

## 해저구조물에 대한 비선형분산파의 변형

박 동 진\* · 이 중 우\*\*

### Deformation of Non-linear Dispersive Wave over the Submerged Structure

*D. J. Park · J. W. Lee*

**Key Words :** Boussinesq방정식(Boussinesq equation), 비선형분산파(non-linear dispersion waves), 섭동법 (perturbation method), 완경사방정식(mild-slope equation), Soliton(Secondary solitary wave)

#### Abstract

To design a coastal structure in the nearshore region, engineers must have means to estimate wave climate. Waves, approaching the surf zone from offshore, experience changes caused by combined effects of bathymetric variations, interference of man-made structure, and nonlinear interactions among wave trains.

This paper has attempted to find out the effects of two of the more subtle phenomena involving nonlinear shallow water waves, amplitude dispersion and secondary wave generation.

Boussinesq-type equations can be used to model the nonlinear transformation of surface waves in shallow water due to effects of shoaling, refraction, diffraction, and reflection. In this paper, generalized Boussinesq equations under the complex bottom condition is derived using the depth averaged velocity with the series expansion of the velocity potential as a product of powers of the depth of flow. A time stepping finite difference method is used to solve the derived equation. Numerical results are compared to hydraulic model results.

The result with the non-linear dispersive wave equation can describe an interesting transformation a sinusoidal wave to one with a cnoidal aspect of a rapid degradation into modulated high frequency waves and transient secondary waves in an intermediate region. The amplitude dispersion of the primary wave crest results in a convex wave front after passing through the shoal and the secondary waves generated by the shoal diffracted in a radial manner into surrounding waters.

\* 정회원, 한국해양대학교 항만·운송공학과대학원

\*\* 정회원, 한국해양대학교 토목공학과 교수

### 1. 서론

해저지형이 불규칙한 연안역(nearshore region)에서 해안구조물을 디자인하기 위해서 엔지니어들은 파랑특성을 평가하여야 한다. 심해에서 천해지역으로 전파되는 파는 해저의 변화, 인공구조물의 영향, 그리고 파랑상호간의 비선형 상호작용에 의해 형상이 급변하게 된다. 이러한 천해역의 불규칙한 수심에서 파랑변형특성에 비선형성을 고려하기 위해서 자주 이용하는 파라메타는 Ursell Number ( $Ur=L^2A/h^3$ )이다.  $Ur \ll 1$ 이면 선형이론의 적용이 유효하며,  $Ur \gg 1$ 이면 비선형장파이론,  $Ur \approx 1$ 이면 비선형분산파이론의 적용이 유효한 것으로 알려져 있다.

본 논문에서는  $Ur \approx 1$ 인 비선형분산파를 이용하여 파랑변형특성을 다루기로 한다. 비선형 분산파 이론에는 Boussinesq방정식, Korteweg-de Vries (1895)방정식, Peregrine(1967)방정식 등이 잘 알려져 있으나, 본 논문에서는 Wu(1981)에 의해 유도된 일반화된 Boussinesq방정식을 기초로 유한차분법을 이용하여, 현장에서 쉽게 적용 및 이용 가능한 수치모델의 개발에 목적을 두고 있다. 균일 수심의 수평 1차원 좌표계에서 섭동법(perturbation method)을 이용하여 Boussinesq방정식을 유도하고, 바다에서의 흐름과 수심변화를 도입하여 방정식을 확장, 기본방정식을 얻었다. 해의 정도와 안정성을 기하기 위해 포텐셜의 2차 미분에 Crank-Nicholson형식을 도입하고, 좌·우경계면처리는 에너지가 무한대로 확산되어 나갈 수 있도록 Sommerfeld방사조건을 이용하였으며, 수심평균속도를 적용하였다. 비선형·분산항을 평가하기 위하여 1차원 및 2차원 영역에서 수치실험을 행하였다.

### 2. 지배방정식의 유도

#### 2.1 기본좌표계 및 경계조건

수평 1차원 기본좌표계는 Fig.1과 같이 일정한

수심을  $h$ , 정수면상에서 수평방향으로 무한하게 확장된 영역을  $x$ 축, 정수면을 원점 '0'으로 하여  $x$ 축에 수직인 방향을  $z$ 축으로 정의하고, 정수면으로부터 자유수면의 변위를  $\eta$ 로 정의하였다. 유체는 비압축, 비점성, 비회전으로 가정하고 표면장력을 무시하여 지배방정식과 경계조건을 도입한다.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \phi_z &= 0, \quad \text{at}(z = -h) \\ \eta_t + \phi_x \eta_x &= \phi_z, \quad \text{at}(z = \eta) \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta &= 0, \quad \text{at}(z = \eta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

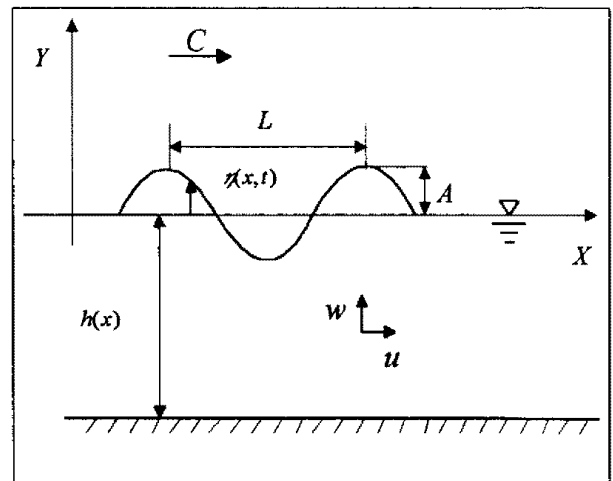


Fig. 1 Definition of coordinate system

#### 2.2 멱급수해의 가정

일반적으로 해면의 변형특성, 또는 흐름특성을 속도포텐셜로 정의할 수 있다. 본 논문에서 가정한 대상역역에서 수직방향의 속도변화는 수평방향의 속도변화에 비해 미소하므로 포텐셜을 연직성분  $Z = h + z$ 와  $x, t$ 의 함수인 속도포텐셜의 급수형태로 가정하였다.

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n \phi_n(x, t) \quad (2)$$

식(2)을 식(1)의 바닥경계조건과 지배방정식인 Laplace방정식을 적용하여 단순화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \phi_0(x, t) - \frac{1}{2} Z^2 \phi_0''(x, t) \\ &\quad + \frac{1}{24} Z^4 \phi_0''''(x, t) - O(Z^6) \quad (3) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \phi_0(x, t)}{\partial x^{2n}} \end{aligned}$$

식(3)에서 속도포텐셜은  $\phi_0$  항 단독으로 표시된다.

### 2.3 방정식의 무차원화

모든 변수들을 무차원화시키기 위하여  $L$  (Horizontal scale),  $h$  (Vertical scale),  $A$  (Scale of wave) 의 세 가지 길이개념을 도입하기로 한다. 수평방향보다 연직방향으로 변화가 큰 것을 감안하여  $x, z$  각 방향으로 공간과 시간에 대하여 식(4)와 같이 서로 다르게 무차원화하는데, 이때 '\*'는 무차원화된 형식을 표시하고,  $h_0$ 는 특성수심을 나타낸다.

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad z^* = \frac{z}{h_0}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{A} \quad (4)$$

$$Z^* = \left(\frac{z+h}{h_0}\right), \quad t^* = \frac{\sqrt{gh}}{L} t, \quad \phi^* = \frac{h_0}{LA\sqrt{gh}} \phi$$

섭동계수  $\alpha = A/h_0$ ,  $\beta = (h_0/L)^2$ 을 도입하여 지배방정식 및 경계조건을 무차원화하면 다음 식과 같다. 여기서  $\alpha$ 는 비선형성의 지표이며,  $\beta$ 는 분산성(연직 가속도)의 지표이다.

$$\left. \begin{aligned} \beta \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \beta(\eta_t + \alpha \phi_x \eta_x) &= \phi_z \\ \beta(\phi_t + \eta) + \frac{1}{2}(\alpha \beta \phi_x^2 + \alpha \phi_z^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

속도포텐셜을 급수전개로 표현한 식(3)을 무차원화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \phi_0(x, t) - \frac{1}{2} \beta Z^2 \phi_0''(x, t) \\ &\quad + \frac{1}{24} \beta^2 Z^4 \phi_0''''(x, t) + O(\beta^3) \quad (6) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \phi_0(x, t)}{\partial x^{2n}} \beta^n \end{aligned}$$

여기서,  $Z = (1 + \alpha \eta)$  이다. 속도포텐셜은 섭동계수를 도입한 무차원화과정을 통하여 기본항인  $\phi_0$  항을 제외한 나머지 항들은 미소파라메타인 섭동계수  $\beta$ 에 관계됨을 알 수 있다. 우변의 첫 번째 항은 선형해로서  $\beta$ 와 무관하고 2차 해는  $\beta$ 에 3차 해는  $\beta^2$ 에 관계된다.

### 2.4 지배방정식의 유도

자유수면경계조건을 만족하는  $\phi$ 의 함수형태를 결정하기 위하여 식(6) 우변의  $\phi_0$ 를  $\phi$ 로 놓고 각 방향에 대하여 미분하여 식(5)의 자유수면경계조건에 대입하여 정리한 후, 미분을 의미하는 (') 표시 대신 아래첨자 표기를 사용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\eta_t + \alpha \phi_x \eta_x + Z \phi_{xx} - \frac{\beta}{6} Z^3 \phi_{xxx} = O(\alpha \beta, \beta^2) \quad (7)$$

$$\eta + \phi_t - \frac{\beta}{2} Z^2 \phi_{zz} + \frac{\alpha}{2} \phi_z^2 = O(\alpha \beta, \beta^2) \quad (8)$$

이 식은 선형파이론과는 달리 수직속도성분을 포함하고 있다. 속도포텐셜은  $\phi_0$  항 단독으로 표현되기 때문에  $\phi_x(x, z, t) = u_0$  이다. 여기서  $u_0$ 를 정의하는 방법에 따라 여러 가지 Boussinesq형 방정식으로 분류되는데 본 논문에서는  $u_0$ 에 수심평균속도인  $\bar{u}$ 를 사용하였다.

$$\bar{u} = \frac{1}{Z} \int_{-1}^Z u dZ \quad (9)$$

그리고  $u$ 는 식(6)을  $x$ 방향으로 미분하여 구할 수 있다. 적분을 수행하면

$$\bar{u} = u_0 - \frac{\beta}{6} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} (\eta+1)^2 + O(\beta^2) \quad (10)$$

또한,  $u_0 = \bar{u}$ 로 정의하면 식(10)은 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$u_0 = \bar{u} - \frac{\beta}{6} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} (\eta+1)^2 + O(\beta^2) \quad (11)$$

식(11)을 식(7), (8)의 Boussinesq방정식에 대입하고,  $x$ 방향에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + [(1 + a\eta)\bar{u}]_x &= O(\alpha\beta, \beta^2) \\ \bar{u} + \alpha \bar{u} \bar{u}_x + \eta_x - \frac{1}{3} \beta \bar{u}_{xx} &= O(\alpha\beta, \alpha^2, \beta^2) \end{aligned} \right\} (12)$$

(12)식을 적분하여 속도포텐셜형식으로 풀고,  $\eta$ 에 대하여 정리한 후 두식을 결합하여 다음 식을 유도하였다.

$$-\phi_{tt} - 2\alpha\phi_x\phi_{xt} + \frac{\beta}{3}\phi_{xxx} + \phi_{xx} = O(\alpha\beta, \alpha^2, \beta^2) \quad (13)$$

여기서  $\alpha$ 는 비선형항을,  $\beta$ 는 분산항에 변화를 가져오게 한다.  $\alpha/\beta$ 는 Ursell파라메타로 파랑의 거동을 분류하는데 이용한다. 만약  $\alpha$ 가  $\beta$ 보다 적고  $\beta^2 \geq \alpha$ 이면  $\beta^2$ 항은 방정식에서 유지되어야 하며,  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 같으면 파랑의 비선형과 분산특성이 풀고 루 미침을 의미한다.

### 2.5 가변수심에서 Boussinesq방정식의 확장

시간과 공간에 따라 변하는 바닥조건에서 일반화시킨 Boussinesq방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta_t + \nabla \cdot [(h + \eta)\nabla\phi] \\ = -h_t + \nabla \cdot \left\{ \left[ \frac{h}{2} (h_t + \nabla \cdot (h\nabla\phi)) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} h^2 \nabla^2 \phi \right] \nabla h \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \eta + p_0 \\ = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} [h_t + \nabla \cdot (h\nabla\phi)] \\ - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (15)$$

수평1차원좌표계에 대한 Boussinesq방정식의 조합된 형태는 식(16)과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{tt} = (h\phi_x)_x - 2\phi_x\phi_{xt} - \phi_t\phi_{xx} \\ + \frac{h^2}{3}\phi_{xxx} + \frac{hh_x}{2}\phi_{xx} - \frac{h^2}{6}[h_x\phi_{xx}]_x \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $x, y$ 방향의 미분연산자 ' $\nabla$ '를 도입하여 수평2차원좌표계에 대한 방정식의 형태는 식(17)과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \phi_{tt} = \nabla \cdot (h\nabla\phi) - 2\nabla\phi \cdot \nabla\phi_t \\ - \phi_t \nabla^2 \phi + \frac{h^2}{3} \nabla^2 \phi_{tt} + \frac{h}{2} \nabla h \cdot \nabla \phi_{tt} \\ - \frac{h^2}{6} \nabla \cdot [(\nabla^2 \phi)\nabla h] \end{aligned} \quad (17)$$

위의 두 방정식에서 좌변과 우변의 첫째 항을 결합하면 불규칙한 매개물에서 선형파방정식 형태이고, 우변의 다음 두 항은 비선형항이며 마지막 3항은 분산항을 의미한다. 식(16), (17)을 본 논문의 기본방정식으로 사용하였다.

## 3. 수치해석 기법

### 3.1 수평1차원좌표계

식(16)을 대상영역의 격자간격을  $\Delta x$ , 시간간격

을  $\Delta t$ 로 정의하고 공간 및 시간에 대한 1차, 2차, 3차 미분은 중앙차분법( $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ )으로 차분화 하였으며,  $i, j$ 는 각각 공간과 시간축의 절점위치를 나타낸다. 우변의 첫 번째 항의 2차 미분은 정도를 높이기 위하여 각 시간 단계에서 전후의 평균인 식(18)과 같은 Crank-Nicholson형식으로 수정하였다.

$$[\phi_i^j]_{xx} = \frac{1}{2} \{ [\phi_i^{j+1}]_{xx} + [\phi_i^{j-1}]_{xx} \} \quad (18)$$

좌·우변 경계상의 값을 처리하기 위해 시간과 공간의 파랑전파관계를 나타내는 Sommerfeld방사 조건(Sommerfeld, 1949)을 사용하여 에너지가 무한대로 확산되어 나갈 수 있도록 하였다.(Fig.2참조)

$$\phi_i = -C\phi_x \quad (19)$$

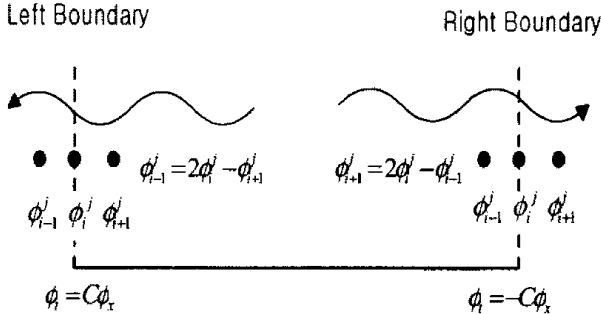


Fig. 2 Left and Right Boundary condition

시간과 공간에 대한 차분식을 사용하고 좌·우경계면 바깥쪽  $\phi_{i-1}, \phi_{i+1}$ 값의 계산은 경계면 안쪽과 바깥쪽의 평균을 취하였다.

$$\left. \begin{aligned} \phi_i^{j+1} &= \phi_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_i^j - \phi_{i-1}^j) \\ \phi_i^{j+1} &= \phi_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1}^j - \phi_i^j) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

차분식 및 위의 조건들을 적용하여 비선형항과 분산항을 도입한 기본방정식을 새로운 시간단계  $j+1$ 을 좌변에, 이전의 시간단계  $j, j-1$ 을 우변에 있도록 정리하면 다음과 같다.

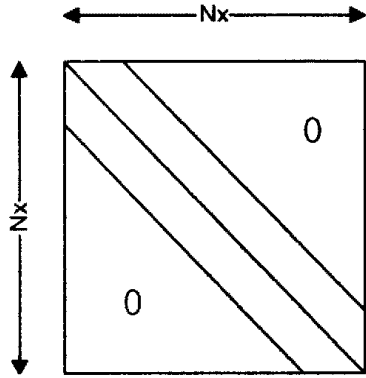
$$\begin{aligned} & \phi_{i-1}^{j+1} a(i) + \phi_i^{j+1} b(i) + \phi_{i+1}^{j+1} c(i) \\ &= (2\phi_i^j - \phi_i^{j-1}) + C_1[\phi_i^j]_x + C_2[\phi_i^{j-1}]_x + C_3[\phi_i^j]_{xx} \\ & \quad + C_4[\phi_i^{j-1}]_{xx} + C_5[\phi_i^j]_{xxx} \\ & \quad + \{-\Delta t[\phi_i^j]_x \{ [\phi_i^{j+1}]_x^{(k-1)} - [\phi_i^{j-1}]_x \} \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2} [\phi_i^j]_{xx} \{ [\phi_i^{j+1}]^{(k-1)} - [\phi_i^{j-1}] \} \} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 선형항과 분산항의 계수항은 다음과 같다.

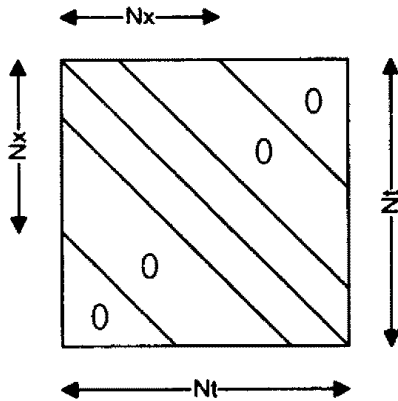
$$\begin{aligned} a(i) &= -\frac{h\Delta t^2}{2\Delta x^2} - \frac{h^2}{3\Delta x^2} + \frac{hh_x}{4\Delta x} \\ b(i) &= 1 + \frac{h\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{2h^2}{3\Delta x^2} \\ c(i) &= -\frac{h\Delta t^2}{2\Delta x^2} - \frac{h^2}{3\Delta x^2} - \frac{hh_x}{4\Delta x} \\ C_1 &= h_x \Delta t^2 - hh_x, \quad C_2 = \frac{hh_x}{2} \\ C_3 &= -\frac{2h^2}{3} - \frac{h^2 h_{xx} \Delta t^2}{6} \\ C_4 &= \frac{h\Delta t^2}{2} + \frac{h^2}{3}, \quad C_5 = \frac{h^2 h_x \Delta t^2}{6} \end{aligned} \quad (22)$$

(21)식에서 선형항과 분산항은  $x$ 방향의 미지수  $N$ 에 대한  $N$ 방정식계를 표현한다. 좌변의 미지수  $\phi(j+1)$ 항의 변수  $a(i), b(i), c(i)$ 는 3대각 매트릭스(Tri-diagonal Matrix)형태로 나타나며(Fig. 2(a)참조), 비선형항은 정도를 높이기 위하여  $k$ 번 반복 계산한 이 과정은 허용변수(tolerance parameter)를 만족할 때까지 반복한다.

$$r = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^N ([\phi_i^{j+1}]^{(k)} - [\phi_i^{j+1}]^{(k-1)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \sum_{i=1}^N ([\phi_i^{j+1}]^{(k)} - [\phi_i^j])^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} < \epsilon \quad (23)$$



(a) Tri-diagonal Matrix



(b) Penta-diagonal Matrix

Fig. 3 Schematic representation of the nonzero elements of the banded matrix

이것으로 연속적인 시간단계에서 속도포텐셜을 구할 수 있으나 관심있는 부분은 해면의 변화이므로 식(15)로부터 이항정리하여 다음식을 얻었다.

$$\eta(x, t) = -\phi_t - \frac{1}{2}(\phi_x)^2 + \frac{h^2}{3}\phi_{xxt} + \frac{h}{2}h_x\phi_{xt} \quad (24)$$

3.2 수평2차원좌표계

식(17)을 수평2차원좌표계에 사용하였다. 좌·우

경계는 수평1차원과 같이 취급하였다. 위·아래 경계에서는 경계를 가로지르는 흐름이 없는 것으로 가정하여 좌우대칭조건으로  $\phi_y = 1/2\Delta y(\phi_{m+1} - \phi_{m-1}) = 0$  를 도입하였다. 초기조건은 수평1차원좌표와 같다. 속도포텐셜을 구한 후에 식(24)를 수평2차원으로 확장하여  $\eta$ 를 계산하였다. 절점(Grid nodes)은  $x$  방향에 대해서는  $N_x$ 점,  $y$ 방향에 대해서는  $N_y$ 점의 합으로 구성되고 절점의 전체수는  $N_x \cdot N_y = N_t$ 이다. 격자번호는 다음과 같이 순차적으로 1에서  $N_t$ 까지 절점에 번호를 붙였다.

$$m = i + (k-1)N_x, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y \quad (25)$$

수평1차원과 마찬가지로 선형항과 분산항은 연립방정식을 구성하여 행렬식으로 계산하고 비선형항은 반복계산하였다. 새로운 시간에 대한 포텐셜을 좌변에 정리하고, 이전 시간에 대한 값을 우변에 정리하면 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & a(m)\phi_{m-N_x}^{j+1} + b(m)\phi_{m-1}^{j+1} + c(m)\phi_m^{j+1} \\ & + d(m)\phi_{m+1}^{j+1} + e(m)\phi_{m+N_x}^{j+1} \\ & = 2\phi_m^j - \phi_m^{j-1} + D_1 \cdot \nabla h \cdot \nabla \phi_m^j \\ & + D_2 \cdot \nabla h \cdot \nabla \phi_m^{j-1} + D_3 \cdot \nabla^2 \phi_m^j \\ & + D_4 \cdot \nabla^2 \phi_m^{j-1} + D_5 \cdot \nabla h \cdot \nabla (\nabla^2 \phi_m^j) \\ & + \{-\Delta t \{ [\phi_m^j]_x ([\phi_m^{j+1}]_x^{(k-1)} - [\phi_m^{j-1}]_x) \\ & + [\phi_m^j]_y ([\phi_m^{j+1}]_y^{(k-1)} - [\phi_m^{j-1}]_y) \\ & + [\phi_m^j]_{xx} / 2 ([\phi_m^{j+1}]^{(k-1)} - [\phi_m^{j-1}]) \\ & + [\phi_m^j]_{yy} / 2 ([\phi_m^{j+1}]^{(k-1)} - [\phi_m^{j-1}]) \} \} \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 선형항과 분산항의 좌·우변 계수값은 다음과 같고, 비선형항의  $k$ 는 반복횟수를 표시한다.

$$a(m) = -\frac{h}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - \frac{h^2}{3\Delta y^2} + \frac{hh_y}{4\Delta y}$$

$$b(m) = -\frac{h}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{h^2}{3\Delta x^2} + \frac{hh_x}{4\Delta x}$$

$$c(m) = 1 + (h\Delta t^2 + \frac{2h^2}{3}) (\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}) \quad (27)$$

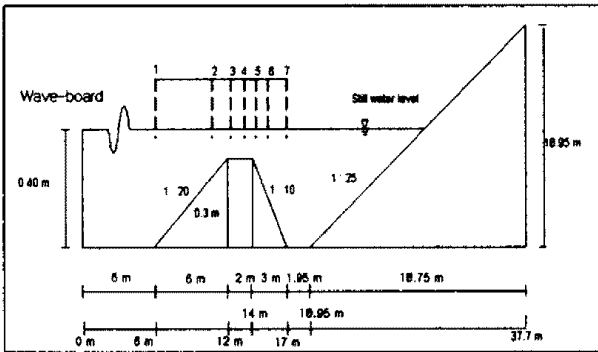
$$d(m) = -\frac{h}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{h^2}{3\Delta x^2} - \frac{hh_x}{4\Delta x}$$

$$e(m) = -\frac{h}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - \frac{h^2}{3\Delta y^2} - \frac{hh_y}{4\Delta y}$$

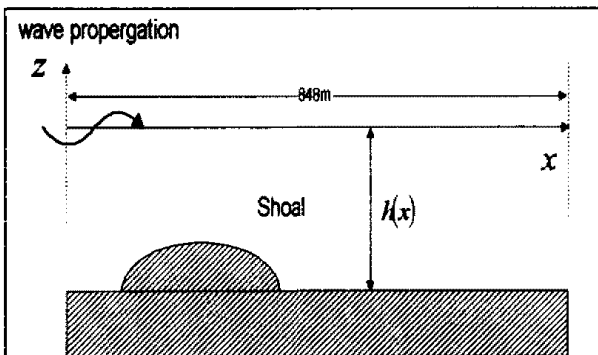
$$D_1 = \Delta t^2 - h, \quad D_2 = \frac{h}{2}$$

$$D_3 = -\frac{\Delta t^2 h^2 \nabla^2 h}{6} - \frac{2h^2}{3}, \quad D_4 = \frac{h\Delta t^2}{2} + \frac{h^2}{3}$$

$$D_5 = -\frac{h^2 \Delta t^2}{6}$$



(a) 1-Dimensional Solitary Wave Domain



(b) 2-Dimensional Sine Wave Domain

Fig. 4 Problem Domain

식(26)의 선형항과 분산항은 5대각행렬(Pentadiagonal matrix)형태(Fig.3(b)참조)로 반복 방법 대신에 SOR(Successive Over-Relaxation)법을 사용하여 계산하였다. SOR방법 자체가 보정항의 반복이므로 별도의 반복계산은 하지 않는다.

#### 4. 수치모델 실험 및 결과

수치모델의 실험은 Fig.4와 같이 해저구조물을 가진 수역에서 shoal에 의한 영향을 평가하고 비선형항과 분산항에 의한 영향을 평가하기 위하여 비채파 조건으로 고립파와 sine파를 입사시키는 것으로 하였다. 고립파를 적용할 때에는 Schember(1982)가 식(16)를 적분하여 유도한 식(28)을 사용하였고, 경계 내로 입사하는 고립파의 포텐셜은 초기의 두 시간간격(two time step)의 값을 식(29)로 계산하였다.

$$\eta = \frac{\eta_0}{(1+\alpha)} \{ \text{sech}^2[\gamma_1(x - C_1 t)] + \alpha \text{sech}^4[\gamma_1(x - C_1 t)] \} \quad (28)$$

$$\phi_i = \left(\frac{4\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh\{\gamma_2[(i\Delta x) - c_2(j\Delta t)]\} \quad (29)$$

여기서,

$$\gamma_1 = \left[ \frac{3\alpha}{4h_0^2(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{\eta_0}{h_0}, \quad C_1 = \pm \sqrt{gh_0} (1+\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

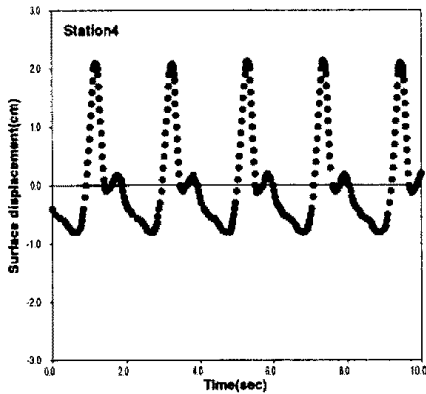
$$C_2 = (1+\alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_2 = [3\alpha/4C_2^2]^{\frac{1}{2}}$$

sine파를 적용할 때는 선형sine파를 사용하였다. 입사 파조건과 수치실험조건은 Table 1과 같다. Beji and Battjes(1994)의 수치실험 중 선형 sine파를 입사파로 하였을 때 shoal을 지나기 전후의 관측자료인 Station 4, Station 7의 관측치(Fig.5)를 비선형분산파에 대한 수치실험자료(Fig.6)와 비교할 수 있다. 실험결과에서 시간축인 x축을 따라 shoal을 지나기 전인 4지점에는 큰 1

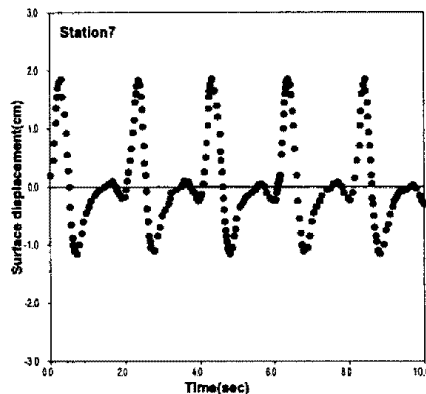
차파가 나타나고 작은 파가 뒤따르며, shoal을 지난후인 7지점에서는 작은 파가 먼저 오고 1차파가 나타나는 것을 알 수 있다.

Table 1 Condition of incident wave and numerical experiment.

Incident wave condition		Numerical condition	
Lenght(L)	72 m	$\Delta t$	0.4 sec
Period(T)	10~12 sec	$\Delta x$	0.5 m
Height(H)	0.3~1 m	$A_0$	0.0833~0.25
depth(h)	4m	tolerance parameter( $\gamma$ )	$\gamma < 0.00001$



(a)



(b)

Fig. 5 Observed sine waves at station 4 and 7.

수치실험결과에서도 shoal을 지나기 전에는 1차파를 뒤쫓는 작은파 파를 볼 수 있고, shoal을 지난 후에는 1차파를 앞서는 작은파를 관찰할 수 있다.

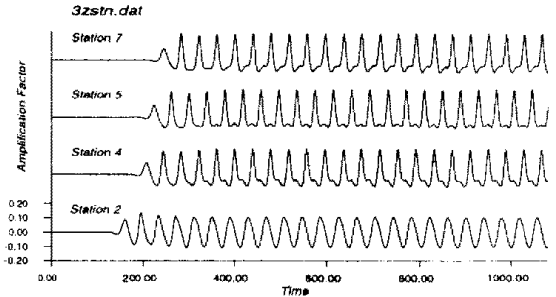


Fig. 6 Calculated sine waves including non-linear and dispersive terms at station 4 and 7

고립파를 비쇄파조건으로 입사시켜 2차파의 발생 특성을 분석하였다. 기대했던 대로, shoal 위로 전파되는 고립파는 몇 개의 Solitons(secondary solitary waves)으로 나누어짐을 확인할 수 있었다. 최초파를 뒤따라 발생한 Solitons은 진폭이 감소하는 것으로 나타났다(Fig.7참조).

Fig. 8은 sine파를 1차원영역으로 입사시켰을 경우의 각 시간단계별결과로 (a)선형(분산항없는 경우), (b)선형(분산을 포함시킨 경우), (c)비선형(분산항없는 경우), (d)비선형(분산항 포함시킨 경우)의 경우를 나타낸다. 선형인 경우는 shoal에 의한 영향이 거의 없다가, 비선형인 (c)의 경우 비선형항을 고려해 줌으로 shoal에 의한 반사파의 발생을 명확히 확인할 수 있고, 고주파대역의 변조파를 보이며, 부분적으로 2차파의 발생을 볼 수 있다. (d)의 경우 변조된 고주파가 분산항의 영향으로 안정되는 국면을 보이고 있다.

Fig.9는 2차원영역 내에서 sine파가 shoal포함시킨 경우의 경우를 나타내고 있다. (b)의의 바로 상단부에 왔을 때의 결과로 (a)선형(분산항이 없는 경우), (b)선형(분산항을 포함시킨 경우), (c)비선형(분산항이 없는 경우), (d)비선형(분산항을



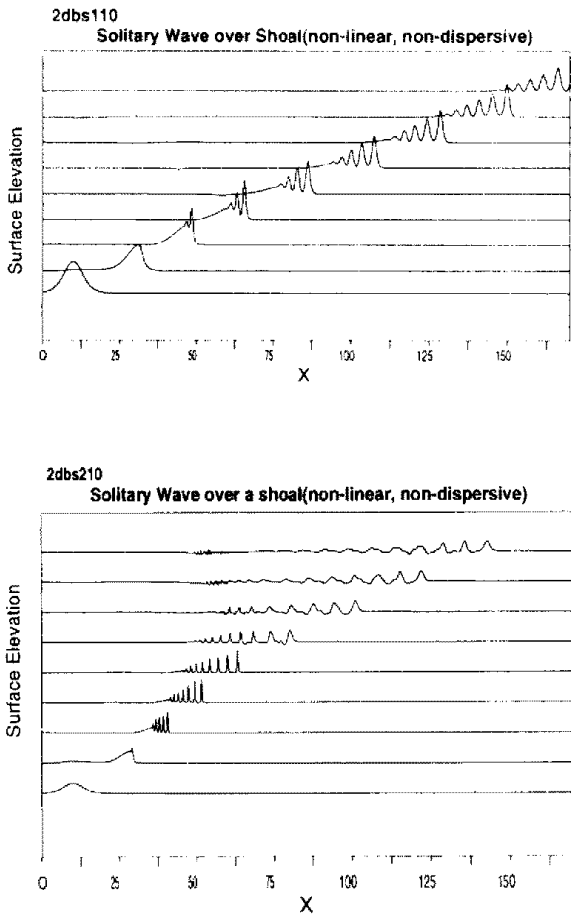


Fig. 7 Solitary wave propagating over a shoal

분산항을 포함시킨 경우를 분산항을 포함시키지 않은 (a)의 경우와 비교해보면 shoal에 의해 높아진 파고가 사방으로 퍼지는 현상을 보이고 있다. 그리고 비선형항을 포함시킨 (c)의 그림에서 보면 1차원영역의 결과와 같이 고주파대역의 변조파가 나타났다. 비선형, 분산항을 포함시킨 (d)의 경우를 보면 실제 파랑변형현상과 가장 가까움을 볼 수 있다.

Fig. 10은 비선형분산파의 시간에 따른 파랑변형을 보여준다. (b)에서 shoal에 의해 수심이 낮아지고, 속도가 느려져 파봉선이 오목하게 휘어지는 굴절현상을 나타내며, 급격히 변화를 가져와 침두파를 형성하고, 파봉의 후면에 또 다른 봉우리를 형성하며 일부구간에서 2차파가 발생하기 시작하였다. (c)에서 shoal을 지나면서 파속이 빨라지고 파고가 감

쇄하여 원래의 파고를 회복하며, 침두파는 이웃한 파봉보다 빨리 움직이는 진폭분산현상을 보인다. (d)로 감에 따라 shoal에 의한 반사파와 방사상의 2차파가 발생하고, 상하 경계면에서의 반사가 가중되어 파랑장의 왜곡은 극해진다. 2차파의 발생은 shoal의 측면으로부터 1차파의 반사로 인한 것으로 판단되며 이들의 거동은 shoal을 중심으로 하여 방사상으로 전파되어 마치 shoal의 중심에서 바깥쪽으로 점원(point source)과 같은 거동을 하면서 회절되어 나간다. 한편 shoal에 이른 파랑은 반사파로 인해 Fig. 5의 계측치와 같이 점차 파고가 증가하여 최고 2배에 가까워지는 것을 알 수 있다. 또한 주목할 것은 파랑의 주기성은 계속 유지되는 것이다.

이상에서 관측된 shoal에 의해 발생된 파의 변형은 해안선의 변화에 중요한 영향을 미친다. 해안선은 시간의 경과에 따라 파의 전면에 평행하게 정렬되는 경향이 있기 때문에 shoal에 의해 발생한 오목한 파의 전면은 해안선을 불룩하게 만들 것을 예상할 수 있다.

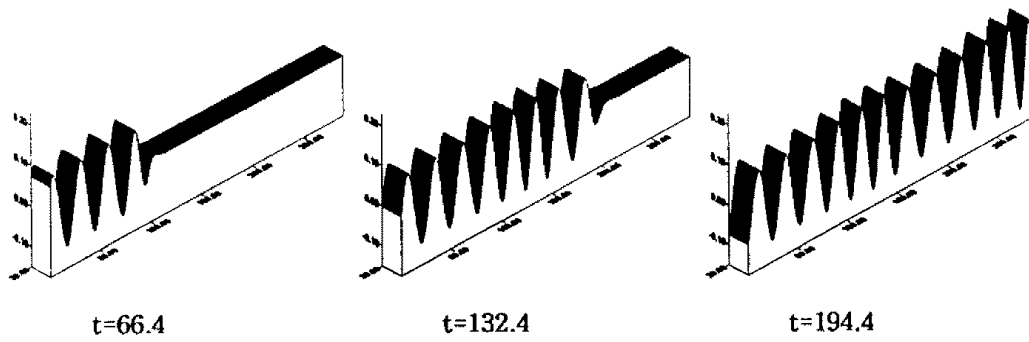
## 5. 결 론

수치실험결과 해저수심이 급격히 변화하는 지역에서 2차파의 발생을 예측할 수 있으며 진폭이 증가하는 양상을 보였고, 해저 shoal에 의한 방사상의 2차파가 발생함을 알 수 있었다.

비선형성은 변조된 고주파대역의 변조파를 형성하면서 급격한 변화를 가져오는 현상을 나타냈고, 분산성은 shoal에 의해 높아진 파고를 사방으로 퍼져 나가게 하는 현상을 나타냈다. 비선형 및 분산을 고려하였을 경우 실제 파랑변형현상을 가장 잘 표현하는 것으로 나타났다.

예상했던 대로 파의 회절현상을 명확히 관찰할 수 있었다. shoal에 의해 파고가 증폭된 초기파는 파봉선을 따라 에너지의 옆 방향 이동현상을 보였다. 증폭된 파고는 shoal에서 멀어짐에 따라 파고의 감소 현상을 보이며 최초파고로 복귀하는 경향을 보였다.

또한, 최초의 sine파가 크노이드파형을 가지다가

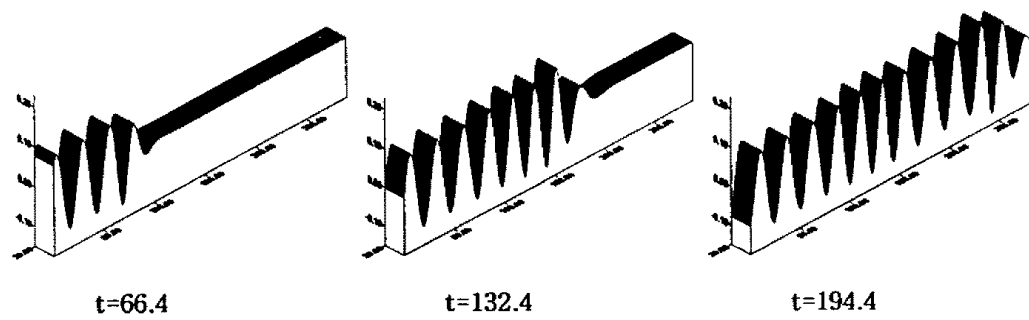


t=66.4

t=132.4

t=194.4

(a) Linear and non-dispersive sine wave

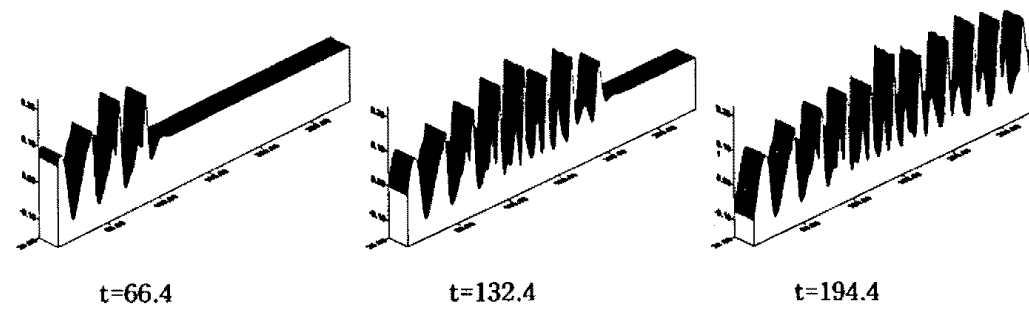


t=66.4

t=132.4

t=194.4

(b) Linear and dispersive sine wave

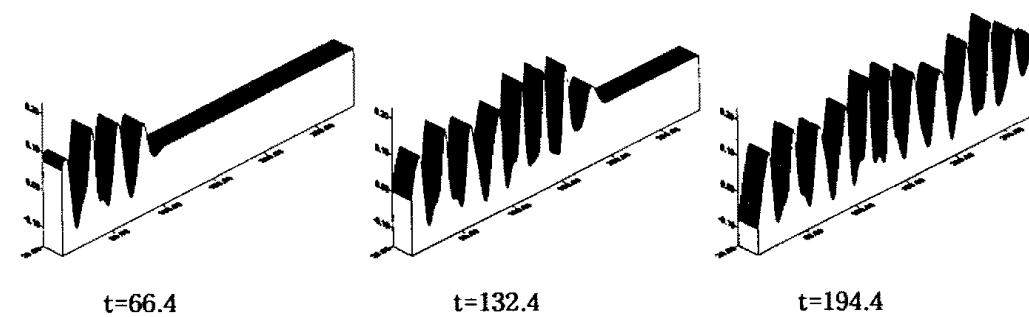


t=66.4

t=132.4

t=194.4

(b) Non-linear and non-dispersive sine wave



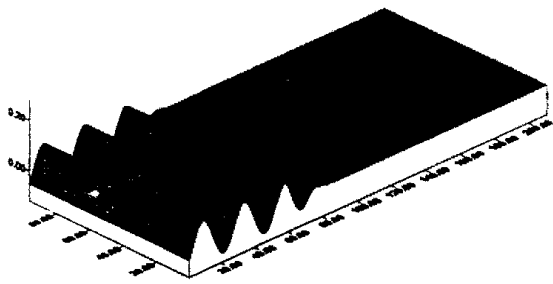
t=66.4

t=132.4

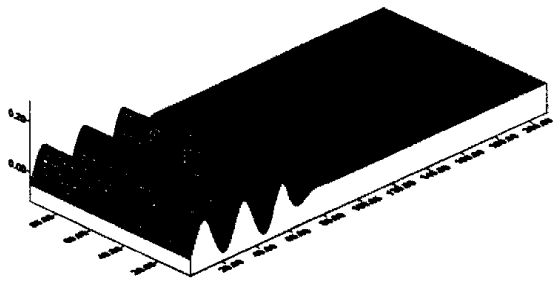
t=194.4

(d) Non-linear and dispersive sine wave

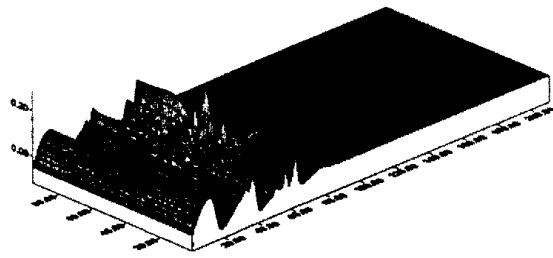
Fig. 8 Surface elevation over a shoal(1-dimensional domain)



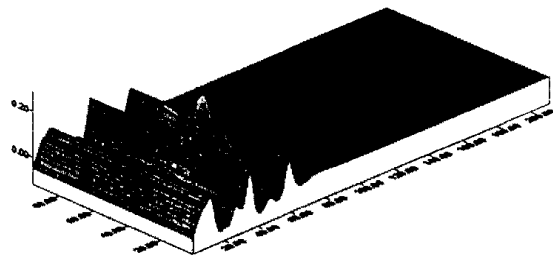
(a)  $\alpha=0, \beta=0$



(b)  $\alpha=0, \beta=1$

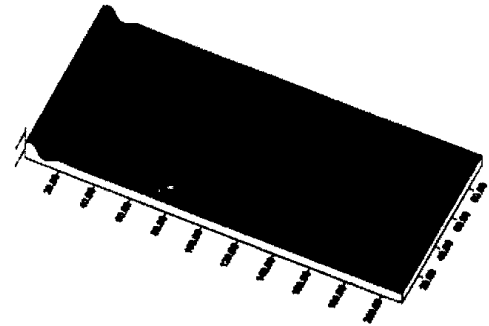


(c)  $\alpha=1, \beta=0$

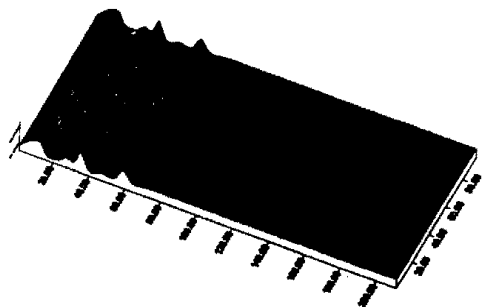


(d)  $\alpha=1, \beta=1$

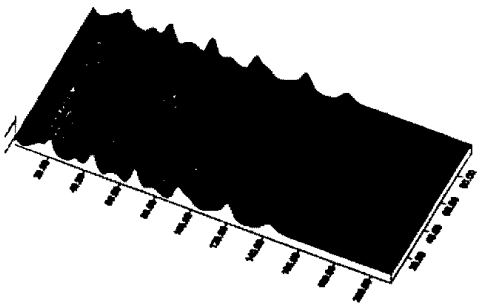
Fig. 9 Surface elevation over a shoal ( $t=66.4$ )



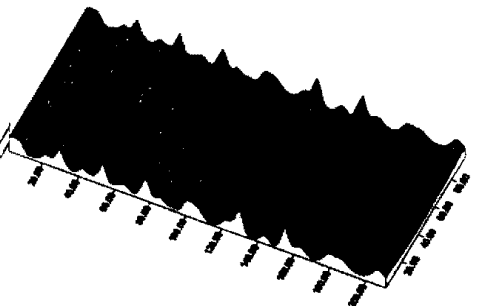
(a)  $t=32.4$



(b)  $t=66.4$



(c)  $t=132.4$



(d)  $t=198.4$

Fig. 10 Surface elevation, non-linear and dispersive wave each time step

shoal 위에서 첨두파를 보이고 회절, 굴절, 진폭분산, 2차파의 생성현상을 보이면서 전파되어 왜곡된 파랑장을 보이지만 그 주기성을 계속 유지하고 있음을 알 수 있다.

이상으로 본 연구를 통해 천해지역에서 파랑의 진폭분산 및 2차파의 발생과 관련한 복잡한 변환특성을 파악할 수 있게 되었으며, 비록 Boussinesq 방정식을 통해 파랑변형과정을 모델할 수 있었으나, 2차파의 발생 메카니즘에 대한 완전한 이해는 어려웠다. 개발한 모델을 통해 쇄파되기 전까지 파랑의 변환특성을 효과적으로 파악할 수 있었으며, 나아가 해안선의 변화, 해저지형의 변화와 같은 실제문제에도 추후 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

### 참고문헌

- 1) 片宗根, 1996. 波動論. 明知大學校 出版部, pp. 204-262.
- 2) 後藤智明, 1984. アーセル數が大きい場合の非線形分散波の方程式. 土木學會論文集 第351号/II-2, pp.193-201.
- 3) Beji, S., Battjes, J.A. 1994. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. Coastal Engineering. vol. 23, pp. 1-16.
- 4) Dean, R.G., Dalrymple, R.A. 1984. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. Prentice-Hall, Inc., N.J.
- 5) Nwogu, O. 1993. Alternative form Boussinesq equations for nearshore wave propagation. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering. vol. 119, No. 6, pp. 618-638.
- 6) Peeregrine, D.H. 1967. Long waves on a beach. Journal of Fluid Mechanics, vol. 27, part 4, pp. 815-827.
- 7) Schember, H. 1982. A new Model for three-dimensional nonlinear dispersive long waves. Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, Ca.
- 8) Wu, T.Y. 1981. Long waves in ocean and coastal waters. Journal of Engineering Mechanics Div. ASCE. vol. 107, no. EM3, Proc. Paper 16346, pp. 501-522.