

전방추적법에 의한 오염물질의 전송 모델 A Pollutant Transport Model by the Forward-Tracking Method

이 정 렬*

Jung Lyul Lee*

요 旨 : 본 연구에서 제안하는 혼합 방법(hybrid method)은 흐름이 우세한 영역에서의 전송 문제를 정확하고 효과적으로 해결하기 위하여 개발된 것으로 오일러-라그랑쥐적 방법과는 달리 전방추적에 의하여 이송 과정이 수행되므로 보간 기법이 불필요하고 무작위 행보에 의한 라그랑쥐적 방법과 달리 유한 차분법에 의하여 확산 과정이 수행되므로 많은 입자가 요구되지도 않는다. 한 점에 순간적으로 부하되는 오염원과 연속적으로 부하되는 오염원에 대한 이론적인 해와 비교하여 확산 계수와 무관하게 상당히 만족할 만한 결과를 얻었다. 현 방법은 또한 2차원 상에서 주변 5격자로부터 보간하는 오일러-라그랑쥐적 방법과 무작위 행보로 입자 추적하는 순수 라그랑쥐적 방법과 비교하여 정확성은 물론 계산 시간에 있어서도 상당히 월등한 방법임이 입증되었다.

핵심용어 : 오염물질 전송, 전방추적법, 농도, 흐름 우세 전송, 이송 및 확산, 오일러-라그랑쥐적, 무작위 행보법

Abstract □ In this study a new hybrid method is developed for solving flow-dominated transport problems accurately and effectively. The method takes the forward-tracking particle method for advection. However, differently from the random-walk Lagrangian approach it solves the diffusion process on the fixed Eulerian grids. Therefore, neither any interpolating algorithm nor a large enough number of particles is required. The method was successfully examined for both cases of instantaneous and continuous sources released at a point. Comparison with a surrounding 5-point Hermite polynomial method (Eulerian-Lagrangian method) and the random-walk pure Lagrangian method shows that the present method is superior in result accuracy and time-saving ability.

Keywords : pollutant transport, forward-tracking method, concentration, flow-dominated transport, advection and diffusion, Eulerian-Lagrangian method, random-walk method

1. 서 론

산업사회에 대한 의존도가 커짐에 따라 당면한 사회의 가장 중요한 문제 중 하나는 다양한 오염원으로부터 하구 및 해안이 심하게 오염되어가고 있다는 것이다. 따라서 최근에 흐름이 우세한 유역에서의 이송 및 확산 모델에 대한 수치상의 상당한 진전이 있었으나 아직 모델간의 특징에 따라서 이송 또는 확산 처리능력에 단편적인 우월성을 발휘할 뿐 두 과정 모두를 효과적으로 다루지 못하고 있다. 이를테면 무작위 행보(random walk)에 의한 라그랑쥐적(Lagrangian) 모델은 이송이 우월한 지역에서 상당히 효과적이지만 확산이 우월한 지

역에서는 많은 오염 입자가 동원되어야 정확도를 확보할 수 있다는 문제점을 안고 있으며, 오일러적(Eulerian) 모델은 확산처리에는 뛰어난 능력을 갖고 있지만 이송의 처리에 따른 수치 진동(oscillation) 및 수치 확산(numerical diffusion)이 일어나거나 또는 상위 보간(higher interpolation)을 취해야 하는 문제점을 안고 있다.

대표적인 오일러적 방법은 Leonard(1979)에 의해 제안된 QUICKEST(Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematic with Estimated Streaming Terms)이다. 오일러적 방법과 라그랑쥐적 방법을 결합한 Eulerian-Lagrangian 방법이 최근 많이 적용되는 데 이 방법은 수치진동(oscillation)과 수치 확산(numerical dif-

*성균관대학교 토목공학과 (Department of Civil Engineering, Sung Kyun Kwan University, Suwon Science Campus, Suwon 446-746, Korea)

fusion)을 줄여 높은 정확성을 제공하는 것으로 증명되었다. 그러나, 이런 정확성을 보장받기 위해서는 상위 보간 알고리즘이 요구되는 데 그에 상응하여 계산시간이 더 요구된다는 문제점을 안고 있다. 특히 하구와 같이 2차원적인 문제에 적용하는 경우는 그 문제가 더욱 심각해진다. 이런 형태의 방법은 이송 과정은 특성 곡선을 따라 라그랑주적 접근법에 의해 처리되고, 확산 과정은 오일러적 격자상에서 처리되는 방법을 사용한다. 이송에 대한 이러한 라그랑주적 접근법은 보통 FPTM(Forward Particle Tracking Method, Garder *et al.*, 1964; Dimou and Adams, 1991)나 RPTM(single-step Reverse Particle Tracking Method, Holly and Preissmann, 1977; 전·이, 1994; 서·김, 1995)를 사용한다. RPTM은 알고 있는 주위의 격자점의 값을 사용하여 격자점 사이의 미지 값을 계산하는 보간이 필요하고, FPTM은 농도 전방 추적, 단일 단계 전방 추적, 단일 단계 후방 추적, 유한 차분/요소 근사법 등 약간 복잡한 4개의 연속 단계를 요구한다.

본 연구에서는 오염물질의 이송 및 확산에 대한 새로운 혼합 방법(hybrid method)을 제안하는 데 수치계산이 빠르고 결과가 정확하며 흐름이 우세한 지역에서도 적용 능력이 탁월하다. 이 방법은 할당된 입자가 계속적으로 전방으로 움직이므로 정확한 이송 과정의 예측이 가능하고 보간 기법으로 인한 계산상의 지연이 없다는 장점을 갖고 있다. 이런 점에서 무작위 행보법에 의한 라그랑주적 방법(Lee and Wang, 1994; Lee, 1994)과 유사하나 확산 과정의 모의가 수많은 입자를 통하여 이루어지는 것이 아니라 고정된 오일러적 격자 체계에서 유한 차분법을 통하여 수행된다는 점에서 차이가 있다. 따라서 농도를 갖고 있는 격자에서 격자당 한 개 정도의 입자가 투여되어도 이송 및 확산 과정을 충분히 모의할 수 있다. 4개의 연속적인 단계를 요구하는 FPTM과는 다르게 현 방법은 이송 및 확산 과정에 따른 전방 추적 및 유한 차분의 2가지 단계만을 요구한다. 본 연구에서 제안되는 방법은 대표적인 다른 2가지 방법과 비교되는 데 하나는 2차원 상에서 주변 5격자로부터 Hermite 보간 기법으로 보간하는 RPTM의 오일러-라그랑주적 방법이고 다른 하나는 무작위 행보로 입자추적하는 순수 라그랑주적 방법이다.

2. 이송 및 확산 방정식

오염물질의 이송 및 확산은 다음 식 (1)에 주어진 오

염물질의 농도 C 에 대한 3차원적 보존 방정식을 통하여 해석된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (1)$$

여기서 C 는 농도; K_x, K_y, K_z 그리고 u, v, w 는 각각 x, y, z 방향의 확산 계수(diffusion coefficient)와 평균 유속이다. 수직 방향에 대하여 농도 및 유속의 변화가 무시할 만 하다면 3차원 방정식의 직접적인 해석보다는 수심적분을 취한 2차원 방정식을 통한 해석이 효율적이다. 식 (1)을 수심에 대하여 적분하여 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int C dz + \frac{\partial}{\partial x} \int u C dz + \frac{\partial}{\partial y} \int v C dz = \frac{\partial}{\partial x} \int K_x \frac{\partial C}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int K_y \frac{\partial C}{\partial y} dz \quad (2)$$

수심 평균 농도 \bar{C} 를 도입하여 식 (2)를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) \quad (3)$$

윗 식이 오염물질의 전송을 해석하는 지배 방정식이다. 이 후부터 수심 평균 유속 (\bar{u}, \bar{v})와 농도 \bar{C} 의 기호 ‘ $\bar{\quad}$ ’를 생략한다. 오염물질 전송의 물리적 현상에서 이송과 확산은 동시에 일어나는 과정이지만 본 연구에서는 별개의 연속적인 과정이라는 인식 하에 단계분리법(fractional step method) 또는 연산자 분리법(split operator approach)으로 이송-확산 방정식의 수치해석이 이루어진다.

3. 접근 방법 및 수치해석

본 연구에서 제안되는 방법은 기존의 타 방법과는 달리 흐름이 우월한 지역에서의 이송 및 확산 문제에 대해서도 빠른 수치계산은 물론 정확한 해를 제공할 수 있다. 이 방법은 후방 추적이 아닌 연속적인 전방

추적으로 농도 입자의 이송 과정을 충실히 이행하며 확산 과정으로 인한 각 입자의 농도 변화 예측을 위하여 서로간의 연계가 필요하다. 이런 과정에서, 농도의 확산은 선형성(linearity)에 기초를 두어 격자 내에 위치한 입자들의 위치를 격자의 중앙에 위치하는 것으로 일시 가정 한 후에 유한차분법으로 계산한 후 다시 원 위치로 할당하는 방법을 시도한다. 이송 과정에서 보 간을 취하는 방법보다 간편하며 계산 결과로 보아 상당한 정확성이 확인되었다. 다음은 이 접근법의 계산 과정을 간략하게 정리한 것이다.

- 1) 전방 추적에 의한 입자의 이동으로 이송 단계 수행,
- 2) 격자의 중앙으로 각 입자의 농도 할당,
- 3) 음해 유한차분법에 의한 확산 단계 수행,
- 4) 확산 효과를 반영한 농도를 입자의 원 위치로 재 할당,
- 5) 농도가 새롭게 확산된 격자에서는 새 입자를 중앙에 배치.

확산 없이 이송되는 경우에는 1번 단계만 필요하고 이송없이 확산되는 경우에는 3번 단계만이 요구된다. 좀 더 세세한 내용이 부록 A에 제시된 흐름도(flow chart)에 언급되었다.

식 (3)은 단계분리법에 의해서 다음과 같이 이송 및 확산의 2가지 독립과정으로 분류될 수 있다. 본 연구에서는 이송 후에 확산 과정을 두었으나 확산 후에 이송 과정을 두어도 무방하다. 단 나중에 수행되는 과정은 전에 수행된 과정에서 얻어진 결과를 기초로 해석된다.

이송단계(advection step) :

이송 과정은 언급된 바와 같이 후향 추적(backward-tracking)이 아닌 전향 추적 특성곡선법(forward-tracking method of characteristics)으로 처리된다.

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{C}}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

여기서 \hat{C} 는 이송 과정만에 의한 농도를 의미한다.

확산단계(diffusion step) :

확산과정은 일단 이송과정이 끝난 후 다음 방정식에 의하여 해석될 수 있으며 음해법의 유한차분법으로 수치계산된다.

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial \tilde{C}}{\partial y} \tag{5}$$

여기서 \tilde{C} 는 확산 과정만에 의한 농도를 의미한다.

3.1 이송단계의 수치해석

식 (4)는 물질 도함수로 다음과 같이 표현될 수 있으며 특성곡선법에 의하여 수치해석 된다. 이송이 우월한 흐름 또는 확산 계수가 작은 영역에서 수치확산(numerical diffusion)을 제거하는 방법으로 토사와 같이 확산 거동이 적고 흐름의 영향력이 우세한 경우에 적용성이 우수하다.

$$\frac{d\hat{C}}{dt} = 0 \tag{6}$$

윗 식은 이송항의 영향으로 특성곡선을 따라 \hat{C} 가 일정하게 이동된다는 것을 의미한다. 시간단계 n에서 지점 P_1 에 위치한 입자는 흐름에 의해서 농도 \hat{C} 의 변화 없이 Δt 시간 후 시간단계 n+1에서 지점 P_2 로 이동되며 FDM으로 해석하는 확산항을 풀기 위하여 임의의 위치에 있는 입자는 확산 과정의 선형성에 입각하여 그 입자가 위치한 격자의 중앙에서 처리된 후 다시 원 위치로 할당되게 된다. 따라서 격자계(grid system)내의 임의의 지점 P_2 에서의 \hat{C} 는 주변 격자 값으로부터 매시간 보간되는 보간기법의 사용없이 연속적으로 전방 이동된다. 시간단계 n+1에서의 위치를 파악하기 위하여 다음 식이 사용된다.

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{7}$$

여기서 공간 좌표벡터 x의 성분은 (x,y) 이며, 유속 벡터 u의 성분은 (u,v) 이다. 따라서 현단계에서 입자 p의 격자 위치 (x_p^n, y_p^n) 로부터 다음 시간 단계의 위치 (x_p^{n+1}, y_p^{n+1}) 를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$x_p^{n+1} = x_p^n + u_{ij}^n \Delta t \quad y_p^{n+1} = y_p^n + v_{ij}^n \Delta t \tag{8}$$

확산 및 전과과정의 수치해석은 음해법을 사용하므로 시간 간 폭 Δt 를 크게 할 수 있지만 가능한 한 정확한 특성곡선의 추적을 위하여 보다 작은 내부 시간 간 폭 δt 를 사용하면 식 (8)은 다음과 같이 된다.

$$x_p^{n+1} = x_p^n + \sum_k u_k^n \delta t \quad y_p^{n+1} = y_p^n + \sum_k v_k^n \delta t \tag{9}$$

여기서 $\delta t = \Delta t/m$ 이다. 적어도 한 격자당 2-3개의 추적이 가능하도록 δt 를 정하는 것이 바람직하다. 추적된 위치가 유동장을 벗어나 육지영역으로 이동한 경우, 그 위치는 mirror image 기법에 따라 다시 유동장

안으로 반사처리되고 개방경계를 벗어나는 경우는 고려대상에서 제외한다.

이와 같이 이송과정에 의하여 계산된 \hat{C} 는 시간 단계 $n+1$ 에서 위치 (x_p, y_p) 에 위치한 입자가 갖는 농도로 다음과 같은 표현된다고 하자.

$$\hat{C}_p^{n+1} = \hat{C}(x_p^{n+1}, y_p^{n+1}) \quad (10)$$

만약 초기 시간 단계($n=1$)에서 격자 ij 에 오염물질이 M 만큼 배출되었다면 그 격자를 대표하여 한 개의 입자가 방출되어 오염물질 M 을 떠맡게 되는 데 그 농도는 다음과 같이 설정된다.

$$\hat{C}_p^1 = \frac{M_{ij}}{\Delta x \Delta y} \quad (11)$$

무작위 행보법에서는 확산 과정의 정확한 모의를 위하여 한 격자당 수 십개 이상의 입자가 요구되지만 본 연구에서 제안하는 방법에서는 확산 과정을 유한 차분법에 의존하므로 한 격자당 한 개의 입자도 가능하다. 여기서 농도 C 위의 기호 ' $\hat{\cdot}$ '는 이송 단계만에 의한 농도를 의미하므로 확산 단계의 계산을 위하여 각 입자가 위치한 격자를 파악하여 다음과 같이 격자 중앙의 값으로 일시 집산한 후 유한 차분법을 이용하여 확산단계 계산이 수행된다.

$$\hat{C}_{ij} = \sum_{k_p}^{N_p} H_{ij} \hat{C}_p \quad (12)$$

여기서 N_p 는 계산영역 내 방출된 총 농도 입자의 수이고 H_{ij} 는 입자 위치 (x_p, y_p) 가 격자 ij 내에 위치할 때 1의 값을 갖고 그 외에는 0의 값을 갖는 함수이다.

3.2 확산단계의 수치해석

오염물질의 이송 및 확산 모델의 확산단계 수치해석법은 ADI(Alternating Direction Implicit) 방법으로 수치 계산된다. 식 (5)는 음해 계수 α 를 도입하고 K_x 와 K_y 를 K 로 같다고 보면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \tilde{C}_{ij}^{n+1}}{\Delta t} - \alpha K (D_{xx} \Delta \tilde{C} + D_{yy} \Delta \tilde{C})_{ij}^{n+1} \\ & - K (D_{xx} \hat{C} + D_{yy} \hat{C})_{ij}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $\Delta \tilde{C}_{ij}^{n+1} = C_{ij}^{n+1} - \hat{C}_{ij}^{n+1}$ 을 의미하며 D_{xx} 와 D_{yy} 는 표준 중앙차분 연산자로서 각각 $\partial^2/\partial x^2$ 와 $\partial^2/\partial y^2$ 를

근사처리하는 것으로 유한차분기법을 통하여 얻어진 다. $\Delta \tilde{C}$ 로 정리하면

$$\begin{aligned} & [1 - \Delta t \alpha K (D_{xx} + D_{yy})] \Delta \tilde{C}_{ij}^{n+1} \\ & = \Delta t K (D_{xx} \hat{C} + D_{yy} \hat{C})_{ij}^{n+1} \end{aligned} \quad (14)$$

ADI 기법은 식 (14)가 근사적으로 다음 두 1차원적인 연산자의 곱으로 표현될 수 있다는 사실에 근거한다.

$$\begin{aligned} & [1 - \Delta t \alpha K D_{xx}] [1 - \Delta t \alpha K D_{yy}] \Delta \tilde{C}_{ij}^{n+1} \\ & = \Delta t K (D_{xx} \hat{C} + D_{yy} \hat{C})_{ij}^{n+1} \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)는 각 방향에 대하여 다음과 같이 분류될 수 있다

$$\begin{aligned} & [1 - \Delta t \alpha K D_{xx}] \Delta \tilde{C}_{ij}^{*n+1} \\ & = \Delta t K (D_{xx} \hat{C} + D_{yy} \hat{C})_{ij}^{n+1} \end{aligned} \quad (16)$$

$$[1 - \Delta t \alpha K D_{yy}] \Delta \tilde{C}_{ij}^{*n+1} = \Delta \tilde{C}_{ij}^{*n+1} \quad (17)$$

우변의 값들은 기지값인 반면 좌변은 미지값으로 매트릭스를 형성하여 해석된다. 만약 $\alpha \geq 1/2$ 이라면 선형적인 경우 이 기법은 무조건 안정적이다. 본 연구에서는 1의 값을 사용하여 완전 음해법(fully implicit method)을 적용한다. 농도 C 위의 기호 ' \sim '는 이송 단계의 계산 결과인 \hat{C} 로부터 최종 계산되는 농도 C 를 의미하므로 식 (16)과 (17)은 유한차분법에 의하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & C_{ij}^{*n+1} - \Delta t \alpha K D_{xx} C_{ij}^{*n+1} \\ & = \hat{C}_{ij}^{n+1} + \Delta t K [(1 - \alpha) D_{xx} \hat{C}_{ij}^{n+1} + D_{xx} \hat{C}_{ij}^{n+1}] \end{aligned} \quad (17)$$

$$C_{ij}^{*n+1} - \Delta t \alpha K D_{yy} C_{ij}^{*n+1} = C_{ij}^{*n+1} - \Delta t \alpha K D_{yy} \hat{C}_{ij}^{n+1} \quad (18)$$

여기서 유한차분 연산자는 다음과 같이 주어진다.

$$D_{xx} [] = \frac{[]_{i+1,j} - 2[]_{i,j} + []_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$D_{yy} [] = \frac{[]_{i,j+1} - 2[]_{i,j} + []_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

4. 수치 결과 분석

4.1 순간 부하

수치 모델은 일정한 유속을 갖는 유속장내의 한 점에 오염 물질이 순간적으로 부하되는 경우에 대하여 이론

치와 비교된다. 식 (3)의 1차원 이론 해는 다음과 같다.

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4Kt}\right] \quad (19)$$

초기 $t=0$ 에 오염량 $M=3,000 \text{ kg/m}^2$ 이 한점 $x=0$ 에 주어졌을 때 12,800 s의 시간동안 $u=0.5 \text{ m/s}$ 의 유속장에서 어떻게 1차원적으로 퍼져나가는 지를 비교한다. 적용되는 격자 간격과 시간 간폭은 각각 50 m와 100 s 이다. Figs. 1, 2는 각각 $K=2$ 와 $10 \text{ m}^2/\text{s}$ 의 확산 계수에 대하여 이론 해(식 (19))의 결과와 현 방법(forward-tracking method)의 수치 결과를 보여주는데 서로 상당히 잘 일치하고 있다.

현 방법은 2차원에도 쉽게 적용될 수 있다. 순간적인 점원 부하에 따른 2차원적 이송 및 확산에 대한 이론 해는 다음과 같이 주어진다.

$$C(x, y, t) = \frac{M}{4\pi Kt} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2 + y^2}{4Kt}\right] \quad (20)$$

초기 $t=0$ 에 오염량 $M=1,000,000 \text{ kg/m}^3$ 이 한 점에 주어졌을 때 20,000 s의 시간동안 x 방향 유속 $u=0.2 \text{ m/s}$ 의

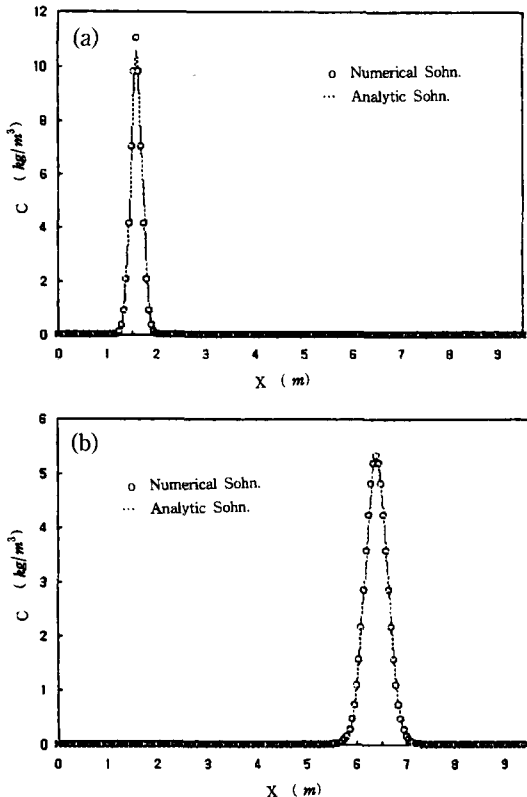


Fig. 1. Comparison between analytic solutions and results by the present study ($K=2 \text{ m}^2/\text{s}$, and (a) $t=3200 \text{ s}$, (b) $t=12800 \text{ s}$).

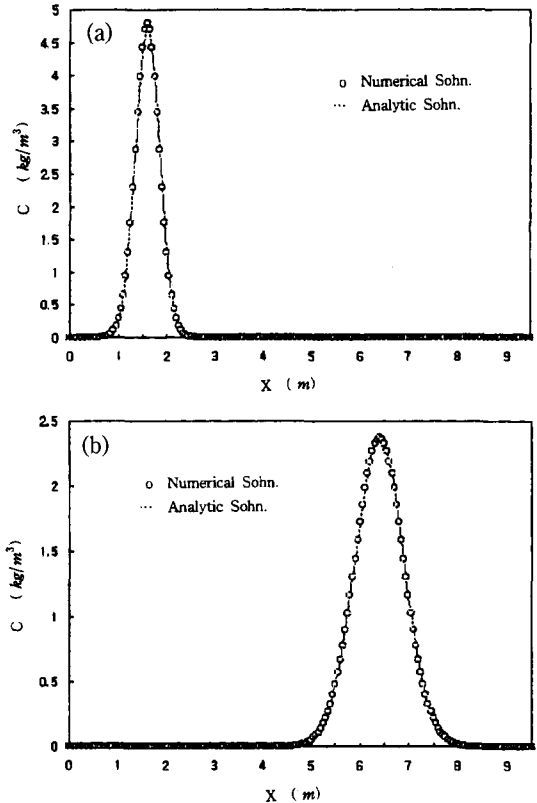


Fig. 2. Comparison between analytic solutions and results by the present study ($K=10 \text{ m}^2/\text{s}$, and (a) $t=3200 \text{ s}$, (b) $t=12800 \text{ s}$).

유속장에서 어떻게 퍼져나가는 지를 비교한다. 격자 간격과 시간 간폭은 각각 100 m와 100 s로 주어졌다. Figs. 3과 4는 각각 $K=2$ 와 $10 \text{ m}^2/\text{s}$ 인 경우, 5-점법, 무작위 행보법과 현 방법 그리고 이론 해의 결과를 함께 보여주고 있다. 5-점법이란 5개의 주변 격자를 사용하여 Hermite 다항 방법(부록 B)으로 보간하는 방법으로 작은 확산계수에서 전송 속도의 지연이나 고농도에서 결과의 차이를 보이고 있다. 무작위 행보법의 결과는 $K=2 \text{ m}^2/\text{s}$ 일 때 다른 모델 결과와 비교하여 비슷한 정도의 결과를 제공하는 경우로 100,000개의 오염 입자가 투여됐을 때의 결과를 나타낸 것으로 큰 확산계수에 대하여 더 많은 입자의 수가 요구됨을 알 수 있다. 현 방법에 의한 결과치만이 확산 계수에 관계없이 이론적인 해와 비교하여 가장 잘 부합되는 결과를 제공하고 있음을 알 수 있다.

보간 방법을 취하는 기존의 방법들은 보간의 수준을 높임으로써 정확도를 향상시켰으나 반대로 보간에 따

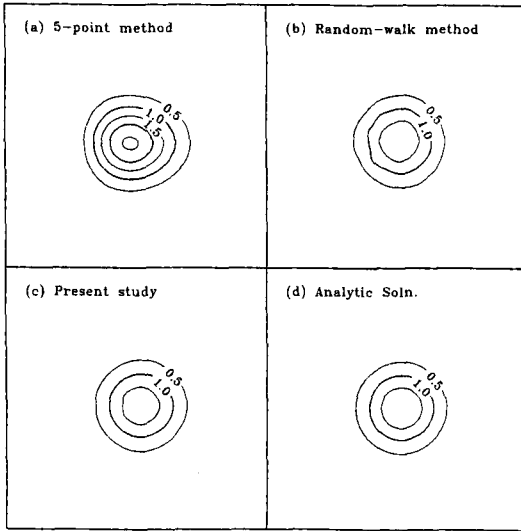


Fig. 3. Comparison with analytic solution for an instantaneous point source ($t=20000$ s, $K= 2$ m²/s, and contour unit : kg/m³).

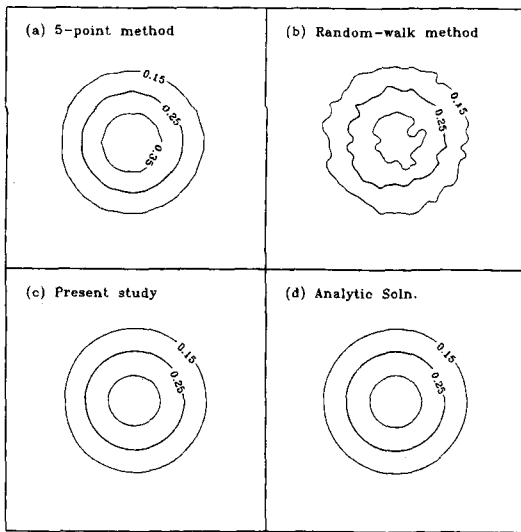


Fig. 4. Comparison with analytic solution for an instantaneous point source ($t=20000$ s, $K= 10$ m²/s, and contour unit : kg/m³).

른 계산상의 소요로 더 많은 시간을 요구하였다. 하천과 같이 1차원적인 문제에 적용할 경우에는 소요되는

계산 시간이 크게 우려되지 않지만 2차원 이상에 적용할 경우에는 소요되는 계산 시간이 가히 엄청나다. Table 1은 2차원 확산인 경우, 주어진 조건에 대하여 현 방법에 대한 각 모델의 계산 시간 비율을 보여주고 있다. 5-점법은 확산 계수에 무관하게 계산 시간의 차이가 없는 방법이나 본 연구에서는 거의 0에 가까운 미소한 농도에서는 보간을 취하지 않도록 하였으므로 확산 계수가 클수록 계산 시간이 좀 더 요구되고 있다. 5-점법은 $K=10$ m²/s인 경우, 현 방법에서 요구되는 계산 시간의 7배 이상 더 걸린다.

4.2 연속 부하

일정한 유속을 갖는 유속장내의 한 점에서 오염 물질이 연속적으로 부하되는 경우에 대하여 또한 이론치와 비교하여 현 방법의 적용성을 시험한다. 연속으로 오염원이 부하되는 경우 식 (1)의 2차원적 이론 해는 다음과 같다.

$$C(x, y, t) = \frac{\dot{M}}{4\pi K} \exp\left[\frac{xu}{2K}\right] \int_0^t \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{4K\tau} - \frac{u^2\tau}{4K}\right] d\tau \quad (21)$$

한 점에서 시간당 오염원 $\dot{M}=10000$ kg/m³/s이 계속 주어지며, x 방향으로의 흐름의 세기는 1 m/s 이다. 격자 간격과 시간 간폭은 각각 20 m와 10 sec 이며, 1000 s 후의 결과가 Figs. 5와 6에 보는 바와 같이 이론 해와 비교되었다. 5-점법은 확산 계수가 큰 10 m²/s인 경우 이론치와 유사한 결과를 제공하지만 2 m²/s인 경우는 이송 속도가 다소 지연되며 고농도에서 이론치보다 큰 값을 보이고 있다. 무작위 행보법의 결과는 정확도를 향상시키기 위하여 매 시간 10,000개씩의 입자를 투여하여 총 1000,000개의 입자가 투여된 경우로 확산 계수가 큰 10 m²/s인 경우에도 만족할 만한 결과를 주고 있으나 계산 시간상 현 방법과 비교하여 15배 정도 더 소요되었다. 더 많은 입자의 투여는 더 좋은 결과를 보장하지만 확산 계수가 크고 수치 모의 시간이 긴 경우나 해지면 토사 이동과 같이 공급원이 전 영역인 경우

Table 1. Comparison of computational times for an instantaneous point source

Method types K(m ² /s)	Five-point method	Present method	Random-walk method
2	4.4	1	5.1
10	7.5	1.05	5.1

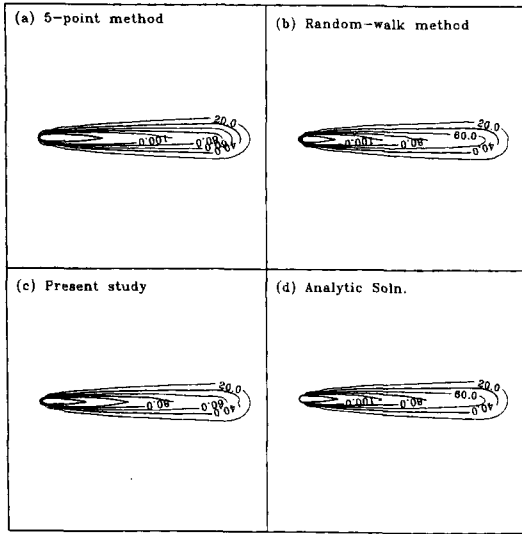


Fig. 5. Comparison with analytic solution for a continuous point source ($t=1000$ s, $K=2$ m²/s and contour unit: kg/m³).

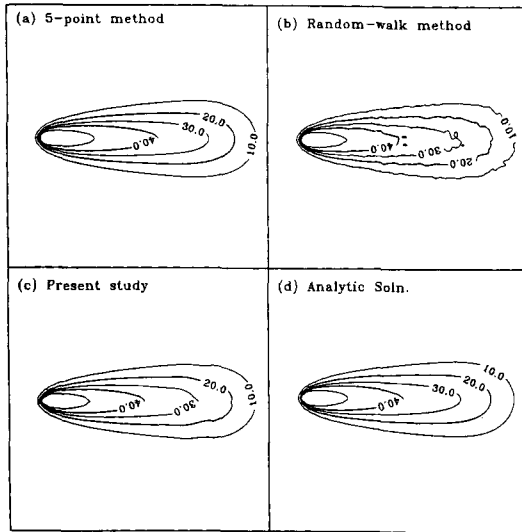


Fig. 6. Comparison with analytic solution for a continuous point source ($t=1000$ s, and $K= 10$ m²/s and contour unit : kg/m³).

에는 적용하기 부적합하다. 연속 오염원인 경우에도 현 방법의 결과는 확산 계수에 관계없이 만족할 만한 결과를 제공하고 있다.

5. 결 론

본 연구에서 제안하는 혼합 방법(hybrid method)은 기존의 혼합 방법인 오일러-라그랑주적 방법과는 달리 보간기법의 사용없이 수행되며 무작위 행보에 의한 라

그랑주적 방법과 같이 많은 입자를 요구하지도 않는다. 현 방법은 오일러-라그랑주적 방법과 순수 라그랑주적 방법과 비교되었다. 적용되는 오일러-라그랑주적 방법은 2차원 상에서 주변 5격자로부터 Hermite 보간 기법으로 보간하는 방법이며 순수 라그랑주적 방법은 무작위 행보로 농도 입자를 추적하는 방법이다.

한 점에 순간적으로 부하되는 오염원과 연속적으로 부하되는 오염원에 대하여 각 모델의 수치 결과를 이론적인 해와 비교하였다. 비교 결과, 현 방법은 확산 계수와 무관하게 비교적 만족할 만한 결과를 제공하고 있으며 계산 시간도 상당히 경제적인 것으로 입증되었다. 따라서 이송 과정을 입자 추적하고 확산 과정을 유한 차분하는 현 방법은 방법상 다양한 흐름과 다양한 전송 물질의 공급원을 갖는 하구 및 해안 환경에서도 쉽게 적용될 수 있으리라 기대되며 실측자료를 통하여 현 방법의 적용성은 물론 정확성 및 효율성에 대한 검증이 진행 중이다.

참고문헌

서일원, 김대근, 1995. Eulerian-Lagrangian 방법을 이용한 1차원 종확산방정식의 수치모형, 한국수문학회지, **27**(2), 155-166.

이정렬, 1994. 수직수문하의 경계층흐름, 한국수문학회지, **27**(3), 95-105.

이정렬, 시양왕, 1994. 수로망에서의 오염물질 확산의 1차원 예측, 한국해양·해양공학회지, **6**(1), 51-60.

전경수, 이길성, 1994. Eulerian-Lagrangian 혼합모형에 의한 종확산 방정식의 수치해법, 한국수문학회지, **26**(3), 137-148.

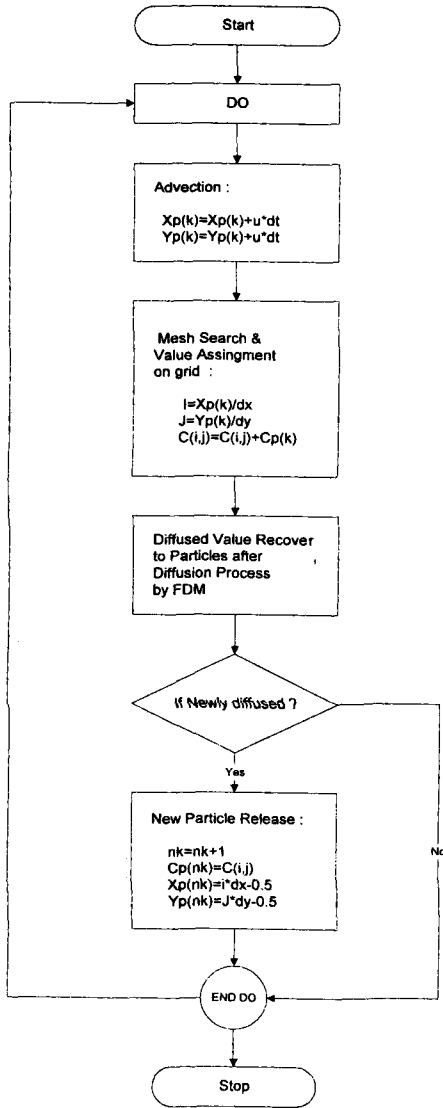
Dimou, K.N. and Adams, E.E, 1991. Representation of sources in a 3-D Eulerian-Lagrangian mass transport model, *Proc. 1st Int. Conf. on Water Pollution*, Southampton, England.

Garder, A.O., Peaceman, D.W. and Pozzi, A.L., 1964. Numerical calculation of multidimensional miscible displacement by the method of characteristics, *Soc. Pet. Eng. J.*, **4**, pp.26-36.

Holly, F.M., Jr. and Preissmann, A., 1977. Accurate calculation of transport in two dimensions, *J. Hydr. Div., ASCE*, **103**, pp.1259-1277.

Leonard, B.P., 1979. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Computer Method in Applied Mech. and Engrg.*, **19**, pp.59-98.

부 록 A. Flow Chart



부 록 B. Hermite 다항법

기존의 오일러-라그랑주적 방법은 이송단계의 처리에 있어 그림 B-1에서와 같이 시간단계 n에서 지점 P에 위치한 입자가 Δt시간 동안 흐름에 의해서 농도의 변화 없이 시간단계 n+1에 격자의 중심 위치 R로 이동된다고 보고 고안된 방법이다. 따라서 시간단계 n+1에서 각

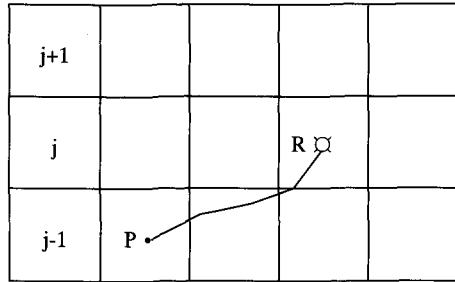


Fig. B-1. Backward particle tracking method.

격자의 중심 R에서의 농도는 시간단계 n에서 지점 P에서의 농도와 같다고 보고 점 P에서의 농도를 주변 격자 값으로부터 보간하는 방법을 사용하여 추정한다.

먼저 P점의 위치를 파악하기 위하여 다음 식이 사용된다.

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{B-1}$$

여기서 공간 좌표벡터 x의 성분은(x, y)이며, 유속 벡터 u의 성분은(u, v)이다. 따라서 Δt가 작은 경우 식 (B-1)은 격자 중심 위치 $x_i(x_{ij}, y_{ij})$ 로부터 각 성분에 대하여 P점의 위치를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_p = x_{ij} - u_{ij} \Delta t, \quad y_p = y_{ij} - v_{ij} \Delta t \tag{B-2}$$

임의의 지점에서의 농도 값은 Fig. B-2와 같이 P점이 위치한 격자(i, j)의 중심에서의 값과 주변의 4개 격자 (Fig. B-2에서 ⊗로 표시된 격자)의 농도 값으로부터 Hermite 보간법에 의하여 보간된다.

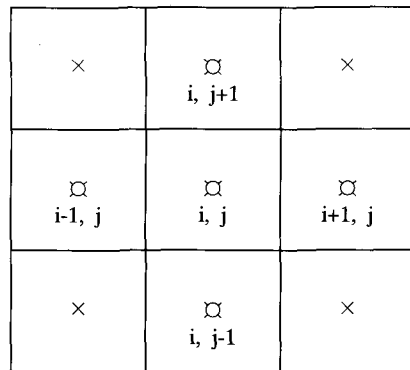


Fig. B-2. Interpolating method by the surrounding 5-points.