

TSK 퍼지 시스템의 안정도 해석

Stability Analysis of TSK Fuzzy Systems

강근택 · 이원창

Geuntaek Kang and Wonchang Lee

부경대학교 공과대학 전자공학과

요 약

본 논문에서는 넓은 범위의 비선형 시스템들을 잘 표현할 수 있는 TSK (Takagai -Sugeno-Kang) 퍼지 시스템의 평형점의 지역 안정도를 해석하는 방법을 제시한다. TSK 퍼지 모델은 TSK 퍼지 규칙들로 구성되며, 각 규칙의 결론부는 상수항을 갖는 선형 입출력 방정식이다. TSK 퍼지 모델은 다수의 평형점을 가질 수 있으며, 각 평형점은 안정도에 있어서 역시 서로 다른 특징을 가질 수 있다. 평형점의 지역 안정도는 평형점 부근에서 TSK 퍼지 모델의 선형화로 얻어지는 자코비안 행렬의 고유치에 의해 결정된다. 본 논문에서는 연속시간 및 이산시간 시스템에 대한 안정도 해석을 위한 방법이 각각 제시된다.

ABSTRACT

This paper describes the stability analysis of TSK (Takagi-Sugeno-Kang) fuzzy systems which can represent a large class of nonlinear systems with good accuracy. A TSK fuzzy model consists of TSK fuzzy rules and the consequent of each fuzzy rule is a linear input-output equation with a constant term. There may exist equilibrium points more than one in the TSK fuzzy model and each equilibrium point may also have different nature of stability. The local stability of an equilibrium point is determined by eigenvalues of the Jacobian matrix of the linearized TSK fuzzy model around the equilibrium point. Stability of both the continuous-time and the discrete-time systems is analyzed in this paper.

1. 서 론

시스템에 대한 지식과 동적 모델이 불확실한 경우 제어 시스템에 대한 퍼지 집합의 응용은 일반적인 시스템 이론에 대한 대안으로서 최근에 많은 주목을 받아왔다. 그러나 일반적으로 시스템에 대한 퍼지 집합 이론의 접목은 퍼지 집합이 궁극적으로 정량적인 해석이 필요한 언어적이고 정성적인 지식과 경험적으로 얻어진 변수들을 포함한다는 중요한 단점을 지니고 있다. 이를 극복하는 하나의 방법이 퍼지 집합과 퍼지 추론을 이용하여 비선형 시스템의 퍼지 모델을 구성하는 것이며, 본 논문에서는 넓은 범위의 비선형 시스템을 아주 잘 표현할 수 있는 TSK 퍼지 시스템의 안정도 해석에 대한 방법을 모색해보고자 한다.

TSK 입출력 퍼지 모델은 그 결론부가 언어적인 규칙과 달리 퍼지 집합이 아니라 선형방정식인 퍼지 규칙으로 구성된다[1]. TSK 퍼지 규칙은 전제부에서 정해진 퍼지 부공간에서 선형적인 입출력 관계를 표현

한다. TSK 퍼지 모델은 궁극적으로 비선형 모델이며, 입출력 데이터를 이용하여 인식될 수 있고, 작은 수의 퍼지 규칙으로도 비선형 시스템을 잘 표현할 수 있는 장점이 있다[2-7]. 그러므로 TSK 퍼지 모델의 안정도를 판별할 수 있는 방법이 제시된다면, 구조를 잘 알지 못하는 비선형 시스템의 안정도를 그 TSK 퍼지 모델을 통해 해석할 수 있다. 최근에 TSK 퍼지 모델의 안정도 판별에 관한 연구가 많이 행해졌으나[8-13], 이들 모두가 퍼지 모델의 결론부에 상수항을 포함하지 않는 특별한 형태의 TSK 퍼지 모델을 대상으로 한 것이었으므로 일반성이 결여되었다. 뿐만 아니라 이러한 연구 결과를 살펴보면 Lyapunov 함수를 이용하여 한 개의 평형점에 대한 안정도 해석에 대해서만 언급하고 있다. 그러나 비선형 시스템은 다수의 평형점을 가질 수 있으며, 각 평형점에 대해 서로 다른 안정도 해석이 뒤따라야 할 것이다. 따라서 본 논문에서는 퍼지 모델의 결론부에 상수항을 포함하는 일반적인 TSK 퍼지 모델의 각 평형점에 대해 지역 안정도

(local stability)를 해석하는 방법을 제시하고자 한다.

본 논문은 연속시간 및 이산시간 시스템을 모두 다루고자 하며, 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 TSK 퍼지 입출력 모델과 TSK 퍼지 상태변수 모델을 언급하고, 제3장에서는 연속시간 및 이산시간 TSK 퍼지 시스템의 안정도 해석에 대해 각각 설명하며, 제4장에서 결론을 맺는다.

2. TSK 퍼지 모델

2.1 TSK 퍼지 입출력 모델

TSK 퍼지 입출력 모델이란 TSK퍼지규칙의 결론부가 시스템 출력을 입력의 선형식으로 표현한 TSK 퍼지모델을 말한다. TSK 퍼지 입출력 모델을 구성하는 i 번째 TSK 퍼지 규칙은 다음과 같다.

$$M^i : \text{if } z_1 \text{ is } F_1^i, \dots, z_m \text{ is } F_m^i \text{ then } y^i = a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n \quad (1)$$

여기서 M^i 는 퍼지 모델의 i 번째 규칙을 의미하고 z_j 는 전제부 변수, F_j^i 는 z_j 에 대한 퍼지집합, x_j 는 결론부 변수, a_j^i 는 결론부 파라메타, y^i 는 규칙 M^i 로부터의 출력을 각각 의미한다. 퍼지 모델의 출력 y 는 다음 식과 같이 구할 수 있으며

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z) y^i}{\sum_{i=1}^r w^i(z)} \quad (2)$$

여기서 r 은 규칙수이고 $w^i(z)$ 는 i 번째 규칙의 적합도를 나타내며 다음 식과 같이 구한다.

$$w^i(z) = \prod_{j=1}^m F_j^i(z_j) \quad (3)$$

여기서 $F_j^i(z_j)$ 는 퍼지집합 F_j^i 에서 z_j 의 멤버십치이다. TSK 퍼지 모델은 시스템의 입출력 데이터를 사용하여 인식된다.

다음 두 예에서 TSK 퍼지 모델의 모델링 정확성을 알아볼 수 있다.

예 1: 구간 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 에서 정현파 함수 $\sin \theta$ 의 퍼지 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1 : & \text{if } \theta \text{ is } F_1 \text{ then } \sin \theta^1 = -2.915 - 0.928 \theta \\ M^2 : & \text{if } \theta \text{ is } F_2 \text{ then } \sin \theta^2 = 0.292 \theta \\ M^3 : & \text{if } \theta \text{ is } F_3 \text{ then } \sin \theta^3 = -2.915 - 0.928 \theta \end{aligned} \quad (4)$$

퍼지집합 F_1, F_2, F_3 는 그림 1에 나타나 있다. 그림 2는 퍼지 모델의 출력과 $\sin \theta$ 를 비교한 데이터를 보여주며, 이로부터 퍼지 모델의 정확성을 알 수 있다.

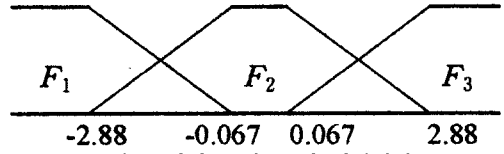


그림 1. 퍼지 모델 (4)의 퍼지집합.
Fig. 1. Fuzzy sets of the fuzzy model (4).

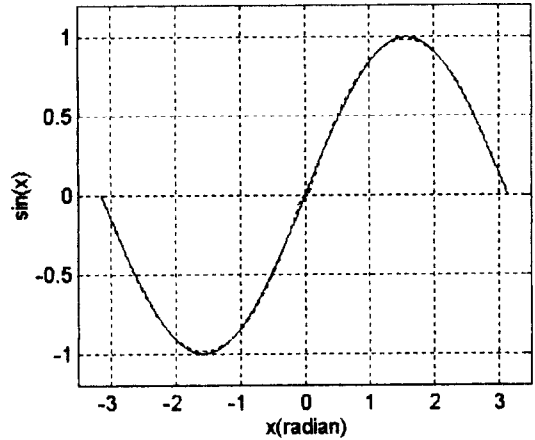


그림 2. 퍼지 모델 (4)의 출력과 $\sin \theta$.
Fig. 2. Output of the fuzzy model (4) and $\sin \theta$.

예 2: 인식 대상 시스템은 다음과 같은 이산시간 비선형 시스템이며 문헌[14]에서 neural networks 인식의 예제로 사용되었다.

$$y(k+1) = f(y(k), y(k-1)) + u(k) \quad (5)$$

여기서

$$f(y(k), y(k-1)) = \frac{y(k)y(k-1)(y(k)+2.5)}{1+y(k)^2+y(k-1)^2} \quad (6)$$

이며, 본 예에서는 $f(y(k), y(k-1))$ 의 퍼지 모델을 인식하였다. 인식을 위해 사용한 500개의 데이터는 구간 $[-2, 2]$ 에 랜덤하게 분포된 입력 $u(k)$ 를 식 (5)에 인가하여 구하였으며, 문헌[2]에서 발표된 방법을 이용하여 인식된 퍼지 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1 : & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_1 \text{ and } y(k) \text{ is } B_1 \\ & \text{then } y(k+1)^1 = 0.449 + 0.071y(k) - 0.09y(k-1) \\ M^2 : & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_2 \text{ and } y(k) \text{ is } B_2 \\ & \text{then } y(k+1)^2 = -2.418 + 0.669y(k) + 0.438y(k-1) \\ M^3 : & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_3 \text{ and } y(k) \text{ is } C_1 \\ & \text{then } y(k+1)^3 = 0.426 - 0.142y(k) - 0.147y(k-1) \\ M^4 : & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_2 \text{ and } y(k) \text{ is } C_2 \end{aligned}$$

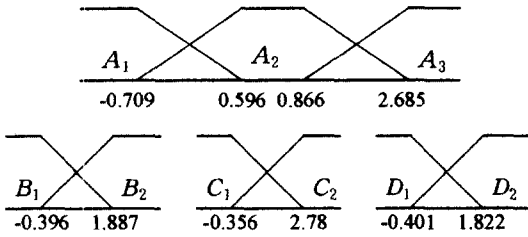


그림 3. 퍼지 모델 (7)의 퍼지집합.
Fig. 3. Fuzzy sets of the fuzzy model (7).

then $y(k+1)^4 = 3.672 - 1.354y(k) - 1.273y(k-1)$
 M^5 : if $y(k-1)$ is A_3 and $y(k)$ is D_1
 then $y(k+1)^5 = 0.479 + 0.371y(k) - 0.319y(k-1)$
 M^6 : if $y(k-1)$ is A_3 and $y(k)$ is D_2
 then $y(k+1)^6 = 0.497 + 0.581y(k) + 0.099y(k-1)$

전제부의 퍼지집합은 그림 3에 나타나 있으며, 그림 4에서는 입력이 $u(k) = \sin(2\pi k/25)$ 일 때 퍼지 모델 출력과 실제 시스템 출력을 비교한 결과를 보인다.

2.2 TSK 퍼지 상태변수 모델

본절에서는 시스템의 입력력 데이터로부터 인식된 TSK 퍼지 입출력 모델을 TSK 퍼지 상태변수 모델로 변환하는 방법에 대해 논하고자 한다. TSK 퍼지 입출력 모델을 상태변수 모델로 변환하는데 있어서 두 모델간의 일관성이 유지되어야만 한다. 일반적으로 TSK 퍼지 입출력 모델의 선형식에 상수항이 존재하므로 상태변수 모델의 상태방정식 또한 상수항을 가

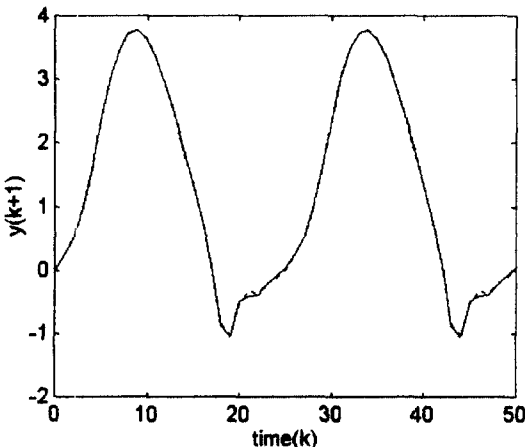


그림 4. 플랜트 (5)와 퍼지 모델 (7)의 출력, 실선: 플랜트 출력, 점선: 퍼지모델 출력.

Fig. 4. Outputs of the plant (5) and its fuzzy model (7), solid line: the plant, dashed line: the fuzzy model.

여야만 한다. 지금부터 결론부가 상태방정식으로 표현된 TSK퍼지모델을 TSK퍼지 상태변수 모델이라고 칭한다.

2.2.1 이산시간 시스템의 TSK 퍼지 상태변수 모델
 이산시간 시스템의 TSK 퍼지 입출력 모델의 i번째 규칙은 일반적으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$M^i : \text{if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(k) \text{ is } F_l^i$$

$$\text{then } y^i(k+1)$$

$$= a_0^i + a_1^i y(k) + a_2^i y(k-1) + \dots + a_n^i y(k-n+1)$$

$$+ b_1^i u(k) + b_2^i u(k-1) + \dots + b_m^i u(k-m+1) \quad (8)$$

상태변수를 $x_1(k) = y(k), x_2(k) = y(k-1), \dots, x_n(k) = y(k-n+1)$ 로 정의하고, $d_1^i(k) = a_0^i + b_2^i u(k-1) + \dots + b_m^i u(k-m+1)$ 라 두면, 식 (8)의 퍼지 규칙은 다음 식과 같이 표현된다.

$$M^i : \text{if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(k) \text{ is } F_l^i$$

$$\text{then } x^i(k+1) = A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k) \quad (9)$$

$$y(k+1) = cx(k+1)$$

여기서

$$A^i = \begin{pmatrix} a_1^i & a_2^i & \dots & a_{n-1}^i & a_n^i \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^i = \begin{pmatrix} b_1^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^i = \begin{pmatrix} d_1^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

이며, 식 (8)과 (9)의 퍼지 모델이 동일함은 쉽게 확인할 수 있다.

2.2.2 연속시간 시스템의 TSK 퍼지 상태변수 모델
 연속시간 시스템의 TSK 퍼지 입출력 모델의 i번째 규칙은 일반적으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$M^i : \text{if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(t) \text{ is } F_l^i$$

$$\text{then } \frac{d^n y(t)^i}{dt^n} = a_0^i + a_1^i y(t) + a_2^i \frac{dy(t)}{dt} + \dots$$

$$+ a_n^i \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + b^i u(t) \quad (10)$$

상태변수를 $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \dots, x_n(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}$ 로 정의하면, 식(10)의 퍼지 규칙은 다음 식과 같이 표현된다.

$$M^i : \text{if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(t) \text{ is } F_l^i$$

$$\text{then } \frac{dx^i(t)}{dt} = A^i x(t) + b^i u(t) + d^i$$

$$y(t) = cx(t) \quad (11)$$

여기서

$$A^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1^i & a_2^i & a_3^i & \cdots & a_n^i \end{pmatrix}, \quad b^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1^i \end{pmatrix}, \quad d^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_1^i \end{pmatrix}$$

$$c = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$$

식 (10)과 식 (11)의 동일함은 쉽게 확인될 수 있으며,

정의: 식 (9)와 식 (11) 형태의 퍼지 규칙을 TSK 퍼지 카노니컬 구조(TSK fuzzy canonical form)라고 칭한다.

3. TSK 퍼지 시스템의 안정도

본절에서는 입력이 없는 TSK 퍼지 상태방정식 모델의 평형점의 지역 안정도(local stability)를 해석하는 방법을 제안하고자 한다. TSK 퍼지 상태방정식 모델은 비선형 모델이므로 다수의 평형점을 가질 수 있다. 평형점이란 초기에 위치한 지점에서 상태값이 변하지 않는 점을 일컫는다. 평형점의 안정도는 다음과 같이 정의된다. 임의의 주어진 $\varepsilon > 0$ 에 대해 $|x(0) - x_c| < \delta$ 가 $|x(t) - x_c| < \varepsilon$ 를 의미하도록 하는 δ 가 $t \geq 0$ 에서 존재하면 평형점 x_c 는 안정하다. 또한 평형점 x_c 가 안정하고 $t \rightarrow \infty$ 일 때 모든 궤적이 x_c 로 수렴한다면 그 평형점은 전역 점근적으로(globally asymptotically) 안정하다.

TSK 퍼지 모델의 평형점의 안정도는 평형점에서의 선형화된 모델에 의해 결정된다. 시스템의 출력을 추론하는 식 (2)에서 전체부를 구성하는 퍼지 집합의 멤버십 함수가 연속이고 n차 미분가능하다면 TSK 퍼지 모델이 연속이고 n차 미분가능하다는 것을 알 수 있다. 따라서 TSK 퍼지 모델이 미분가능하다면 평형점에서 선형화가 가능하며 평형점 주위에서의 궤적과 평형점의 안정도를 결정할 수 있다.

3.1 연속시간 TSK 퍼지 시스템의 안정도

3.1.1 연속시간 TSK 퍼지 모델의 평형점

입력이 없는 연속시간 TSK 퍼지 상태변수 모델의 i번째 규칙은 다음 식과 같다.

$$M^i: \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_m(t) \text{ is } F_m^i$$

$$\text{then } \frac{dx^i(t)}{dt} = A^i x(t) + c^i \quad (12)$$

상태벡터 x 의 도함수는 다음 식과 같이 추론된다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x(t))(A^i x(t) + c^i)}{\sum_{i=1}^r w^i(x(t))} \quad (13)$$

여기서

$$w^i(x(t)) = \prod_{j=1}^m F_j^i(z_j(x(t))) \quad (14)$$

이다. 평형점 x_c 는 $\frac{dx_c(t)}{dt} = 0$ 를 만족해야 하므로 다음의 평형조건을 구할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^r w^i(x_c)(A^i x_c + c^i) = 0 \quad (15)$$

3.1.2 평형점의 안정도

평형점의 지역 안정도(local stability)는 평형점에서 선형화된 모델의 자코비안(Jacobian) 행렬에 의해 결정되며 퍼지 모델(13)의 출력은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad (16)$$

$$\text{여기서 } f(x(t)) = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x(t))(A^i x(t) + c^i)}{\sum_{i=1}^r w^i(x(t))}.$$

한편 $\tilde{x}(t) = x(t) - x_c$ 라고 두면, $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$ 가 만족이 되고 시스템(16)은 자코비안 행렬

$\left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_x$ 을 사용하여 평형점 x_c 에서 다음과 같이 선형화된다.

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_x \tilde{x}(t) \quad (17)$$

자코비안 행렬은

$$\left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_x = \sum_{i=1}^r (A^i x_c + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_x + q^i(x_c) A^i \quad (18)$$

로 주어지며, $q^i(x(t)) = \frac{w^i(x(t))}{\sum_{k=1}^r w^k(x(t))}$, $\sum_{i=1}^r q^i(x(t)) = 1$

이므로 $\frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} = \left[\frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x_1(t)} \ \dots \ \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x_n(t)} \right]$ 이다.

그러므로 평형점 x_e 의 안정도는 근본적으로 자코비안 행렬의 고유치에 의해 결정된다는 것을 알 수 있으며, 가중치 $w^i(x(t))$ 와도 관계가 있음을 알 수 있다.

예 3 : (진자, pendulum) 진자의 동적 방정식은

$$\ddot{\theta} = -f\theta - \frac{m \cdot g}{l} \sin \theta \quad (19)$$

로 주어진다. 여기서 $\frac{m \cdot g}{l} = 1$, $f = 1$ 로 두고, 예1의 식 (4)과 같이 비선형 함수 $\sin \theta$ 를 퍼지 모델링하면 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 구간에서 성립하는 진자의 TSK 퍼지 모델은 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{ if } \theta \text{ is } F_1, \text{ then } \ddot{\theta}^1 = -\theta + 0.928\theta + 2.915 \\ M^2: & \text{ if } \theta \text{ is } F_2, \text{ then } \ddot{\theta}^2 = -\theta - 0.292\theta \\ M^3: & \text{ if } \theta \text{ is } F_3, \text{ then } \ddot{\theta}^3 = -\theta + 0.928\theta - 2.915 \end{aligned} \quad (20)$$

상태변수를 $x_1 = \theta$ 와 $x_2 = \dot{\theta}$ 로 정의하여, 식 (20)을 상태공간에서 표현하면 다음 식을 얻는다.

M^1 : if $x_1(t)$ is F_1 , then

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2.915 \end{bmatrix}$$

M^2 : if $x_1(t)$ is F_2 , then

$$\frac{dx^2(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.292 & -1 \end{bmatrix} x(t) \quad (21)$$

M^3 : if $x_1(t)$ is F_3 , then

$$\frac{dx^3(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.915 \end{bmatrix}$$

진자의 퍼지 모델 전제부 퍼지 집합의 멤버십치는 제 2장의 그림 1에 나타난 바와 같이

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= 0.5(1 - (|x_1 - 2.9| - |x_1 + 0.07|) / (2.9 - 0.07)) \\ F_2(x_1) &= 0.5(|x_1 + 2.9| - |x_1 + 0.07| - |x_1 - 0.07| \\ &\quad + |x_1 - 2.9|) / (2.9 - 0.07) \\ F_3(x_1) &= 0.5(1 + (|x_1 - 0.07| - |x_1 - 2.9|) / \\ &\quad (2.9 - 0.07)) \end{aligned} \quad (22)$$

이며, $F_i(x_1) = w^i(x) = q^i(x)$, $i = 1, 2, 3$ 이다. 식 (15)의 평형조건으로부터 퍼지 모델(2-10)은 세 개의 평형점 $[0 \ 0]^T$, $[\frac{-2.915}{0.928} \ 0]^T$, $[\frac{2.915}{0.928} \ 0]^T$ 을 가지며, 이들은 원 진자의 평형점인 $[0 \ 0]^T$, $[-\pi \ 0]^T$, $[\pi \ 0]^T$ 과 거의 같음을 알 수 있다.

평형점 $x_{e1} = [0 \ 0]^T$ 에 대해서 $q^1(x_{e1}) = q^3(x_{e1}) = 0$, $q^2(x_{e1}) = 1$, $\frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} = [0 \ 0]$, $i = 1, 2, 3$ 이므로, 자코비안 행렬은

$$\sum_{i=1}^3 ((A^i x_{e1} + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} + q^i(x_{e1}) A^i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.292 & -1 \end{bmatrix}$$

이 되며, 그 고유치는 $-0.5 \pm j0.205$ 이므로 x_{e1} 은 안정한 평형점이다.

한편 평형점 $x_{e2} = [-\frac{2.915}{0.928} \ 0]^T$ 에 대해서는

$$q^1(x_{e2}) = 1, q^2(x_{e2}) = q^3(x_{e2}) = 0, \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} = [0 \ 0] \quad i = 1, 2, 3$$

이므로, 자코비안 행렬은

$$\sum_{i=1}^3 ((A^i x_{e2} + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} + q^i(x_{e2}) A^i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{bmatrix}$$

이 되고, 그 고유치가 0.585와 -1.585가 되어서 x_{e2} 는 saddle point이다.

또한 평형점 $x_{e3} = [\frac{2.915}{0.928} \ 0]^T$ 의 경우에는 $q^1(x_{e3}) =$

$$q^2(x_{e3}) = 0, q^3(x_{e3}) = 1, \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} = [0 \ 0], i = 1, 2, 3$$

이므로, 자코비안 행렬은

$$\sum_{i=1}^3 ((A^i x_{e3} + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} + q^i(x_{e3}) A^i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{bmatrix}$$

이 되어서, 평형점 x_{e2} 와 같은 결과를 얻을 수 있다.

예 4 : (비선형 진동자, nonlinear oscillator) 비선형 진동자의 동적 방정식은

$$\ddot{y} = -2\zeta y + (y - 1)y \quad (23)$$

이며, 감쇠비 ζ 의 범위는 $0 < \zeta < 1$ 이다. 함수 $f(y) = y^2$ 의 $-a < y < a$, $a > 1$ 영역에서의 TSK 퍼지 모델은

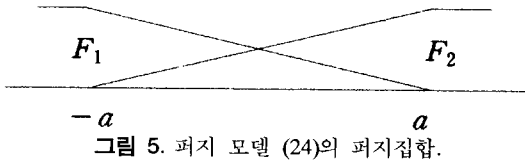


그림 5. 퍼지 모델 (24)의 퍼지집합.
Fig. 5. Fuzzy sets of the fuzzy model (24).

다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{if } y \text{ is } F_1 \text{ then } f(y)^1 = -ay \\ M^2: & \text{if } y \text{ is } F_2 \text{ then } f(y)^2 = ay \end{aligned} \quad (24)$$

그림 5에 나타난 전체부 퍼지집합의 멤버십치는

$$\begin{aligned} F_1(y) &= (a-y)/2a \\ F_2(y) &= 1-F_1(y) \end{aligned} \quad (25)$$

로 표현되며, $F_i(x_i) = w^i(x(t)) = q^i(x(t))$, $i=1, 2$ 이다. 식 (24)의 퍼지 모델은 $-a < y < a$, $a > 1$ 의 영역에서 $f(y) = y^2$ 를 정확히 표현한다. 따라서 식 (23)의 TSK 퍼지 모델은

$$\begin{aligned} M^1: & \text{if } y \text{ is } F_1 \text{ then } y^1 = -2\zeta y + (-a-1)y \\ M^2: & \text{if } y \text{ is } F_2 \text{ then } y^2 = -2\zeta y + (a-1)y \end{aligned} \quad (26)$$

로 주어진다. 상태변수들 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ 으로 정의하면 식 (26)의 상태공간표현은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{if } x_1(t) \text{ is } F_1 \text{ then } \frac{dx^1(t)}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a-1 & -2\zeta \end{bmatrix} x(t) \\ M^2: & \text{if } x_1(t) \text{ is } F_2 \text{ then } \frac{dx^2(t)}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a-1 & -2\zeta \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (27)$$

멤버십 함수(2-14)를 이용하여 $\frac{dx(t)}{dt}$ 는 퍼지 모델 (27)로부터 다음 식과 같이 추론된다.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^2 w^i(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ (x_1(t)-1)x_2(t) - \zeta x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

퍼지 모델의 출력(28)은 플랜트(23)과 동일하므로, 플랜트와 동일한 평형점 $[00]^T$, $[10]^T$ 를 갖는다. 평형

점 $x_{e1} = [00]^T$ 에서 자코비안 행렬은

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix}$$

이며, 그 고유치는 $-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}$ 가 되고 $0 < \zeta < 1$ 이므로 x_{e1} 은 안정한 평형점이다. 한편 $x_{e2} = [10]^T$ 에서 자코비안 행렬은

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix}$$

이며, 그 고유치는 $-\zeta \pm j\sqrt{1+\zeta^2}$ 으로 x_{e2} 는 saddle point이다.

3.2 이산시간 TSK 퍼지 시스템의 안정도

이산시간 TSK 퍼지 시스템의 안정도를 해석하는 방법은 연속시간의 경우와 기본적으로 동일하다.

3.2.1 이산시간 TSK 퍼지 모델의 평형점

이산시간 TSK 퍼지 상태변수 모델은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_m(k) \text{ is } F_m^i \\ & \text{then } x(k+1)^i = A^i x(k) + c^i \end{aligned} \quad (29)$$

퍼지 모델의 출력 $x(k+1)$ 은 다음과 같이 추론된다.

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x(k))(A^i x(k) + c^i)}{\sum_{i=1}^r w^i(x(k))} \quad (30)$$

여기서

$$w^i(x(k)) = \prod_{j=1}^m F_j^i(z_j(x(k))) \quad (31)$$

이다. 평형점 x_e 는 $x_e(k+1) = x_e(k)$ 를 만족해야 하므로 다음의 평형조건을 구할 수 있다.

$$x_e = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x_e)(A^i x_e + c^i)}{\sum_{i=1}^r w^i(x_e)} \quad (32)$$

3.2.2 평형점의 안정도

이산시간 TSK 퍼지 모델에서 평형점의 지역 안정도(local stability) 역시 연속시간 퍼지 모델의 경우와 마찬가지로 자코비안 행렬에 의해서 결정된다. 한편 \tilde{x} 를 $\tilde{x}(k) = x(k) - x_e$ 로 정의하면, 식 (3-2)로부터

$$\tilde{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r q^i(\tilde{x}(k) + x_e)(A^i(\tilde{x}(k) + x_e + c^i) - x_e) \quad (33)$$

가 되고, 자코비안 행렬을 이용하여 평형점에서 다음

과 같이 선형화된다.

$$\tilde{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r (A^i x_e + c^i) \left. \frac{\partial q^i(x)}{\partial x} \right|_{x_i} + q^i(x_e) A^i \tilde{x}(k) \quad (34)$$

따라서 이산시간 TSK 퍼지 모델의 평형점 x_e 의 안정도 또한 연속시간 퍼지 모델의 경우와 동일하게 자코비안 행렬 (18)의 고유치에 의해 결정된다.

예 5: 예 2에서 사용된 이산시간 시스템의 안정도를 해석하고자 한다. 시스템의 동적 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y(k+1) &= f(y(k), y(k-1)) \\ &= \frac{y(k)y(k-1)(y(k)+2.5)}{1+y(k)^2+y(k-1)^2} \end{aligned} \quad (35)$$

상태변수를 $x(k) = [y(k) y(k-1)]^T$ 로 정의하면 식 (35)의 TSK 상태변수 퍼지 모델은

M^1 : if $x_1(k)$ is B_1 and $x_2(k)$ is A_1

$$\text{then } x^1(k+1) = \begin{bmatrix} 0.071 & 1 \\ -0.09 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.449 \\ 0 \end{bmatrix}$$

M^2 : if $x_1(k)$ is B_2 and $x_2(k)$ is A_1

$$\text{then } x^2(k+1) = \begin{bmatrix} 0.669 & 0.438 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -2.418 \\ 0 \end{bmatrix}$$

M^3 : if $x_1(k)$ is C_1 and $x_2(k)$ is A_2

$$\text{then } x^3(k+1) = \begin{bmatrix} -0.142 & -0.147 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.426 \\ 0 \end{bmatrix}$$

M^4 : if $x_1(k)$ is C_2 and $x_2(k)$ is A_2

$$\text{then } x^4(k+1) = \begin{bmatrix} -1.354 & 1.273 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 3.672 \\ 0 \end{bmatrix}$$

M^5 : if $x_1(k)$ is D_1 and $x_2(k)$ is A_3 (36)

$$\text{then } x^5(k+1) = \begin{bmatrix} 0.371 & -0.319 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.479 \\ 0 \end{bmatrix}$$

M^6 : if $x_1(k)$ is D_1 and $x_2(k)$ is A_3

$$\text{then } x^5(k+1) = \begin{bmatrix} 0.371 & -0.319 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.479 \\ 0 \end{bmatrix}$$

로 표현되며, 전체부의 퍼지집합은 예 2의 그림 3과 동일하다. 그림 6에서 보는 바와 같이 퍼지 모델 (36)은 세 개의 평형점 -0.003, 0.508, 2.11을 가지며, 이 평형점들은 플랜트의 평형점 0, 0.5, 2와 거의 같음을 알 수 있다. 퍼지 모델(36)에서 모든 x 에 대해 $\sum_{i=1}^6 w^i(x)$

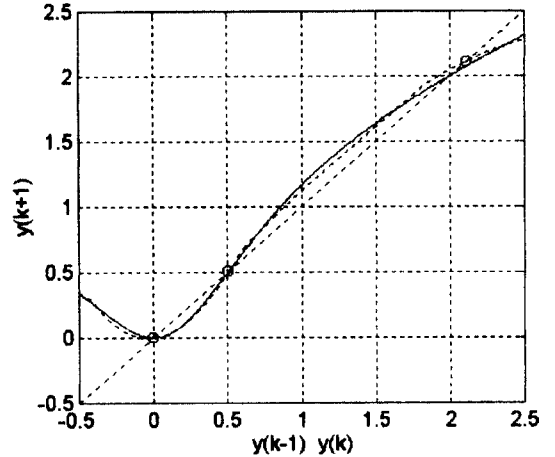


그림 6. 예 5에서 사용된 플랜트 (35)와 퍼지 모델 (36)의 평형점(실선: 플랜트, 점선: 퍼지 모델).

Fig. 6. Equilibrium points of the plant (35) and its fuzzy model (36) (solid line: plant, dashed line: fuzzy model).

$= 1$, $q^i(x) = w^i(x)$ 이다.

평형점 $x_{e1} = [0.003 \ -0.003]^T$ 에 대해 다음 세 식이 만족되므로

$$[q^i(x_{e1})] = [0.38 \ 0.079 \ 0.481 \ 0.06 \ 0 \ 0],$$

$$\left[\left. \frac{\partial q^i(x)}{\partial x_1} \right|_{x_i} \right] = [-0.201 \ 0.201 \ -0.172 \ 0.172 \ 0 \ 0],$$

$$\left[\left. \frac{\partial q^i(x)}{\partial x_2} \right|_{x_i} \right] = [-0.635 \ -0.132 \ 0.681 \ 0.086 \ 0 \ 0]$$

자코비안 행렬은 다음 식과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^6 (q^i(x_{e1})A^i + (A^i x_{e1} + c^i) \left. \frac{\partial q^i(x)}{\partial x} \right|_{x_i}) \\ &= \begin{bmatrix} 0.058 & 0.065 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서 자코비안 행렬의 고유치는 0.289와 -0.231로서 평형점 x_{e1} 은 안정하다.

평형점 $x_{e2} = [0.508 \ 0.508]^T$ 에 대해서는 다음 세 식이 성립하므로

$$[q^i(x_{e2})] = [0.041 \ 0.027 \ 0.677 \ 0.255 \ 0 \ 0],$$

$$\left[\left. \frac{\partial q^i(x)}{\partial x_1} \right|_{x_i} \right]$$

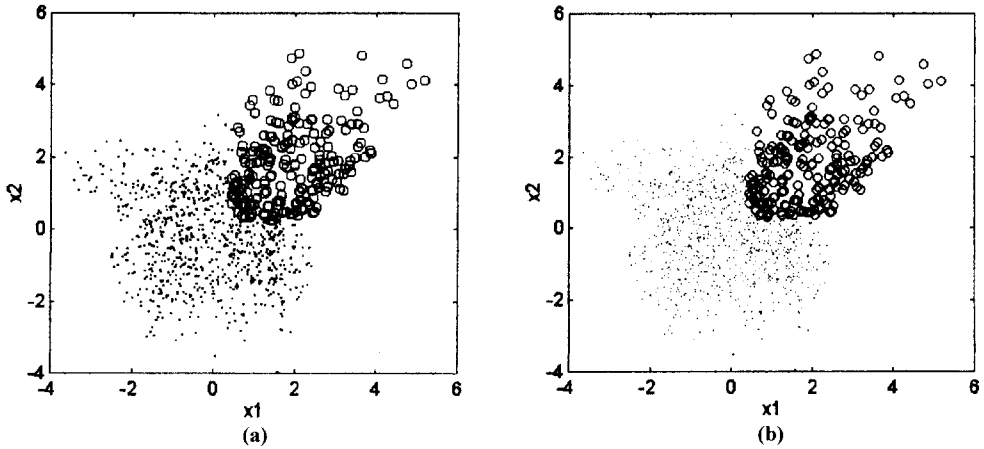


그림 7. 예 6에서 사용된 플랜트와 퍼지 모델의 움직임, 점(·): (0, 0)로 수렴하는 초기상태, 원(○): (2, 2)로 수렴하는 초기상태 (a) 플랜트 (b) 퍼지 모델.

Fig. 7. Behavior of the plant and its fuzzy model, dot(·): initial states converging to (0, 0), circle(○): initial states converging to (2, 2), (a) the plant and (b) the fuzzy model.

$$= [-0.029 \ 0.029 \ -0.296 \ 0.296 \ 0 \ 0],$$

$$\left[\frac{\partial q^i(x)}{\partial x_2} \right]_{x_{e_2}} = [-0.463 \ -0.304 \ 0.557 \ 0.21 \ 0 \ 0],$$

자코비안 행렬은 다음 식과 같이 주어진다.

$$\sum_{i=1}^6 (q^i(x_{e_2})A^i + (A^i x_{e_2} + c^i) \frac{\partial q^i(x)}{\partial x}) \Big|_{x_{e_2}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.755 & 1.036 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이 자코비안의 고유치는 1.463과 -0.708이므로 평형점 \$x_{e_2}\$는 불안정하다.

평형점 \$x_{e_3} = [2.11 \ 2.11]^T\$에 대해서는

$$[q^i(x_{e_3})] = [0 \ 0 \ 0.068 \ 0.245 \ 0 \ 0.687],$$

$$\left[\frac{\partial q^i(x)}{\partial x_2} \right]_{x_{e_3}} = [0 \ 0 \ -0.099 \ 0.099 \ 0 \ 0],$$

$$\left[\frac{\partial q^i(x)}{\partial x_2} \right]_{x_{e_3}} = [0 \ 0 \ -0.119 \ 0.43 \ 0 \ 0.55],$$

이 성립하므로, 자코비안 행렬은

$$\sum_{i=1}^6 (q^i(x_{e_3})A^i + (A^i x_{e_3} + c^i) \frac{\partial q^i(x)}{\partial x}) \Big|_{x_{e_3}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.508 & 0.05 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이 되고, 고유치는 0.593과 -0.085이므로 \$x_{e_3}\$는 안정한 평형점이다. 그림 7은 1000개의 서로 다른 초기상태에 대한 플랜트 (35)와 퍼지 모델(36)의 움직임을 보여주고 있으며, 이 초기 상태는 입력 \$u(k)\$를 [-2, 2]의 구간에서 20단계의 난수로 발생시켜 취한 값이다.

4. 결 론

본 논문에서는 결론부에 상수항을 갖는 일반적인 TSK 퍼지 규칙으로 구성된 TSK 퍼지 시스템의 안정도를 해석하는 방법을 제시하였다. TSK 퍼지 시스템에서 평형점의 지역 안정도(local stability)는 평형점에서 퍼지 모델을 선형화하여 얻어진 자코비안 행렬의 고유치에 의해 결정된다. 비선형 시스템의 퍼지 모델이 임출력 데이터에 의해 인식된다면 비선형 시스템의 평형점은 퍼지 모델로부터 근사적으로 구해진다. 참고 문헌[3]에서 TSK퍼지모델은 비선형시스템을 어떠한 정확도로도 근사화 시킬 수 있음이 밝혀져 있으므로 퍼지 모델의 평형점의 안정도는 비선형 시스템의 안정도와 동일하다. 따라서 비선형 시스템의 안정도는 퍼지 모델의 자코비안 행렬로부터 쉽게 결정될 수 있다.

본 논문에서 제시한 지역 안정도 해석법은 비선형 시스템 평형점의 지역 안정도를 해석하기 위해 기존의 방법과는 달리 그 TSK 퍼지 모델이 사용될 수 있다는 것을 의미하고 있으며, 몇 가지 예를 들어 이를 검증하였다.

참고문헌

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modelling and Control", *IEEE Trans. on SMC*, **15**(1), 116-132, 1985.
- [2] M. Sugeno and G. Kang, "Structure Identification of Fuzzy Model", *Fuzzy Sets and Systems*, **28**, 15-33, 1988.
- [3] J. Buckley, "Sugeno type controllers are universal controller", *Fuzzy Sets and Systems*, **53**, 199-303, 1993.
- [4] M. Sugeno and M. Nishida, "Fuzzy Control of Model Car", *Fuzzy Sets and Systems*, **16**, 103-113, 1985.
- [5] M. Sugeno and G. Kang, "Fuzzy Modelling and Control of Multilayer Incinerator", *Fuzzy Sets and Systems*, **18**, 329-346, 1986.
- [6] Y. S. Lee, S. J. Jeong, S. Y. Kim, and G. Kang, "Hull Form Generation by Using Fuzzy Model", in Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress, 1234-1237, 1993.
- [7] M. Kim and G. Kang, "Design of Fuzzy Controller Based on Fuzzy Model for Container crane System", in Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress, 1250-1253, 1993.
- [8] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", *Fuzzy Sets and Systems*, **45**, 135-156, 1992
- [9] K. Tanaka and M. Sano, "On the Concepts of Regulator and Observer of Fuzzy Control System", in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 767-772, 1994.
- [10] G. Kang and W. Lee, "Design of Fuzzy Parameter Adaptive Controllers", in Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress, 609-612, 1995.
- [11] K. Kiriakidis and A. Tzes, "Application of Implicit Self-Tuning Fuzzy control to Nonlinear Systems", in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1419-1426, 1995.
- [12] G. Kang and W. Lee, "Design of Fuzzy State Controllers and Observers", in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1355-1360, 1995.
- [13] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, **4**, 14-23, Feb. 1996.
- [14] K.S.Narendra and K.Parthasarathy, "Identification and Control Dynamical Systems Using Neural Networks", *IEEE Trans. on Neural Networks*, **4**, 4-27, Mar. 1990.



강근택(Geuntaek Kang)

1976년 : 서울대학교 응용물리학과 (공학사)
 1984년 : 일본 동경공업대학 시스템과학 (공학석사)
 1987년 : 일본 동경공업대학 시스템과학 (공학박사)
 1987~현재 : 부경대학교 전자공학과 부교수



이원창(Wonchang Lee)

1983년 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학사)
 1985년 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사)
 1992년 : 포항공과대학교 전자전기공학과(공학박사)
 1993~현재 : 부경대학교 전자공학과 조교수