서 방사선으로 증식하고 인접 균열의 응력장 사이에 상호작용은 없는 것으로 가정한다. 단위체적당 전에너지(total energy per unit volume)는 균열의 파괴 에너지와 소성에너지의 합으로 주어진다. 이 기계적 모델에서 작고 날카로운 균열 크기를 함유한 취성체에서 유효체적계수에 대한 방정식을 사용하면 전에너지  $W_t$ 는 다음 식(2)로 주어진다.<sup>5)</sup>

$$W_t = \frac{3}{2} \frac{(1-2\nu)\sigma^2}{E} \left[ 1 + \frac{16}{9} \frac{(1-\nu^2)NI^3}{(1-2\nu)} \right]^{-1} + 2\pi NI^2 G \quad (2)$$

여기서,  $l$ 은 균열의 크기,  $N$ 는 단위체적당 균열의 수,  $G$ 는 표면파괴에너지이다.

Griffith의 일반적 접근 방법에 따라<sup>6)</sup>

$$\frac{dW_t}{dl} = 0 \quad (3)$$

일 때 크랙이 불안정하게 된다.

식(3)에 식(2)를 대입하면, 불안정 균열에서 요구되는 임계열응력  $\sigma_{cr}$ 은

$$\sigma_{cr} = \left[ \frac{\pi G E}{2(1-\nu^2)l} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{16}{9} \frac{(1-\nu^2)NI^3}{(1-2\nu)} \right] \quad (4)$$

으로 주어진다.

식(4)를 식(1)을 대입하면 불안정 균열에 대한 임계온도차  $\Delta T_c$ 는

$$\Delta T_c = \left[ \frac{\pi G (1-2\nu)^2}{2E\alpha^2(1-\nu^2)l} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{16}{9} \frac{(1-\nu^2)NI^3}{(1-2\nu)} \right] \quad (5)$$

된다.

임계온도차와 균열 길이와 관계를 Fig. 1에 나타내었다.

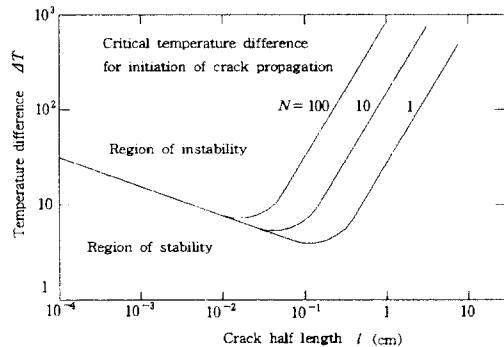


Fig. 1 Critical temperature difference vs crack half length

균열길이의 증가와 더불어 임계온도차는 균열길이의 두 값으로 경계되는 균열의 불안정지역으로

최소화 되어가는데 이 거동은 일정 하중에 대한 Griffith의 조건에 대조된다. 여기서, 불안정 균열은 균열길이의 한 값으로 경계되고, 균열의 크기가 값을 초과할 때 재료는 파괴된다. 앞에서 언급된 일정한 수직인장 열응력하의 재료에 대한 파괴역학적 이론은 일정하지 않은 수직응력의 상태에 대해서도 일반화된다. Fig. 2에서 보이는것과 같이 불균일한 수직인장응력을 받고  $N\Delta V$  균열을 포함한 취성재료에서 미소체적  $\Delta V$ 을 수직인장응력에 의한 파괴에너지만을 고려한다면 단위체적당 유효에너지  $U$ 는

$$U = \frac{1}{\Delta V} \int W_i dV \quad (6)$$

이며, 미소구(small sphere)에서 가정되는  $\Delta V$ 와 Fig 2.와 같이 미소체적  $dV$ 는

$$dV = \frac{r^3}{3} \sin \theta d\theta d\psi \quad (7)$$

식(7)을 식(6)에 대입하면 유효에너지  $U$ 는

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi W_i \sin \theta d\theta d\psi \quad (8)$$

으로 주어진다.

식(2)를 식(8)에 대입하고  $\sigma$ 를 법선응력  $\sigma_n$ 으로 치환하면 유효에너지  $U$ 는

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{3}{2} \frac{(1-2\nu)\sigma_n^2}{E} \left[ 1 + \frac{16}{9} \frac{(1-\nu^2)Nl^3}{(1-2\nu)} + 2\pi NGl^2 \right] \sin \theta d\theta d\psi \right\}^{-1} \quad (9)$$

위의 식에서 불균일한 법선응력  $\sigma_n$ 가 단위체적당 전에너지가 등가수직응력  $\bar{\sigma}$ 로 될 때 미소체적에 대한 균열안정의 기준은 등가수직응력  $\bar{\sigma}$ 을 구하면 미소체적에 대한 균열 안정의 기준이 된다. 즉, 식(2)와 식(9)에 주어진 등가수직응력  $\bar{\sigma}$ 은

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_n^2 \sin \theta d\theta d\psi \quad (10)$$

으로 된다.

위 식(10)에서 법선응력  $\sigma_n$ 은 적분계산에서 0으로 주어진다. 미소체적에 대한 파괴는 주어진  $N$

과  $l$ 의 값이 식(4)에서  $\sigma_{cr}$ 의 극한값이  $\bar{\sigma}$ 에 도달할 때 파괴가 일어난다.

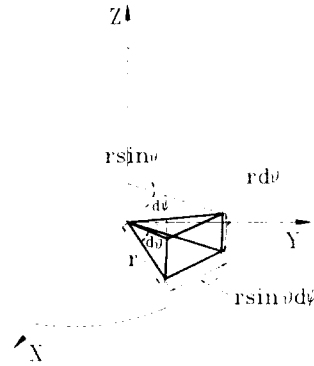


Fig. 2 Differential volume of a small sphere

## 2.2 Weibull 해석 이론

강도를 예측하기 위하여 널리 사용되는 확률밀도함수  $f(x)$ 는 다음의 3종류가 있다.

### ○ 정규확률분포

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty < x < \infty \quad (11)$$

### ○ 대수정규확률분포

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty < x < \infty \quad (12)$$

### ○ Weibull 확률분포

$$f(x) = \frac{m}{\eta} \left( \frac{x-r}{\eta} \right)^{m-1} \exp \left[ -\left( \frac{x-r}{\eta} \right)^m \right], \quad x > 0 \quad (13)$$

여기서,  $\mu$ 는 평균치(mean value),  $\sigma$ 는 표준편차(standard deviation),  $\eta$ 는 척도모수(scale parameter),  $m$ 은 형상모수(shape parameter),  $r$ 는 위치모수(location parameter)이다.

Weibull 확률분포<sup>7)</sup>는 Weibull에 의하여 재료의 파괴강도의 분포형으로 제안된 것으로 기계·구조계분야의 응용에 사용되는 것으로 형상모수에 의하여 분포의 형상이 변화하므로 여러 데이터에 대하여 표준으로 되는므로 본 연구에서는 위의 확률

분포중에서 가장 적합한 Weibull 확률분포로 하여 해석하였다. 여기서 재료는 등방성이며 재료내의 임의의 미소체적내에서 주어진 가혹한 정도의 결함을 발견할 확률이 전체 체적에서 동일하며 재료는 링크의 일렬 연속으로 보고 파손을 최약링크의 개념으로 보는 즉 임의의 결함에서 파손이 전체 파손을 일으킨다고 가정할 수 있다.

$N$ 개의 결함을  $N$ 개의 링크로 나타내면 응력  $\sigma$ 에 의한 파손확률  $F_N(\sigma)$ 은

$$F_N(\sigma) = 1 - [1 - F_1(\sigma)]^N \quad (14)$$

이다.

링크의 갯수  $N$ 은 체적  $V$ 에 비례하므로 단순인장하에서 파손확률  $P_f$ 는

$$P_f = 1 - \exp \left[ 1 - V \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m \right], \quad \sigma > \sigma_u \quad (15)$$

$$P_f = 0 \quad \sigma \leq \sigma_u$$

로 주어진다. 여기서,  $\sigma_u$ 는 하중이 작용하여 파손확률이 0을 유지할 때의 최대응력이고 일반적으로 취성재료에서는  $\sigma_u = 0$ 이다.  $\sigma_0$ 는 표준인자이고,  $m$ 은 형상모수으로써 재료특성상수이며 물리적 의미는 이 값이 작을 수록 재료는 취성이다.

그러므로, 취성재료에서  $\sigma_u = 0$ 이므로 식(15)에서 평균강도  $\bar{\sigma}$ 는

$$\bar{\sigma} = \int_0^{\infty} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m V \right] d\sigma \quad (16)$$

$$= \frac{\sigma}{V^{1/m}} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{m} \right)$$

으로 주어진다. 여기서,  $\Gamma(\cdot)$ 는 감마 함수 (Gamma function)이다.

### 3. 취성 구조의 신뢰성 평가

취성 구조의 신뢰성 평가는 이미 설명한 바와 같이 최약링크가설 모델을 기초로한 파손모델을 사용한다. 즉, 미소체적에 일정한 등가법선응력이 균열의 불안정한 위험치로 될 때 그 구조는 파괴될 것이며, 확률분포의 크기로 결함을 가정한다.  $f_L(l)$ 은 구조에서 구성 재료의 단위 체적당 결함으로 일정하게 분포된다. 등가수직응력  $\bar{\sigma}$ 하의 단

위체적당 파손을 고려한다.  $\bar{\sigma}$ 가 위험치  $\sigma_{cr}(l)$ 로 될 때 단위체적은 파괴되므로 상당파손확률  $P_f$ 은

$$P_f(V=1, l) = f_L(l) dl \quad (17)$$

으로 주어진다.

체적 내에서 균열크기를 확률분포로 고려하여 단위체적당 파손 확률을 파손율(failure intensity)  $\lambda$ 로 정의할 때

$$\lambda = P_f(V=1) \quad (18a)$$

또는

$$\lambda = \int_{l_1}^{l_2} f_L(l) dl \quad (18b)$$

이다.

위 식(18b)에서 적분의 상,하한계  $l_1$ 과  $l_2$ 는  $\bar{\sigma}$ 를  $\sigma_{cr}$ 로 치환시키면 식(4)에 의해 결정된다.

등가수직응력  $\bar{\sigma}$ 의 작용하에서 미소체적  $dV$ 라 하면, 파단위험  $S(dV, \bar{\sigma})$ 는

$$S(dV, \bar{\sigma}) = \lambda dV = dV \int_{l_1}^{l_2} f_L(l) dl \quad (19)$$

으로 주어진다.

동일한 등가수직응력이 작용하는 미소체적  $\Delta V$ 의 파괴확률은 다음 식(20a)에서 구할 수 있다.

$$\frac{dP(\Delta V)}{dV} = \lambda [1 - P(\Delta V)] \quad (20a)$$

이때,  $\Delta V = 0$ 인 상태에서는

$$P(0) = 0 \quad (20b)$$

이므로, 이 식의 해는

$$P(\Delta V) = 1 - e^{-\lambda \Delta V} \quad (21)$$

미소체적에 대한 신뢰도  $P_s(\Delta V)$ 는

$$P_s(\Delta V) = e^{-S(\Delta V)} \quad (22a)$$

여기서 파단위험  $S(\Delta V)$ 은

$$S(\Delta V) = \lambda \Delta V \quad (22b)$$

이다.

최약링크가설모델에 의해 전체체적  $V$ 에 대한 구조의 신뢰성  $P_s(V)$ 은

$$P_s(V) = \prod P_s(\Delta V) \quad (23)$$

로 주어진다.

이것은 미소체적  $\Delta V$ 의 곱으로 주어진 것이며, 식(21)에 식(22)를 대입하면 다음 식(24a)와 같다.

$$P_s(V) = \exp[-S(V)] \quad (24a)$$

취성구조에 대한 파단위험  $S(V)$ 는

$$S(V) = \int_V \lambda dV \quad (24b)$$

로 주어진다.

일반적으로 구조가  $N$ 개의 요소로 구성되고 수치적분이 각 요소의 체적으로 주어진다면, 이때 식(24b)는 다음 식(25)로 나타낼 수 있다.

$$S(V) = \sum_{k=1}^N V_k \sum_{i=1}^M E_i \lambda_i \quad (25)$$

여기서,  $M$ 은 요소에서 적분점의 수,  $E_i$ 는 Integration weight,  $V_k$ 는 요소의 체적이다.

### 4. 적용 예 및 결과

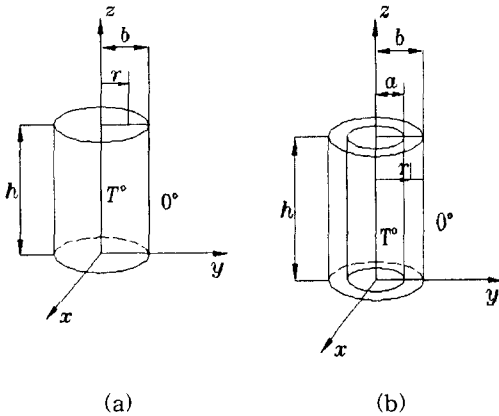


Fig. 3 Circular cylinder(a) and solid beam(b) in thermal shocks

#### 4.1 중공 원통의 열응력

내·외반경이  $a, b$ 인 중공원통에서  $T_i$ 를 원통 내면의 온도로 하고 외면의 온도를  $0^\circ$ 로 하면 중심에서  $r$ 만큼 떨어진 곳에서의 온도  $T$ 는 다음 식(26)으로 주어진다.<sup>8)</sup>

$$T = \frac{T_i}{\log(b/a)} \log \frac{b}{r} \quad (26)$$

또한, 열응력은 다음 식(27)로 주어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)\log(b/a)} \left[ -\log \frac{b}{r} - \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \log \frac{b}{a} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)\log(b/a)} \left[ 1 - \log \frac{b}{r} - \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \log \frac{b}{a} \right] \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)\log(b/a)} \left[ 1 - 2\log \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{(b^2-a^2)} \log \frac{b}{a} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

#### 4.2 중실원주의 비정상 열응력

최초온도  $T_0$ 인 원주가 시간  $t=0$ 의 순간에서 원주측면이 급히  $0^\circ$ 으로 냉각시키면 시간  $t$ 에 대해 온도분포  $T$ 는

$$T = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\beta_n \frac{r}{b}\right) e^{-\beta_n t} \quad (28)$$

으로 주어진다.

여기서,  $J_0(\beta_n \cdot r/b)$ 는 0차의 Bessel함수이고,  $\beta_n$ 은  $J_0(\beta) = 0$ 의 근이다. 식(28)의 급수의 계수  $A_n$ 과  $\beta_n$ 은 각각 다음의 식으로 표현된다.

$$A_n = \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)}, \quad \beta_n = \frac{\lambda_i}{c \rho} \cdot \frac{\beta_n^2}{b^2}$$

또한, 열응력<sup>9)</sup>은 식(29)로 주어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2\alpha E T_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} - \frac{1}{\beta_n^2} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{J_1\left[\beta_n\left(\frac{r}{b}\right)\right]}{J_1(\beta_n)} \right\} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\alpha E T_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n^2} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{J_1\left[\beta_n\left(\frac{r}{b}\right)\right]}{J_1(\beta_n)} - \frac{J_0\left[\beta_n\left(\frac{r}{b}\right)\right]}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\alpha E T_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ \frac{2}{\beta_n^2} - \frac{J_0\left[\beta_n\left(\frac{r}{b}\right)\right]}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

한점에서의 법선응력  $\sigma_n$ 은

$$\sigma_n = \sigma_r \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \sigma_\theta \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sigma_z \cos^2 \theta \quad (30)$$

으로 나타낼 수 있으며, 미소체적에 대한 법선응력  $\sigma_n$  을 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_n = \left[ \frac{1}{5}(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2) + \frac{2}{15}(\sigma_r\sigma_z + \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_r\sigma_\theta) \right]^{1/2} \quad (31)$$

Table 1 Material properties

Young's modulus	$E = 3.7 \times 10^7 \text{ kg/cm}^2$
Poisson's ratio	$\nu = 0.25$
Surface fracture energy	$G = 1.2 \text{ N/cm}$
Coefficient of thermal expansion	$\alpha = 7.7 \times 10^6$

Table 2 Geometrical data

circular cylinder		
$h$	$b$	$a$
20 cm	10 cm	5 cm
solid beam		
$h$	$b$	
20 cm	20 cm	

Table 3 Distribution of crack size

mean value	$\bar{L} = 3 \times 10^{-7} \text{ cm}$
variance	$Var_L = 1.8 \times 10^{-13} \text{ cm}^2$

본 연구에 사용한 기본입력변수로는 Table 1에 나타낸바와 같이 탄성계수  $E$ , 열팽창계수  $\alpha$ , 푸아송비  $\nu$ , 표면파괴에너지  $G$ 이고 Table 2에서는 수치해석에 사용할 모델의 형상데이터이다.

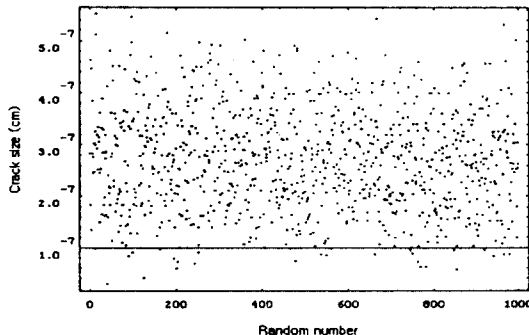


Fig. 4 Random variable of crack size

균열은 Weibull확률분포로 가정하여 Fig. 4와 같이 난수를 발생시켜 구한 결과 Fig. 5와 같으며 Table 3 은 균열의 평균길이와 그의 분산치를 나타내고 있다. 이때 형상모수  $m = 3$ , 척도모수  $\eta = 3 \times 10^{-6}$ 이다.

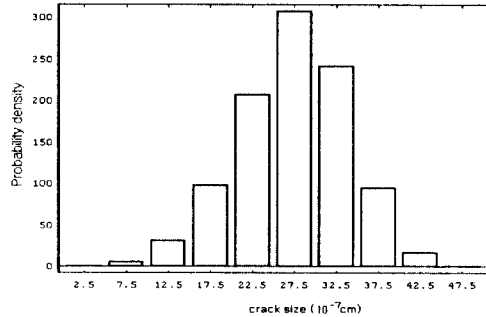


Fig. 5 Distribution of random crack

랜덤한 균열 크기로 인하여 파단응력은 확률분포로 주어지며 파단응력분포를 나타내면 Fig. 6과 같이 분포하게 된다.

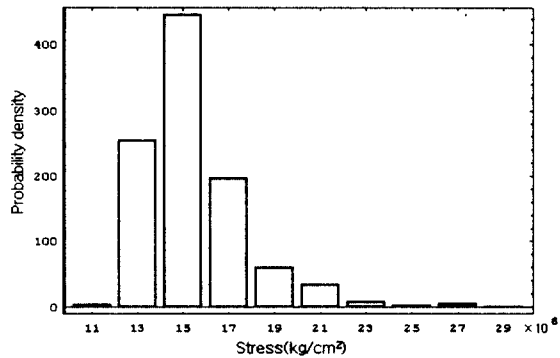


Fig. 6 Distribution of criterion stress

파단응력의 확률밀도함수는 최소자승법에 의하여 각 모수를 추정하면 형상모수  $m = 9$ , 척도모수  $\eta = 1.5 \times 10^7$ , 평균응력은  $2.4 \times 10^7 \text{ (kg/cm}^2)$ 이다.

이상의 결과에서 2모수 Weibull확률분포에 의하여 신뢰도를 계산한 결과 Fig. 7과 같이 중공원통의 경우 온도차  $\Delta T$ 가 약  $350^\circ\text{C}$ 까지 0.9의 신뢰도

를 유지함을 알 수 있으며 Fig. 8에서는 중실원주의 경우 온도차  $\Delta T$ 가 약 450°C 까지 0.9의 신뢰도를 나타내었다.

불확실한 크기의 크랙을 포함한 취성체의 파괴 규명에 응용할 수 있다.

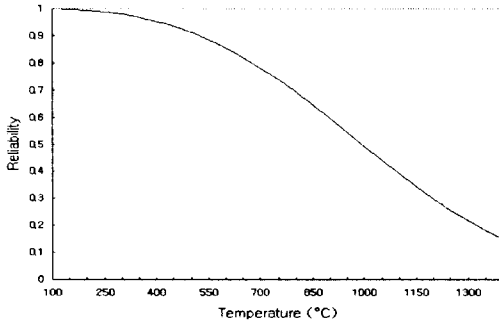


Fig. 7 Reliability of circular cylinder

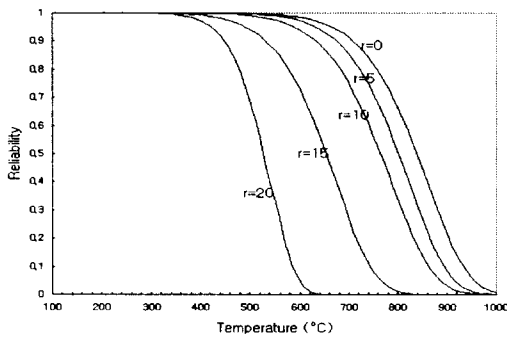


Fig. 8 Reliability of solid beam

## 5. 결 론

취성재료로 구성된 열 시스템의 어떤 형식에도 일반적으로 적용할 수 있는 최약링크가설모델을 기초로 하여 열충격을 받는 취성구조에 대한 신뢰성의 평가 방법을 제시하였다. 이 방법은 일반적인 열응력하의 취성체에 대한 크랙 불안정의 기준과

## 참 고 문 헌

- 1) W. D. Kingery, Factors affecting thermal shock resistance of ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.* 38, 3-15 (1955).
- 2) D. P. H. Hasselman, Thermal shock by radiation heating. *J. Am. Ceram. Soc.* 46, 229-234 (1963).
- 3) D. P. H. Hasselman, Elastic energy at fracture and surface energy as design criteria for thermal shock. *J. Am. Ceram. Soc.* 46, 535-540 (1963).
- 4) D. P. H. Hasselman, Unified theory of thermal shock fracture initiation and crack propagation in brittle ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.* 52, 600-604 (1969).
- 5) J. B. Walsh, Effects of cracks on the compressibility of rock. *J. Geophys. Res.* 70, 381-389 (1965)
- 6) T. L. Anderson, Fracture Meahatics Fundamentals and Application 36~38. CRC press (1995)
- 7) E. J. Henley and H. Kumanoto, Reliability Engineering and Risk Assessment, pp. 205-206. Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1984).
- 8) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3rd edn, Chapter 13. McGraw-Hill, New York (1970)
- 9) 竹内洋-; 熱應力, pp. 129. 日新出版 (1981)