

GCGM을 이용한 타원형 수치 파랑모형

Elliptic Numerical Wave Model Using Generalized Conjugate Gradient Method

윤 종 태*

Jong Tae Yoon*

요 旨 : 타원형 유한차분모형에서 개방 경계조건으로 포물선 근사식과 스폰지층 경계를 사용하여 모형의 개량을 도모하였다. 수치기법은 GCG(Generalized Conjugate Gradient)기법을 사용하였고 구형해저실험에서 포물형 근사식을 사용하여 부적절한 반사파를 상당 부분 제거할 수 있었다. 스폰지층 경계의 경우 2파장 이상의 스폰지층을 사용할 때 포물형 근사식과 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 직사각형 항만에 대한 실험을 통하여 입의 형상의 대상해역에도 쉽게 모형을 적용할 수 있음을 확인하였다.

핵심용어 : 개방 경계조건, 포물형 근사식, 타원형 파랑모형, 스폰지층, 공액경사법

Abstract □ Parabolic approximation and sponge layer are applied as open boundary condition for elliptic finite difference wave model. Generalized conjugate gradient method is used as a solution procedure. Using parabolic approximation a large part of spurious reflection is removed at the spherical shoal experiment and sponge layer boundary condition needs more than 2 wave lengths of sponge layer to give similar results. Simulating the propagation of waves in a rectangular harbor, it is identified that iterative scheme can be applied easily for the non-rectangular computational region.

Keywords : open boundary condition, parabolic approximation, elliptic wave model, sponge layer, conjugate gradient method

1. 서 론

심해에서 생성된 파가 천해로 전파해 가면 불규칙한 해저지형 및 흐름에 의하여 그 형태가 변한다. Berkhoff(1972)에 의해 처음으로 유도된 환경사방정식은 굴절, 회절 및 천수현상 등이 복합되어 나타나는 파랑변형을 잘 모의할 뿐 아니라 단파에서 장파에 이르기까지 넓은 영역의 파랑을 다룰 수 있어서 항내로의 파랑전파, 방파제 및 섬 주위의 회절, 부선거에 작용하는 부력계산 등 다양한 공학적 문제에 성공적으로 적용되어 왔다(Panchang *et al.*, 1991).

이러한 환경사방정식을 풀기 위한 수치모형이 다양하게 개발되어 왔는데 그 과정에 겪게되는 어려움 중의 하나가 외해와 접하는 개방경계의 정확한 취급이

다. 파가 진행하면 해저지형 및 대상해역 내의 구조물 등으로 인하여 산란파가 형성되고, 개방경계에선 입사파와 미지의 산란파가 혼재하여 정확한 경계조건의 설정이 쉽지 않다. 그래서 보통 경계조건을 주 관심영역으로부터 멀리 떨어진 곳에 둬으로써 부정확한 경계조건의 영향을 줄이고자 하는데 이 경우 연산량의 증가를 피할 수 없다.

원래의 타원형 환경사방정식 대신 포물형 근사식을 사용할 경우엔 파의 주 진행방향(+x)이 설정되고 -x방향의 반사파는 무시되므로 이러한 문제가 양 측방경계에서 발생한다. Darlymple and Martin(1992)은 포물형 모형에 적용되는 새로운 개방 경계조건을 발표하였다. 경계를 따른 적분량들로 표현되는 이 식은 매우 성공적이며 경계에서 부적절한 반사파를 발생시키지 않고

*경성대학교 건설·환경공학부 (Department of Civil and Environmental Engineering, Kyungsu University, Pusan 608-736, Korea)

파를 잘 투과하는 것으로 밝혀졌다.

타원형 모형을 사용하는 경우 Berkhoff *et al.*(1982)과 Panchang *et al.*(1988, 1991)은 파가 경계에 수직하게 진행한다고 가정한 근사적인 개방 경계조건을 사용하였다. 대부분의 산란파에 대하여 이러한 가정은 무리가 있고 계산결과에서도 부적절한 해의 진동이 나타났다. Kirby(1989)는 이런 제약을 피하기 위해 여러가지 포물형 근사식을 경계조건에 적용할 것을 제안하였다.

타원형 모형에 대해 유한 요소법을 사용하는 경우, 계산영역 밖(외해)의 수심을 일정하다고 가정하고 무한 외해에서의 방사조건(radiation condition)을 적용하면 산란파는 Bessel-Fourier 급수로 표시되는데 이러한 방사조건은 유한요소 구조에 잘 부합하여 매우 성공적으로 개방경계를 다룰 수 있다(Mei, 1983; Houston, 1981). 그럼에도 불구하고 그 작업량이 과도하여 경우에 따라선 구조적으로 보다 단순하고 적용이 용이한 유한차분 모형을 선호하게 되는데 Panchang *et al.*(1988, 1991)과 Li and Anastasiou(1992)는 광역의 파랑 계산에 적용할 수 있는 타원형 유한차분 모형을 발표하였다. 두 경우 모두 단순한 개방 경계조건으로 인하여 어려움을 겪은 바 있다. 서(1994)는 타원형 수치모형에서 PCGM(Preconditioned Conjugate Gradient Method) 연산방식에 대한 비교연구를 행하였고, 이후 PCGM과 포물형 근사식 수치모형에 대한 비교 연구를 통해 포물형 모형의 계산결과를 PCGM 모형의 입력자료로 사용함으로써 계산의 효율을 크게 향상시킬 수 있음을 보여주었다(서·연, 1994).

본 논문에서는 타원형 유한차분모형을 구성하고 개방 경계조건으로서 포물형근사식과 Larsen and Dancy(1983)가 제안하고 이·박(1996)이 시간의존 환경사방정식의 해석에 사용한 바 있는 스폰지층 경계조건을 적용하여 보았다. Ito and Tanimoto(1972)의 구형해저 지형 실험에 적용하여 개방경계의 투과성을 비교, 확인한 후 직사각형 항만에서의 공진실험을 통하여 모형의 적용성을 검토하였다.

2. 파랑변형 모형

2.1 지배방정식

환경사 해역에서의 파랑변형을 나타내는 미소진폭 파의 전파는 다음 식으로 표시된다.

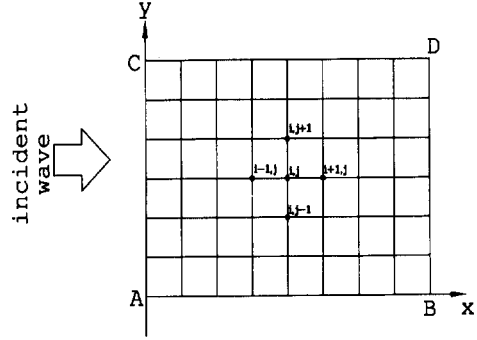


Fig. 1. Model grid.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \frac{Cg}{C} \sigma^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

여기서 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\Phi(x, y)$ 는 정상상태의 평균해 수면상의 속도포텐셜, σ 는 각주파수, $C(x, y)$ 는 파속, $C_g(x, y)$ 는 군속도이다. k 를 파수, h 를 수심이라 할 때 분산방정식은 $\sigma^2 = gk \tanh kh$ 이다. 윗 식은 $\nabla h / kh \ll 1$ 인 완경사 해역에서만 유용하다. 식 (1)을 간단히 변환하면(Radder, 1979)

$$\nabla^2 \phi + K^2(x, y)\phi = 0 \quad (2)$$

여기서

$$\phi = \Phi(CC_g)^{0.5}, \quad K^2 = k^2 - \frac{\nabla^2(CC_g)^{0.5}}{(CC_g)^{0.5}} \quad (3)$$

좌표축 및 모형격자는 Fig. 1과 같다. 뒤에 확인되지만 이 기법은 비사각형 영역에도 쉽게 적용할 수 있다.

2.2 경계조건

식 (2)는 타원형 편미분방정식이므로 해석영역의 전 경계에서 조건이 주어져야 한다. 경계 AC에서 입사파는 $\phi_m = A_m \exp(iKx)$ 이고 반사파를 $\phi_r = B \exp(-iKx)$ 로 두면

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = iK(\phi_m - (\phi - \phi_m)) \quad (4)$$

이므로

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = iK(2\phi_m - \phi) \quad (5)$$

혹은 조파기가 있을 때는 다음조건을 사용할 수 있다(Berkhoff and Booij, 1982).

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \text{const} \quad (6)$$

AC에서 파랑조건이 주어지 있거나 다른 광역격자에서 미리 계산되어 졌다면 Dirichlet조건이 주어질 수 있을 것이다. 다른 경계들은 지형적으로 안벽, 해안선 혹은 외해가 될 것인데 이 경우엔 다음 조건을 사용할 수 있다(Tsay and Liu, 1983).

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha i K \phi \quad (7)$$

여기서 n 은 경계에 수직한 방향이고 α 는 반사율에 따른 계수이다. $\alpha=1$ 을 사용하면 Panchang *et al.*이 사용한 개방 경계조건이 된다.

Kirby(1989)가 제안한 포물형 근사식을 사용한 개방 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi_x = iK(\phi + \frac{1}{2K^2} \phi_{yy}) \quad (8)$$

$$\phi_x + \frac{1}{4K^2} \phi_{yyy} = iK(\phi + \frac{3}{4K^2} \phi_{yy}) \quad (9)$$

Larsen and Dancy(1983)는 하단경계(downwave boundary)에서 파의 반사를 억제하기 위하여 파의 에너지를 감쇠시키는 스폰지층을 사용하였다. 이러한 감쇠영역에선 식 (1)과 K 는 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \frac{C_g}{C} \sigma^2 \Phi + i \sigma W \Phi = 0 \quad (10)$$

$$K^2 = k^2 + \frac{i \sigma W}{CC_g} - \frac{\nabla^2(CC_g)^{0.5}}{(CC_g)^{0.5}} \quad (11)$$

여기서 W 는 감쇠계수로서 다음과 같이 설정하였다.

$$W = \begin{cases} 0 & : \text{스폰지층 밖} \\ \frac{e^{\delta s} - 1}{e - 1} & : \text{스폰지층 안} \end{cases} \quad (12)$$

여기서 δ 은 스폰지층 시작점으로 부터의 거리이고 S 는 스폰지층의 두께이다.

3. 수치기법

격자점 (i, j)에서의 포텐셜을 $\phi_{i, j}$ 로 두고 식 (2)를 2차의 기법으로 차분화하면 ($\Delta x = \Delta y$)

$$\phi_{i, j+1} + \phi_{i, j-1} + \phi_{i+1, j} + \phi_{i-1, j} + [(K \Delta x)^2 - 4] \phi_{i, j} = 0 \quad (13)$$

대상해역의 전 격자점에서 위와 같은 차분식을 구성하

면 다음과 같은 연립 방정식이 구성된다.

$$[A]\{\phi\} = \{f\} \quad (14)$$

여기서 $[A]$ 는 계수행렬 $\{\phi\}$ 는 미지벡터 그리고 $\{f\}$ 는 경계조건을 차분화로부터 생기는 계수벡터이다.

Panchang *et al.*(1991)은 식 (13)을 풀기위해 PCG (Preconditioned Conjugate Gradient)기법을 사용하였다. 일반 반복기법이 수렴하기 위해서는 계수 행렬 $[A]$ 가 대각요소가 지배적이거나 (diagonally dominant) 혹은 대칭이면서 양의 정수(positive definite)이어야 한다. CG기법이 수렴하기 위해서는 $[A]$ 가 대칭에 양의 정수 이어야 하므로 이를 위해 식 (13)에 A 의 공액전치행렬을 곱해준다(Gauss변환). 이 경우 해법이 안정하기는 하지만 계수행렬의 스펙트럼 반경이 커져 수렴속도가 느려지므로 Bayliss *et al.*(1983)이 제안한 PCG기법을 사용하여 수렴속도를 향상시켰다. 하지만 이 기법의 경우 preconditioning 과정에서 $K=0$ 을 사용하는 과정이 있어서 식 (8), (9)의 경계조건을 적용할 수 없게 된다.

그러므로 본 연구에선 PCG기법 대신 GCG(Generalized Conjugate Gradient) 기법을 사용하였다. 일반적인 CG기법이 $f(x) = xAx/2 - fx$ 를 최소화 하는데 비해 GCG기법은 $f(x) = |r|^2/2 = |Ax - f|^2/2$ 를 최소화하므로 계수행렬이 대칭이거만 하면 적용 가능하다(Li, 1992). PCG기법과 비교해 반복횟수는 2배 이상 늘어나지만 필요한 기억용량이 PCG기법보다 적고 횟수당 연산량이 적어 총 연산시간은 2배를 넘지 않았다. GCG기법의 계산과정은 다음과 같다.

1. 초기치 ϕ_0 를 선택한다.

2. $\{p_0\} = \{r_0\} = \{f\} - [A]\{\phi_0\}$

3. $\{u_i\} = [A]\{p_i\}$

4. $\alpha_i = \frac{\{r_i\}^T [A] \{r_i\}}{\{u_i\}^T \{u_i\}}$

5. $\{\phi_{i+1}\} = \{\phi_i\} + \alpha_i \{p_i\}$

6. Check convergence

7. $\{r_{i+1}\} = \{r_i\} - \alpha_i \{u_i\}$

8. $\{\beta_i\} = \frac{\{r_{i+1}\}^T [A] \{r_{i+1}\}}{\{r_i\}^T [A] \{r_i\}}$

9. $\{p_{i+1}\} = \{r_{i+1}\} + \beta_i \{p_i\}$

10. $i=i+1$ 로 두고 3으로 간다.

여기서 $\{p\}$ 는 추적방향벡터(search direction vector), $\{r\}$ 은 오차벡터(residual vector) 그리고 α, β 는 복소수

이다. 이처럼 GCG기법은 Gauss 변환이 필요 없고 preconditioning 과정이 불필요하므로 연산구조가 대단히 간단하여 전산화가 용이한 장점이 있다(Li, 1992).

4. 적용 및 검토

4.1 구형해저지형 실험

Ito and Tanimoto(1971)는 환경사방정식의 해석을 위해 구형 해저지형(Fig. 2)에 대한 수리실험을 행하였다. 타원형 모형의 경우 EVP(Error Vector Propagation) 기법과(Panchang *et al.*, 1988) PCG기법으로(윤, 1993) 본 실험에 대해 계산한 예가 있는데 두 경우 모두 단순 경계 (식 (7)에서 $\alpha=1$ 을 사용한 경우)를 적용하였고 그로 인해 개방경계에서 산란파의 반사가 생겨 해에 부적절한 진동이 나타난 바 있다. 파장 $L_0=40$ m, $\Delta x = \Delta y = 2$ m로 계산한 결과를 나타낸 것이 Figs. 3~8이다.

개방 경계조건으로는 식 (7), (8), (9) 그리고 식 (10), (11) 에 따른 스폰지층이 사용되었다. 비록 식 (9)가 식 (8)에 비해 허용 입사각의 범위가 더 넓은 고차의 식이지만 계산한 결과 두 경우의 값의 차이가 몹시 작아서 그림상으로 구분할 수가 없었다. 이는 본 실험에서 생

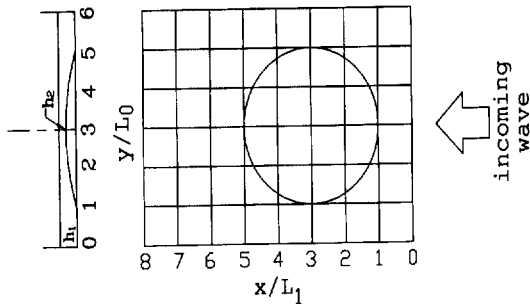


Fig. 2. Spherical shoal.

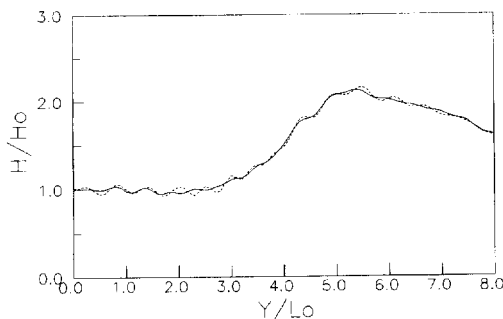


Fig. 3. Wave height comparison at $y/L_0=3$ (—=parabolic approximation, ...=simple boundary condition).

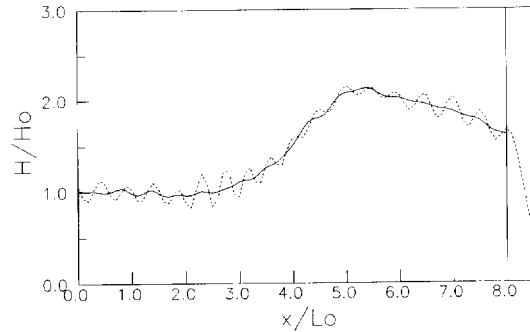


Fig. 4. Wave height comparison at $y/L_0=3$ (—=parabolic approximation, ...=sponge layer (0.5L)).

성되는 산란파의 파향 변화가 두 경계조건의 차를 부각할 만큼 크지 않기 때문으로 생각된다. Fig. 3을 보면 단순경계를 사용한 경우에 비해 비록 완전하진 않지만 진동이 상당부분 제거된 것을 확인할 수 있다. Figs. 4~6은 스폰지층의 두께로 0.5 L, L, 2L을 사용한 경우와 포물형 근사식을 사용한 경계조건식 (8)을 사용한 경우의 결과를 비교한 것이다. 스폰지층의 최종 단에서는 단순경계조건을 적용하였는데 최소한 2파장 이상의 스폰지층을 사용하여야 포물형 근사식을 사용한 경계조건과 유사한 결과를 얻을 수 있었다(Fig. 6). 스폰지층의 크기를 2L 이상으로 확장해 보았지만 Fig. 6과 차이가 없어 결과에선 생략하였다. Darlymple *et al.*(1984)과 Liu *et al.*(1986)은 에너지 감쇠역으로 인한 파의 산란현상을 연구한 바 있는데 이에 따르면 에너지 감쇠역으로 인해 반사파가 생성되고 그 정도는 감쇠의 정도가 급격할수록 심해진다. Fig. 5를 보면 단순 경계만을 사용한 경우보다 더 큰 진동이 나타나는데 이는 좁은 스폰지층 두께로 인하여 감쇠율이 커져 생긴 반사파로 생각된다. 횡단면을 따른 파고분포는 큰

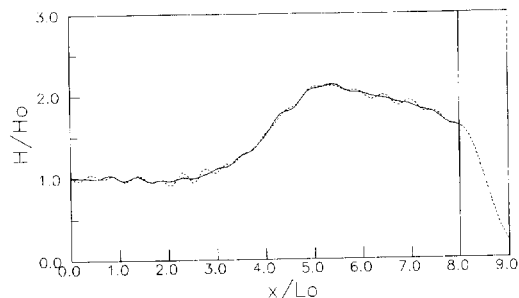


Fig. 5. Wave height comparison at $y/L_0=3$ (—=parabolic approximation, ...=sponge layer (L)).

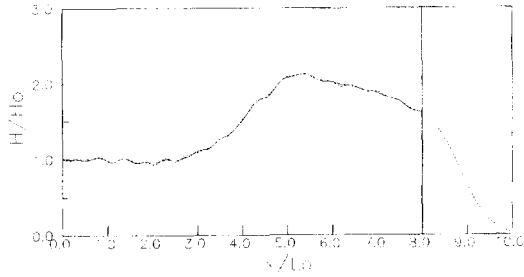


Fig. 6. Wave height comparison at $y/L_0 = 3$ (— = parabolic approximation, ... = sponge layer ($2L$)).

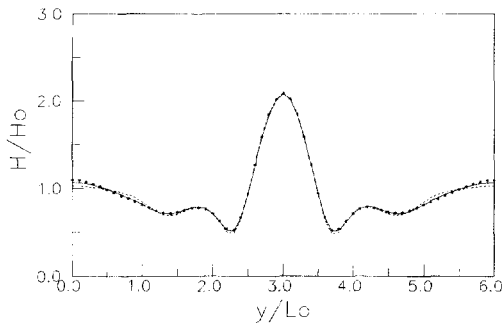


Fig. 7. Wave height comparison at $x/L_0 = 5$ (— = parabolic approximation, ... = simple boundary condition, *** = sponge layer ($2L$)).

차이가 없었다(Figs. 7, 8).

4.2 직사각형 항만에 대한 실험

항내에선 입사파의 조건에 따라 공진현상이 발생하여 항내 선박과 구조물에 큰 피해를 줄 수가 있다. Fig. 9와 같은 직사각형 항만에 대해 입사파의 파장 변화에 따른 항내 파고변화를 살펴보았다. 항만 경계의 영향으로 특히 항 입구에서의 파랑상태는 대단히 복잡하여

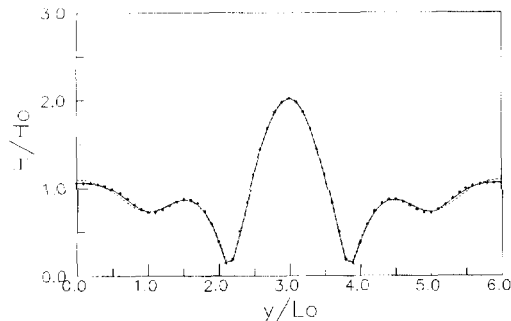


Fig. 8. Wave height comparison at $x/L_0 = 6$ (— = parabolic approximation, ... = simple boundary condition, *** = sponge layer ($2L$)).

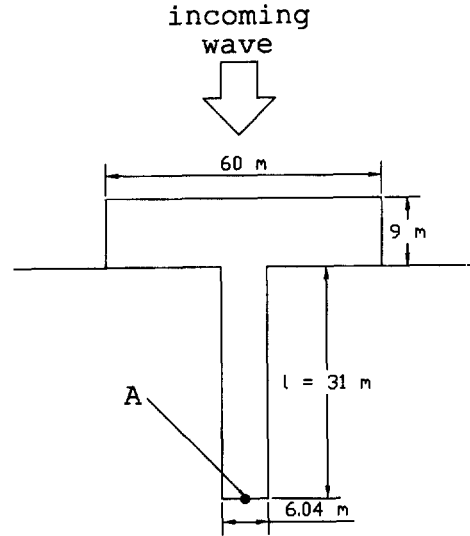


Fig. 9. Rectangular harbor.

현재의 경계조건들로는 이를 정확히 묘사하기가 불가능하므로 계산영역을 외해로 확장하여 부정확한 경계조건의 영향을 줄여야 한다. 계산영역이 비사각형이므로 포물선 모형이나 RCPWAVE모형 혹은 EVP모형은 적용하기 어렵다. 이 경우 보통 수심이 일정하면 경계요소법을 사용하고 수심이 변하면 복합요소법 등을 사용해 왔다(Tsay *et al.*, 1989). 개방경계 외의 해안선 및 항만 직립벽에 대해서는 완전반사 조건을 적용하였다. 항만 배후 중앙(A점)에서의 파고를 계산하여 Lee (1971)의 해석해와 비교한 것이 Fig. 10이다. 값은 전반적으로 일치하지만 Kl 이 1보다 작은 구간과 Kl 이 4보다 큰 경우에 오차가 비교적 크게 나타났다. 개방경계로 식(8)을 사용한 결과가 해석해에 보다 근접하지만

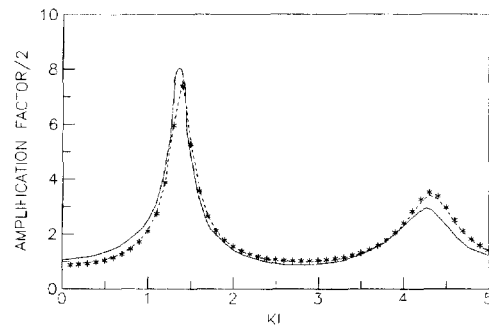


Fig. 10. Wave height comparison for different wave lengths (— = analytical, ... = parabolic approximation, *** = simple boundary condition).

그 차이는 미소하였다.

5. 결 론

타원형 유한 차분모형에서 개방경계조건을 개량하기 위해 포물형 근사식과 스폰지층 경계조건을 적용하여 보았다. 포물형 근사식을 사용하기 위해 수치기법은 GCG기법을 사용하였고 Ito and Tamimoto의 구형해저지형 실험과 직사각형 항만 실험에 대하여 계산해 보았다. 구형해저지형 실험에 대해서는 단순경계조건에 비해 포물형 근사식을 사용함으로써 부정확한 해의 진동을 상당부분 제거할 수 있었지만 이항전개한 근사식과 고차 근사식간의 차이는 이 실험에선 확인할 수 없었다. 스폰지층을 사용한 경우엔 스폰지층의 폭을 두파장 이상 적용하여야 포물형 근사식과 유사한 결과를 얻을 수 있었고 그 폭이 좁아 에너지의 감소과정이 너무 급격하면 오히려 해의 진동이 더욱 커졌다. 직사각형 항만에 대한 실험에선 항 입구에서 산란파가 대단히 복잡하게 형성되므로 계산영역을 외해로 확장하여 계산하였다. 이로 인해 계산영역이 비사각형이 되지만 여타 모형과 달리 본 모형은 대상영역 형상의 제약을 덜 받으므로 쉽게 적용할 수 있었다. 계산결과는 전반적으로 일치하였고 경계조건에 따른 결과의 변화는 미소하였다. 이러한 실험을 통하여 GCG기법의 효율성과 적용성을 확인할 수 있었다.

사 사

본 연구는 한국학술진흥재단에서 지원하는 1996년도 지방대학 육성과제로 수행되었으며 상기 재단에 감사사를 표합니다.

참고문헌

서승남, 1994. 환경사 과랑식에 대한 PCGM 연산방식 비교, 한국해양·해양공학회지, 6(2): 186-195.
 서승남, 연영진, 1994. 타원형천퇴에 대한 PCGM과 포물형근사식 수치모형비교, 한국해양·해양공학회지, 6(3): 216-225.
 윤종태, 1993. CGM을 이용한 환경사방정식의 수치해석, 한국해양·해양공학회지, 5(2): 84-90.
 이창훈, 박우선, 1997. 수심변화가 심한 경우에 적용가능한 Copeland형 과랑식, 대한토목학회논문집, 17(II-2):

157-164.
 Bayliss, Q., Goldstein, C.I. and Turkel, E., 1983. An iterative method for the Helmholtz equation, *J. Comput. Phys.*, 49, pp. 443-456.
 Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction and diffraction, *Proc. 13th Coastal Engrg. Conf.*, ASCE, pp. 471-490.
 Berkhoff, J.C.W., Booy, N. and Radder, A.C., 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, *Coastal Engrg.*, 6, pp. 255-279.
 Darlymple, R.A. and Martin, P.A., 1992. Perfect boundary condition for parabolic water-wave models, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A437, pp. 41-54.
 Darlymple, R.A., Hwang, P.A. and Liu, P.L.-F., 1984. Water waves and circular damping regions, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, 110(2), pp. 273-276.
 Houston, J.R., 1981. Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method, *Applied Ocean Res.*, 3, pp. 163-170.
 Ito, Y. and Tanimoto, K., 1971. A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction, *Proc. 13th Coastal Engrg. Conf.*, ASCE, pp. 503-522.
 Kirby, J.T., 1989. A note on parabolic radiation boundary condition for elliptic wave calculations, *Coastal Engrg.*, 13, pp. 211-218.
 Larsen, J. and Dancy, H., 1983. Open boundaries in short wave simulations - a new approach, *Coastal Engrg.*, 7, pp. 285-297.
 Lee, J.J., 1971. Wave-induced oscillations in harbors of arbitrary geometry, *J. Fluid Mech.*, 45, pp. 375-394.
 Li, B., 1994. A generalized conjugate gradient model for the mild slope equation, *Coastal Engrg.*, 23, pp. 215-225.
 Li, B. and Anastasiou, K., 1992. Efficient elliptic solvers for the mild-slope equation using multi-grid method, *Coastal Engrg.*, 16, pp. 245-266.
 Liu, P.L.-F., Yoon, S.B. and Darlymple, R.A., 1986. Wave reflection from energy dissipation region, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, 112(6), pp. 632-645.
 Mei, C.C., 1983. *The applied dynamics of ocean surface waves*, Wiley-Interscience, New York.

- Panchang, V.G., Cushman-Roison, B. and Pearce, B.R., 1988. Combined refraction-diffraction of short-waves for large domains, *Coastal Engrg.*, **12**, pp. 133-156.
- Panchang, V.G., Pearce, B.R., Wei, G. and Cushman-Roison, B., 1991. Solution of the mild-slope wave problem by iteration, *Applied Ocean Res.*, **13**(4), pp. 187-199.
- Radder, A.C., 1979. On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, **95**, pp. 159-176.
- Tsay, T.-K. and Liu, P.L.-F., 1983. A finite element model for wave refraction and diffraction, *Applied Ocean Res.*, **5**(1), pp. 30-37.
- Tsay, T.-K., Euh, W. and Liu, P.L.-F., 1989. A finite element model for wave refraction, diffraction, reflection and dissipation, *Applied Ocean Res.*, **11**, pp. 33-38.