

☒ 연구논문

공유환경효과를 고려한 수리가능한 시스템의 수명과 고장회수의 결합모형 개발

박희창

창원대학교 자연과학대학 통계학과

이석훈

충남대학교 자연과학대학 통계학과

Joint Modeling of Death Times and Number of Failures for Repairable Systems using a Shared Frailty Model

Hee-Chang Park

Dept. of Statistics, Changwon National University

Suk-Hoon Lee

Dept. of Statistics, Chungnam National University

Abstract

We consider the problem of modeling count data where the observation period is determined by the life time of the system under study. We assume random effects or a frailty model to allow for a possible association between the death times and the counts. We assume that, given a random effect or a frailty, the death times follow a Weibull distribution with a hazard rate. For the counts, given a frailty, a Poisson process is assumed with the intensity depending on time. A gamma distribution is assumed for the frailty model. Maximum likelihood estimators of the model parameters are obtained. A model for the time to death and the number of failures system received is constructed and consequences of the model are examined.

1. 서론

일반적으로 시계열적인 연구(longitudinal studies)에서 일어나는 문제는 임의의 시간구간에서 반복적으로 일어나는 사건의 발생회수에 대해 모형화하는 것이다. 구체적으로는 제조장비, 전자제품, 자동차, 또는 컴퓨터 등과 같은 수리가 가능한 시스템이나 그 시스템을 구성하고 있는 부품의 사용기간 동안 발생한 고장회수나 A/S센터를 찾는 회수 등을 그 예로 들 수 있다. 이러한 반복적으로 발생하는 사건에 대한 분석방법은 오랫동안 연구되어 왔는데, Cox와 Lewis(1966)는 반복적으로 발생하는 사건의 분석방법의 여러 가지 양상을 논의하였고, Lawless(1987)와 Thall(1988), 그리고 Lawless와 Nadeau(1995)는 여러 가지 시간간격에서 사건발생의 기대값에 근거한 방법을 독자적으로 발표하였다. Wei 등(1989)은 특정한 사건이 발생할 때까지의 시간에 대한 분석방법을 토의하였으며, Aalen과 Husebye(1991)는 사건발생간격에 대해 언급하였다. 또한 Andersen 등(1993)은 counting process적인 접근으로 반복적으로 발생하는 사건의 분석방법을 논의하였다.

대부분의 경우에 어떤 정해진 시간과 그 때까지의 사건누적발생회수가 독립이라는 가정이 합리적이지 못하다. 수리가 가능한 시스템의 경우에서 이러한 문제를 고려할 때 고장발생회수가 더 많은 시스템은 그렇지 않은 시스템에 비해 그의 기능을 유지하는데 있어서 더 많은 문제를 안고 있는 동시에 고장발생위험이 훨씬 더 높은 것이 사실이므로 수명과 누적고장발생회수간에는 어떤 관련성이 있는 것으로 볼 수 있다. 이 논문에서는 수리가 가능한 시스템의 수명과 누적고장발생회수간에 관련성이 있는 모형을 고려하기 위해 이들 두 확률변량에 대한 결합모형에 소위 공유 환경효과모형(shared frailty model)을 도입하고자 한다. 이러한 환경효과모형은 Vaupel(1979) 등에 의해 처음으로 소개되었는데, 그들은 일변량 생존모형에서 개인의 이질성(heterogeneity)을 설명하기 위해 환경효과모형을 도입하였다. 이후로 신뢰성, 생존분석, 그리고 인구학 등 여러 분야에서 많은 학자들에 의해 연구되어 왔는데, 신뢰성 이론분야에서는 Lee와 Klein(1986, 1988, 1989), Lindley와 Singpurwalla(1986), Nayak(1987), Bandyopadhyay와 Basu(1990), Gupta와 Gupta(1990), 그리고 Whitmore와 Lee(1991) 등에서 그 사용예를 찾아볼 수 있다. 특히 Lawless(1987)는 사건발생회수(count data)에 관한 자료를 모형화하기 위해 frailty모형을 이용하였다.

이 논문에서는 특별히 공유환경효과를 나타내는 분포를 선행연구자들이 많이 사용하여 온 감마분포를 가정하여 수명과 고장발생회수간의 결합모형을 개발하고자 한다. 2절에서는 모형의 개발 및 특성을 기술하고, 3절에서는 모형에 포함된 모수의 추론과정을 논의하고자 한다. 그리고 4절에서는 개발된 모형을 모의실험을 통해 얻어진 자료에 적용하는 동시에 환경효과를 고려한 모형과 이를 고려하지 않은 독립모형간의 비교를 통하여 환경효과에 영향을 고찰하고자 한다. 또한 모형의 특성을 파악할 수 있는 여러 가지 특성값들로부터 시스템에 행해진 고장발생회수가 시스템의 수명에 어떻게 영향을 미치는가를 조사하고자 한다.

2. 모형

이 절에서는 시스템의 수명 X 와 시간 t 까지 일어난 고장발생회수 $N(t)$ 의 결합분포에 대한 모형화를 고려하고자 한다. 먼저 고장률과 고장발생확률에 공통적으로 영향을 미치는 공유환경효과를 w 로 표기한다. 이러한 환경효과는 각 시스템마다 다른 값을 취할 수 있는데, 이는 Klein 등(1992)이 고려한 일반적인 생존분석모형에서의 frailty 모형이나, Lawless(1987)가 토의한 사건발생회수의 자료를 모형화하는 데 있어서 관측 불가능한 이질성에 대한 모형과 유사하다. 따라서 공유환경효과는 사건발생회수와 수명 모두에 영향을 미치고는 있으나 관측이 불가능한 시스템 특유의 또는 환경적인 요인을 나타낸다. 여기서 w 는 평균이 1이고, 분산이 θ 인 다음과 같은 감마분포를 따르는 것으로 가정한다.

$$f(w) = \frac{w^{1/\theta-1} e^{-w/\theta}}{\Gamma(1/\theta) \theta^{1/\theta}} \quad (2.1)$$

공유환경효과를 나타내는 확률변수 W 의 값이 w 로 주어졌을 때 시스템의 수명은 다음과 같은 위험률을 갖는 Weibull 분포를 따르는 것으로 가정한다.

$$h(t|w) = w\lambda t^{\alpha-1}, \quad t \geq 0, \alpha \geq 0 \quad (2.2)$$

고장발생회수에 대해서는 W 의 값이 w 로 주어졌을 때 $N(t)$ 는 다음과 같은 비율을 갖는 Poisson 과정을 따르는 것으로 가정한다.

$$\eta(t|w) = w\mu t^\beta, \quad t \geq 0, \beta \geq 0 \quad (2.3)$$

또한 W 가 주어졌을 때, 고장발생회수 $N(t)$ 와 수명 X 는 상호 독립적이라고 가정한다.

이러한 가정 하에서 개발된 모형의 성질을 규명하기 위해 먼저 공유환경효과 W 가 주어졌을 때 X 와 $N(\cdot)$ 의 결합확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P[X=t, N(s)=k | w] &= P[X=t, N(\min(s, t))=k | w] \\ &= w\lambda t^{\alpha-1} \exp[-w\lambda t^\alpha] \frac{[w\mu \min(s, t)^\beta]^k \exp[-w\mu \min(s, t)^\beta]}{k!} \end{aligned} \quad (2.4)$$

또한 $N(t)$ 는 관찰기간 t 의 값이 시스템의 수명보다 짧은 경우에만 관측가능하며, 만약 $X > t$ 인 경우에는 $N(t) = N(X)$ 가 된다는 사실 하에서 W 가 주어졌을 때 t 보다 큰 값을 취하는 X 와 $N(\cdot)$ 의 결합확률은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} P[X > t, N[s] = k | w] &= \int_t^\infty P[X = u, N[s] = k | w] du, \quad t \geq s \\ &= \int_t^s P[X = u, N[u] = k | w] du + P[X > s, N[s] = k | w], \quad t < s \end{aligned} \quad (2.5)$$

그런데 W 는 관측이 불가능하므로 식(2.4)를 W 에 대해 기대값을 취하면 다음과 같이 X 와 $N(\cdot)$ 의 결합확률을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P[X = t, N(s) = k] &= \int_0^\infty P[X = t, N(s) = k | w] \cdot \frac{w^{1/\theta-1} \exp[-w/\theta]}{\Gamma(1/\theta) \theta^{1/\theta}} dw \\ &= \frac{\Gamma(1/\theta + k + 1)}{k! \Gamma(1/\theta)} [\lambda \alpha \theta t^{\alpha-1}] [\mu \theta \min(s, t)^\beta]^k \\ &\quad \times [1 + \lambda \theta t^\alpha + \mu \theta \min(s, t)^\beta]^{-(1/\theta + k + 1)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

여기서 만약 θ 의 값이 0이면 W 는 1이 되어서 X 와 $N(\cdot)$ 는 각각 서로 독립인 Weibull 확률변수와 Poisson 확률변수가 된다. 따라서 우리는 이 사실로부터 수명과 고장발생회수간의 독립성에 관한 검정을 $H_0: \theta = 0$ 이라는 귀무가설을 통하여 검정할 수 있다.

이와 마찬가지로 식(2.5)로부터 t 보다 큰 값을 취하는 X 와 $N(\cdot)$ 의 결합확률을 구할 수 있는데, 먼저 $t \geq s$ 인 경우에는 다음과 같다.

$$P[X > t, N(s) = k] = \frac{\Gamma(1/\theta + k)}{k! \Gamma(1/\theta)} [\mu \theta s^\beta]^k [1 + \lambda \theta t^\alpha + \mu \theta s^\beta]^{-(1/\theta + k)} \quad (2.7)$$

또한 $s > t$ 인 경우에는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} P[X > t, N(s) = k] &= \int_t^s P[X = u, N(u) = k] du + P[X > s, N(s) = k] \\ &= \frac{\Gamma(1/\theta + k + 1)}{k! \Gamma(1/\theta)} \lambda \mu^k \alpha \theta^{k+1} \int_t^s u^{k\beta + \alpha - 1} (1 + \lambda \theta u^\alpha + \mu \theta u^\beta)^{-(1/\theta + k + 1)} du \\ &\quad + \frac{\Gamma(1/\theta + k)}{k! \Gamma(1/\theta)} (\mu \theta s^\beta)^k [1 + \lambda \theta s^\alpha + \mu \theta s^\beta]^{-(1/\theta + k)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

이러한 모형에 대해 X 의 주변분포를 구할 수 있는데, 이는 다음과 같은 생존함수를 갖는 일변량 Burr 분포가 된다.

$$S(t) = (1 + \lambda\theta t^\alpha)^{-1/\theta} \tag{2.9}$$

따라서 본 연구에서 고찰하고자 하는 상황이 Burr 분포에 대한 하나의 물리적인 설명을 제공한다. $s \leq t$ 인 경우 X 의 값이 t 보다 클 때 $N(s)$ 의 조건부확률은 다음과 같은 확률질량함수를 가지는 Pascal 분포를 따르게 된다.

$$P[N(s) = k | X > t] = \binom{1/\theta + k - 1}{k} q^k p^{1/\theta} \tag{2.10}$$

여기서 $q = \mu\theta s^\beta / (1 + \lambda\theta t^\alpha + \mu\theta s^\beta)$ 이고, $p = 1 - q$ 이다. 따라서 t 시간까지 작동되는 시스템이 시간 s 까지 받은 평균고장발생회수와 조건부분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[N(s) | X > t] &= q / (\theta p) \\ V[N(s) | X > t] &= q / (\theta p^2) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$N(s)$ 의 주변분포를 얻기 위해서는 $P[X \geq 0, N(s) = k]$ 을 구하면 되는데, 이는 식 (2.8)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} P[N(s) = k] &= \int_0^s P[X = u, N(u) = k] du + P[X > s, N(s) = k] \\ &= \frac{\Gamma(1/\theta + k + 1)}{k! \Gamma(1/\theta)} \lambda \mu^k \alpha \theta^{k+1} \int_0^s u^{k\beta + \alpha - 1} (1 + \lambda\theta u^\alpha + \mu\theta u^\beta)^{-(1/\theta + k + 1)} du \\ &\quad + \frac{\Gamma(1/\theta + k)}{k! \Gamma(1/\theta)} (\mu\theta s^\beta)^k [1 + \lambda\theta s^\alpha + \mu\theta s^\beta]^{-(1/\theta + k)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

이러한 확률값은 수치 해석적으로 얻어질 수 있다.

3. 모수의 추정

모형에 포함된 모수의 추정은 관찰기간동안 고장난 시스템의 총고장발생회수에 근거하고 있다. T_i 를 i 번째 시스템의 관찰기간이라 하고, δ_i 를 i 번째 시스템의 폐기

여부를 나타내는 지시변수라 하자. 즉, 시스템이 폐기되었을 경우에는 δ_i 의 값이 1이 되며, 시스템이 중도 절단된 경우에는 δ_i 의 값이 0이 된다. $N_i = N_i(T_i)$ 를 i 번째 시스템에 대해 취해진 총고장회수라 하자. 본 논문에서는 Lawless(1987)의 연구와는 달리 각 시스템의 수명과 전체 고장발생회수로 구성된 자료에 대하여 분석하는 것이다. 관찰기간 동안 폐기된 시스템들에 대한 확률값인 식(2.6)의 $P[X = T_i, N(T_i) = N_i]$ 와 중도 절단된 시스템들에 대한 확률값인 식(2.7)의 $P[X > T_i, N(T_i) = N_i]$ 을 이용하여 우도함수를 구할 수 있다. 표본의 크기 n 을 근거로 하여 대수우도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 LL = & \sum_{i=1}^n \{ \ln[\Gamma(1/\theta + N_i + \delta_i)] + [\delta_i(\alpha - 1)] + N_i \mu \ln[T_i] + \delta_i(\ln[\alpha] + \ln[\lambda]) \\
 & + N_i \ln[\mu] + (N_i + \delta_i) \ln[\theta] - (1/\theta + N_i + \delta_i) \ln[1 + \lambda \theta T_i^\alpha + \mu \theta T_i^\beta] \\
 & - \ln[N_i!] \} - n \ln[\Gamma(1/\theta)], \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

여기서 $\theta > 0$ 이다. $\theta = 0$ 인 경우에는 대수우도함수가 다음의 $L_1(\lambda, \alpha)$ 와 $L_2(\mu, \beta)$ 의 합으로 얻어지는데, 전자는 일반적인 Weibull 우도함수이고, 후자는 Poisson 우도함수이다.

$$\begin{aligned}
 L_1(\lambda, \alpha) &= \sum_{i=1}^n [\delta_i \{ (\alpha - 1) \ln[T_i] + \ln[\alpha] + \ln[\lambda] \} - \lambda T_i^\alpha] \\
 L_2(\mu, \beta) &= \sum_{i=1}^n [N_i \{ \beta \ln[T_i] + \ln[\mu] \} - \mu T_i^\beta - \ln[N_i!]] \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

모수 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$, 그리고 θ 에 대한 추정값은 대수우도함수 LL 을 수치 해석적으로 최대화함으로써 얻을 수 있다. LL 의 각 모수에 대한 1차 편미분값인 score 통계량과 관측된 정보행렬을 부록에 제시하였는데, 이는 각 모수의 2차 편도함수의 음의 값으로 구성된다. 최우추정량의 공분산 행렬은 모수의 관측된 정보행렬(observed information matrix)의 역행렬로부터 얻을 수 있다. 또한 모형에 포함된 모수에 대한 검정은 Wald 검정법, score 검정법, 그리고 우도비 검정법 등을 이용하여 수행할 수 있다.(이에 대해 자세한 내용은 Klein과 Moeschberger(1997)을 참조하기 바람.)

4. 예제

이 절에서는 모의실험을 통하여 얻어진 자료를 이용하여 위에서 토의한 모형을 예

제를 통하여 고찰하고자 한다. 먼저 평균이 1이고, 분산이 3.0인 감마분포 $\Gamma(1/3.0, 3.0)$ 으로부터 공유환경효과를 나타내는 w 의 값을 생성한 후 와이블분포 $Weibull(\lambda w, \alpha)$ 로부터 시간 X 를 생성하는데, $\lambda=0.1, \alpha=0.8$ 로 한다. 중도절단 시간인 C 는 지수분포 $Exponential(1.0)$ 으로부터 생성하여 $T=Min(X, C)$ 로 두며, 만약 $X \leq C$ 이면 $\delta=1$ 로 하고, 그렇지 않은 경우에는 $\delta=0$ 으로 한다. 또한 고장 발생회수 N 은 Poisson분포 $Poisson(w\mu T^\beta)$ 로부터 생성하는데, 여기서 $\mu=0.2, \beta=2.0$ 의 값을 이용한다. 이러한 방법으로 얻어진 300개의 자료를 이용하여 계산된 추정량을 <표 1>에 제시하였다. 모형에 포함된 모수의 추론을 위해 본 논문에서는 식(3.1)의 우도함수를 수치적으로 최대화하기 위하여 Marquardt(1963)의 방법을 사용하였는데, 이는 steepest decent법과 Newton-Raphson기법을 절충한 수치 해석적 방법이다. 이 방법을 사용한 이유는 개발된 모형에 포함된 모수의 초기추정값을 얻기가 어려울 뿐만 아니라 추정해야 할 모수의 수가 많기 때문이다. 이 기법에 대한 상세한 내용은 Klein과 Moeschberger(1997)에 나타나 있다. 또한 모수의 추정과정을 위해 FORTRAN으로 프로그램을 작성하였다.

< 표 1 > 모형에 포함된 모수의 최우추정량

모수	추정값	표준오차
λ	0.129	0.0186
μ	1.761	0.1287
α	0.336	0.0365
β	0.048	0.0238
θ	0.382	0.0892

θ 에 대한 Wald통계량의 값은 18.34로서 이에 대한 유의확률값은 0.00001이므로 시스템의 수명과 고장발생회수간에는 관련성이 없다는 귀무가설 $H_0: \theta=0$ 가 강하게 기각되어진다. 이는 모수공간의 경계상에 있는 모수에 관한 검정이므로 우도비검정이 더 적당한 것으로 생각되어진다. $\theta=0$ 일 때, X 와 $N[\cdot]$ 은 독립이므로 우도함수는 전형적인 Weibull 우도함수와 Poisson 우도함수를 곱한 값이 된다. 위에서 얻어진 자료를 이용하여 독립모형에 포함된 모수의 추정량을 구하면 <표 2>와 같다.

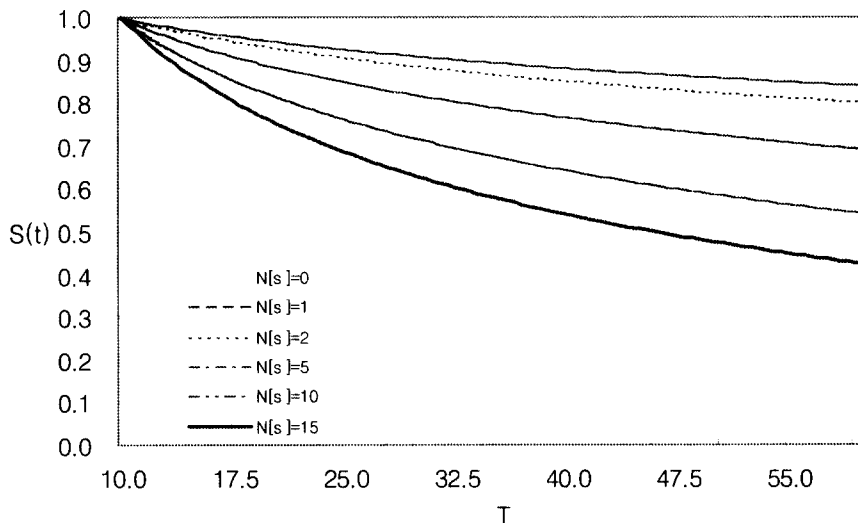
이 두 표를 비교해 볼 때, θ 가 0이 아님에도 불구하고 즉, X 와 $N[\cdot]$ 가 독립이 아님에도 불구하고 독립모형을 사용하면 잘못된 결론에 도달하게 된다. 위에서 얻어진 모형에 대한 대수우도함수의 값은 -689.32이고, 독립모형으로부터 얻어진 대수우도함수의 값은 -817.38이다. 이로부터 우도비검정을 실시해 본 결과, 우도비는 256.12로 이에 대한 유의확률은 거의 0에 가까우므로 이는 매우 유의한 것으로 결론을 내릴 수 있다. 또한 <표 1>과 <표 2>를 비교해보면 시스템의 수명과 고장발생회수간의 유의

한 관련성을 무시한 효과를 알 수 있는데, 특히 기저 밀도함수인 μt^β 의 값이 독립모형인 경우에는 시간에 따라 감소하는 반면에 ($\beta = -0.036$), 공유환경효과를 고려한 모형에서는 시간에 따라 증가하는 것을 알 수 있다. 이와 같이 시스템의 수명과 고장 발생회수간의 유의한 관련성이 존재함에도 불구하고 이를 무시한 독립모형을 사용한 경우에는 잘못된 추론에 도달하게 된다.

< 표 2 > 독립모형에 포함된 모수의 최우추정량

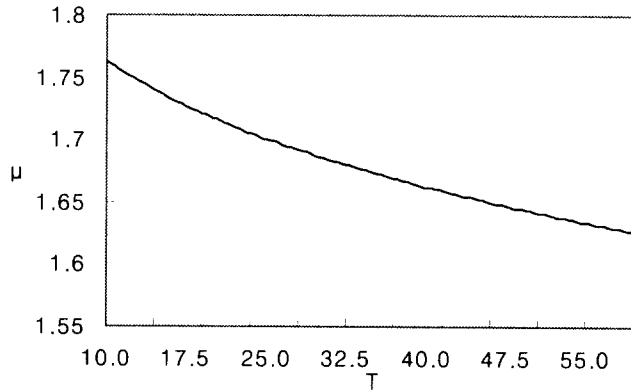
구분	모수	추정값	표준오차
수명	λ	0.125	0.0171
	α	0.318	0.0348
고장횟수	μ	1.984	0.0973
	β	-0.036	0.0198

본 연구에서 개발된 모형은 시스템에 발생한 고장회수가 시스템의 수명에 어떻게 영향을 미치는가를 조사하는 데에도 이용될 수 있다. 모수의 추정값과 식(2.12)를 이용하여 $N(t) = k$ 의 주변확률을 추정할 수 있다. 이를 위해서는 수식에 포함된 적분계산을 수치해석적으로 해결해야 하는데, 여기서는 24점 Gauss Legendre 공식을 이용하였다. 또한 이 추정값과 식(2.7)을 이용하여 시간 s 까지 k 회의 고장이 발생한 시스템이 그 시점에서 작동될 조건부 생존함수 즉, $P[X > t | N(s) = k, X \geq s]$ 를 추정할 수 있다.

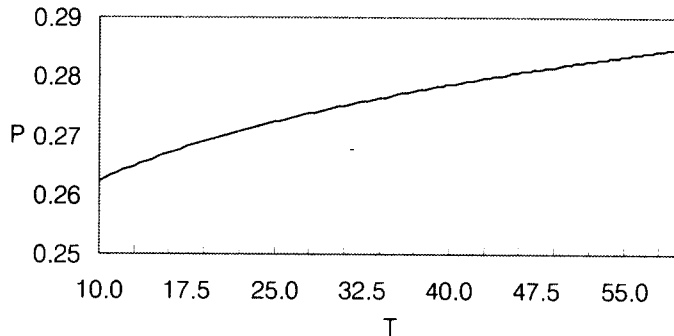


< 그림 1 > 시스템의 수명에 대한 고장발생회수의 효과

<그림 1>은 $s=10$ 개월일 때 고장발생회수가 각각 0, 1, 2, 5, 10, 15회인 경우에 대해 시스템의 수명에 대한 고장발생회수의 효과를 보여 준다. 이 그림을 통해 알 수 있는 사실은 15개월 후에 추정된 작동확률이 가장 높은 집단은 고장이 한 번도 나지 않은 시스템의 경우로 약 97.8%가 되고, 작동확률이 가장 낮은 집단은 고장발생회수가 15회인 시스템의 경우로 약 85.8%가 된다. 또한 t 시점까지 작동되는 시스템이 10개월까지 받은 평균고장발생회수의 변화를 알아보기 위해 t 의 변화에 따른 평균고장발생회수의 변화하는 양상을 <그림 2>에 제시하였다. 또한 <그림 3>에는 t 시점까지 작동되는 시스템이 10개월까지 한 번도 고장나지 않을 조건부 확률에 대한 변화를 시간 t 에 대해 작성하였다.



< 그림 2 > 시간의 변화에 따른 평균고장발생회수



< 그림 3 > 시간의 변화에 따른 한 번도 고장나지 않을 조건부 확률

5. 결론

이 논문에서는 공유환경효과를 고려한 수리가능한 시스템의 수명과 고장발생회수간의 결합모형을 개발하여 모형의 특성을 파악하고, 모형에 포함된 모수의 추론과정을 살펴보았다. 모의실험을 통해 얻어진 자료에 개발된 모형을 적용하는 동시에 공유환경효과를 고려한 모형과 이를 고려하지 않은 독립모형간의 비교를 통하여 공유환경효과에의 영향을 고찰하였다. 이로부터 시스템의 수명과 고장발생회수간의 유의한 관련성이 존재함에도 불구하고 이를 무시한 독립모형을 사용한 경우에는 잘못된 추론에 도달하게 된다는 사실을 발견하였다. 또한 이 논문에서 개발된 모형을 이용하여 시스템의 고장발생회수가 수명에 미치는 영향을 조사하였는데, 작동확률이 가장 높은 집단은 고장이 한 번도 나지 않은 시스템의 경우이고, 작동확률이 가장 낮은 집단은 고장발생이 가장 빈번한 시스템의 경우로 나타났다.

부록

대수우도함수의 1차 편도함수인 score 통계량은 다음과 같다.

$$\frac{\partial LL}{\partial \lambda} = \frac{D}{\lambda} - \sum_{i=1}^n \frac{M_i T_i^\alpha}{Y_i}; \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial LL}{\partial \mu} = \frac{N_T}{\mu} - \sum_{i=1}^n \frac{M_i T_i^\beta}{Y_i}; \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial LL}{\partial \alpha} = \frac{D}{\alpha} + S_{DLT} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{M_i \ln[T_i] T_i^\alpha}{Y_i}; \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial LL}{\partial \beta} = S_{NLT} - \mu \sum_{i=1}^n \frac{M_i \ln[T_i] T_i^\beta}{Y_i}; \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial LL}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \Psi(M_i) + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln[Y_i] + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{Y_i} + \frac{n}{\theta^2} \left\{ \ln[\theta] - 1 + \Psi\left(\frac{1}{\theta}\right) \right\}; \quad (\text{A.5})$$

여기서 $\Psi(\cdot)$ 는 digamma함수이다. D 는 폐기된 시스템의 수이고 N_T 은 전체시스템의 총고장회수이며, $M_i = 1/\theta + \delta_i + N_i$, $Y_i = 1/\theta + \lambda T_i^\alpha + \mu T_i^\beta$, $S_{DLT} = \sum_{i=1}^n \delta_i \ln[T_i]$,

그리고 $S_{NLT} = \sum_{i=1}^n N_i \ln[T_i]$ 이다.

대수우도함수의 2차 편도함수는 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \lambda^2} = -\frac{D}{\lambda^2} + \sum_{i=1}^n \frac{M_i T_i^{2\alpha}}{Y_i^2}; \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \lambda \partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{M_i T_i^{\alpha+\beta}}{Y_i^2}; \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \lambda \partial \alpha} = -\sum_{i=1}^n \frac{M_i \ln[T_i] T_i^\alpha (1/\theta + \mu T_i^\beta)}{Y_i^2}; \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \lambda \partial \beta} = \mu \sum_{i=1}^n \frac{M_i \ln[T_i] T_i^{\alpha+\beta}}{Y_i^2}; \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \lambda \partial \theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{T_i^\alpha}{Y_i} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{M_i T_i^\alpha}{Y_i^2}; \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \mu^2} = -\frac{TN}{\mu^2} + \sum_{i=1}^n \frac{M_i T_i^{2\beta}}{Y_i^2}; \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \mu \partial \alpha} = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{M_i \ln[T_i] T_i^{\alpha+\beta}}{Y_i^2}; \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \mu \partial \beta} = -\sum_{i=1}^n \frac{M_i \ln[T_i] T_i^\beta (1/\theta + \lambda T_i^\alpha)}{Y_i^2}; \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \mu \partial \theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{T_i^\beta}{Y_i} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{M_i T_i^\beta}{Y_i^2}; \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha^2} = -\frac{D}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{M_i \{\ln[T_i]\}^2 T_i^\alpha (1/\theta + \mu T_i^\beta)}{Y_i^2}; \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \mu \sum_{i=1}^n \frac{M_i \{\ln[T_i]\}^2 T_i^{\alpha+\beta}}{Y_i^2}; \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \theta} = \frac{\lambda}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{\ln[T_i] T_i^\alpha}{Y_i} - \frac{\lambda}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{M_i \ln[T_i] T_i^\alpha}{Y_i^2}; \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta^2} = -\mu \sum_{i=1}^n \frac{M_i \{\ln[T_i]\}^2 T_i^\beta (1/\theta + \lambda T_i^\alpha)}{Y_i^2}; \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \theta} = \frac{\mu}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{\ln[T_i] T_i^\beta}{Y_i} - \frac{\mu}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \frac{M_i \ln[T_i] T_i^\beta}{Y_i^2}; \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 LL}{\partial \theta^2} &= \frac{2}{\theta^3} \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \Psi(M_i) - \ln[Y_i] - \frac{M_i}{Y_i} \right\} + \frac{N_T}{2} \left\{ 3 - 2\ln[\theta] - 2\Psi\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta} \Psi\left(\frac{1}{\theta}\right) \right\} \right] \\ &+ \frac{1}{\theta^4} \sum_{i=1}^n \left\{ \Psi(M_i) - \frac{1}{Y_i} \left(2 - \frac{M_i}{Y_i} \right) \right\}; \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

여기서 $\Psi(\cdot)$ 는 trigamma함수이다.

참고문헌

- [1] Aalen, O.O. and Husebye, E.(1991), "Statistical Analysis of Repeated Events Forming Renewal Processes," *Statistics in Medicine*, vol. 10, pp. 1227-1240.
- [2] Anderson, P.K., Borgan, O., Gill, R.D., and Keiding, N.(1993), *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer-Verlag, New York.
- [3] Bandyopadhyay, D. and Basu, A.P.(1990), "On a Generalization of a Model by Lindly and Singpurwalla," *Annals of Applied Probability*, vol. 22, pp. 498-500.
- [4] Cox, D.R. and Lewis, P.A.W.(1966), *The Statistical Analysis of Series of Events*, Methuen, London.
- [5] Gupta, P.L. and Gupta, R.D.(1990), "A Bivariate Environmental Stress Model," *Advanced in Associations in Applied Probability*, vol. 22, pp. 501-503.
- [6] Klein, J.P. and Moeschberger, M.L.(1997), *Survival Analysis: Techniques For Censored And Truncated Data*, Springer-Verlag, New York.
- [7] Klein, J.P., Moeschberger, M.L., Li, Y.H. and Wang S.T.(1992), "Estimating Random Effects in The Framingham Heart Study," in J.P. Klein and P. Goel, Editors, *Survival Analysis: State Of The Art*, pp. 99-120, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [8] Lawless, J.F.(1987), "Regression Methods For Poisson Process Data," *JASA*, vol. 82, pp. 808-815.
- [9] Lawless, J.F. and Nadeau, C.(1995), "Some Simple Robust Methods for the Analysis of Recurrent Events," *Technometrics*, vol. 35, pp. 158-168.
- [10] Lee, S.(1986), "Inference for a bivariate survival function induced through the environment," *Ph.D. Dissertation*, The Ohio State University.
- [11] Lee, S. and Klein, J.P.(1988), "Bivariate Models with a Random Environmental Factor," *Indian Journal of Productivity, Reliability and Quality Control*, 13,

- pp. 1-18.
- [12] Lee, S. and Klein, J.P.(1989), "Statistical Methods for Combining Laboratory and Field Data Based On a Random Environmental Stress Model," *Recent Developments in Statistics and Their Applications*, Klein and Lee, Eds., pp. 87-116.
- [13] Lindley, D.V. and Singpurwalla, N.A.(1986), "Multivariate Distributions for the Reliability of a System of Components Sharing a Common Environment," *Journal of Applied Probability*, vol. 23, pp. 418-431.
- [14] Marquardt, D.(1963), "An Algorithm For Least-Squares Estimation Of Non-Linear Parameters," *SIAM Journal Of Applied Mathematics*, vol. 11, pp. 431-441.
- [15] Nayak, T.K.(1987), "Multivariate Lomax Distribution: Properties and Usefulness in Reliability Theory," *Journal Of Applied Probability*, vol. 24, pp. 170-177.
- [16] Thall, P.F.(1988), "Mixed Poisson Regression Models for Longitudinal Interval Count Data," *Biometrics*, vol. 44, pp. 197-209.
- [17] Vaupel, J.W., Manton, K.G. and Stallard, E.(1979), "The Impact of Heterogeneity in Individual Frailty and the Dynamics of Mortality," *Demography*, vol. 16, pp. 439-454.
- [18] Wei, L.J., Lin, D.Y. and Weissfeld, L.(1989), "Regression Analysis of Multivariate Incomplete Failure Time Data by Modeling Marginal Distributions," *JASA*, vol. 84, pp. 1065-1073.
- [19] Whitmore, G.A. and Lee, M.L.T.(1991), "A Multivariate Survival Distribution Generated by an Inverse Gaussian Mixture of Exponentials," *Technometrics*, vol. 33, pp. 9-50.