

수리 가능한 시스템의 평균고장간격시간에 대한 붓스트랩 신뢰구간

김대경[†] 안미경[‡] 박동호[§]

요약

수리 가능한 시스템에 대한 고장시간을 표현하는 여러가지 형태의 통계적 모형이 최근 엔지니어들과 신뢰성분야 학자들의 많은 관심을 끌고 있다. 본 논문에서는 수리 가능한 시스템의 신뢰성 증가를 나타내는데 유용하게 적용되는 power law process 를 고려하고 특히 정시중단자료(time truncated data)인 경우 고장간격에 대한 신뢰구간을 붓스트랩 기법을 이용하여 구하고 이것을 Crow (1982)가 구한 기존의 신뢰구간과 비교 분석하였다.

1. 서론

수리가능 시스템은 고장이 발생하였을 경우 전체 시스템의 완전 복원이외의 다른 방법에 의하여 만족스러운 기능을 발휘할 수 있는 상태로 회복될 수 있는 시스템을 의미한다. 지금까지 신뢰성에 관련된 많은 문헌들은 수리 불가능한 시스템(즉, 각각의 고장 후에 시스템을 버리고 새로운 것으로 바꿈)에 관한 것이 대부분이고 수리 가능한 시스템의 신뢰성에 관해서 알려진 결과들은 상대적으로 적다.

수리 가능한 시스템에 대한 고장시간들을 나타내기 위한 2개의 가장 보편적인 모형은 재생과정(renewal process)과 동질성이 아닌 포아송 과정(nonhomogeneous Poisson process; NHPP) 이다. 수리된 시스템의 신뢰성이 새것의 시스템과 꼭 같다면 그 시스템은 재생과정에 의하여 모형화 된다. 그러나 시스템의 신뢰성이 수리 후에 변하지 않는다면 즉, 수리된 시스템이 고장나기 직전의 시스템과 같다면 적당한 모형은 NHPP 이다. 일반적으로 수리된 시스템은 고장전의 시스템보다는 수리 후에 더 좋다. 특히, 신뢰성 증가 모형에 대해서는 각 고장때 마다 그 원인을 규명하고 신뢰성을 증가시킬 수 있도록 새로 설계되는 것이 상식적이며 따라서 수리 후에 시스템의 신뢰성이 증가한다.

경험적으로 볼 때 재생과정모형보다는 NHPP가 많은 상황에서 더욱 실제적인 모형이다. 대부분의 시스템들은 고장날 때마다 교체되는 것보다는 수리되어지도록 디자인된다. NHPP의 가장 중요한 특성치의 하나는 (1.1)에서 정의된 고장강도함수 (failure intensity function)이다.

$$r(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\Pr\{\text{a failure in}(t, t + dt)\}}{dt} \quad (1.1)$$

[†] (560-756) 전북 전주시 덕진구 덕진동 1가 661-14, 전북대학교 자연과학대학 통계학과 전임강사

[‡] (200-702) 강원도 춘천시 옥천동 1가, 한림대학교 자연과학대학 통계학과

[§] (200-702) 강원도 춘천시 옥천동 1가, 한림대학교 자연과학 대학 통계학과 교수

고장강도함수는 수리 불가능한 시스템의 위험률함수(hazard rate function)와 같이 고장 나기 전의 고장시간의 패턴에 의존하는 것이 아니라 시스템이 가동하기 시작한 이래 누적된 시간 t 에 의존한다. Ascher 와 Feingold (1984)는 위험률함수, 고장강도함수 그리고 각각의 대응하는 확률 과정에 관해서 수리 가능한 시스템과 수리 불가능한 시스템들에 대한 다양한 연구를 하였으며 신뢰성 증가 모형에 관해서도 자세하게 소개하였다.

Crow (1974)는 작동시간과 시스템 고장의 수와의 관계는 근사적으로 그들에게 양의 대수를 취할 때 선형(Duane (1964))이라는 조건하에서 시스템 고장시간이 다음과 같은 형태의 와이블 고장강도함수를 가진 확률적인 모형을 가정하였다.

$$r(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} \quad (1.2)$$

여기에서 $\lambda > 0$ 이고 $\beta > 0$ 이다. Crow (1974)는 (1.2)를 와이블 과정이라고 불렀다. Finkelstein (1976)은 λ 와 β 의 최우추정량들을 유도하였고 그러한 추정량들에 대한 표본분포들을 얻었다. 또한 Bain 과 Engelhardt (1980), Bassin (1969), Crow (1975, 1977), Lee 와 Lee (1978)는 이 과정에 대한 적합도검정, 최우추정치, 신뢰구간 그리고 추론절차들을 연구하였다. 그리고 Rigdon 과 Basu (1989)는 와이블 과정에 대한 다양한 적합도 검정들을 논의했다. Ascher (1981)는 와이블 과정 (1.2)에 대한 새로운 용어 "power law process"를 소개하였다. Park 과 Kim (1992)은 Cramer-von Mises 통계량, Kolmogorov-Smirnov 통계량 그리고 Anderson-Darling 통계량을 이용하므로써 power law process 에 대한 새로운 적합도 검정을 제안했다.

Power law process 는 수리 가능한 시스템의 신뢰성을 나타내는데 유용한 모형으로 알려져 있다. 2절에서는 power law process 의 모수들의 추정량에 대해서 간단히 설명하고 정시중단자료를 사용해서 얻어진 고장간격들간 즉 $T_{j+1} - T_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ 의 평균 시간에 대한 신뢰구간(Crow (1982))에 관해서 기술한다. 3절에서는 power law process 에 대한 붓스트랩 신뢰구간을 구하고, 4절에서는 모의실험의 절차에 대해서 자세하게 언급한다. 마지막으로 5절에서는 모의실험의 결과를 이용하여 신뢰구간의 길이와 포함확률에 비추어 Crow (1982)가 구한 신뢰구간과 본 논문에서 제안된 붓스트랩 신뢰구간을 비교하고자 한다.

2. POWER LAW PROCESS

(1.2)에서 정의된 power law process 는 특별한 형태의 고장강도함수를 가진 동질성이 아닌 포아송 과정(NHPP)이며 2개의 모르는 모수 λ 와 β 에 의존한다. $\beta = 1$ 일 때 power law process 는 결국 동질적인 포아송 과정(HPP)이 된다. 그리고 $\beta > 1$ 일 때 고장강도함수는 증가하고 이것은 고장간의 시간들이 짧아지고 있다는 것을 의미한다. 또한 $0 < \beta < 1$ 일 때는 고장강도함수가 감소하고 고장간의 시간들은 더욱 길어진다는 것을 알 수 있다.

$T_1 < T_2 < \dots < T_n$ 을 처음 n 개의 시스템 고장시간이라고 하자. (1.2)의 고장강도함수를 가진 power law process 를 가정하면 우도함수는 다음과 같다.

$$f(\lambda, \beta, t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda^n \beta^n \exp(-\lambda t_n^\beta) \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \quad (2.1)$$

식 (2.1)로부터 최우추정량은 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{\lambda} = n/T_n^{\hat{\beta}} \quad (2.2)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} \ln(T_n/T_i)} \quad (2.3)$$

Finkelstein (1976) 과 Lee 와 Lee (1978)는 $\hat{\lambda}$ 와 $\hat{\beta}$ 의 분포들을 유도하였으며 그 결과들을 이용하여 모수 λ 와 β 들에 대한 통계적인 추론을 얻었다.

신뢰성 증가 모델에서 시스템 신뢰성이 제조자가 요구하는 수준까지 증가되었는지를 결정하기 위한 도구로서 사용되어질 수 있는 다른 중요한 양은 시험이 종료되어지는 시간에서의 고장강도함수의 값이다. n 개의 고장시간 $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ 이 시험의 종료시에 이용 가능한 자료라면 $r(T_n)$ 의 최우추정량은 다음처럼 얻어진다.

$$\hat{r} = n\hat{\beta}/T_n \quad (2.4)$$

여기서 T_n 은 n 번째 관측된 고장시간이고 $\hat{\beta}$ 는 식 (2.3)에서 얻어진 β 의 최우추정량이다. Crow (1975)는 데이터가 정수중단일때 $r(T_n)$ 의 신뢰구간에 대한 도표를 몬테칼로 방법들에 의해서 얻었고, Lee 와 Lee (1978)는 Crow에 의해 수행되었던 시뮬레이션들이 정확하다는 것을 보였다.

Crow(1982)는 power law process에서 고장강도함수 $r(t)$ 가 $(0, t_0]$, $t_0 > 0$ 는 고정된 값에서 감소하다가 t_0 이후에는 $r(t)$ 가 변화되지 않는 신뢰성 증가모형을 고려하였다. 이러한 모형은 $(0, t_0]$ 동안에는 고장이 발생하였을 때 새로운 설계들을 통하여 고장의 원인을 개선함으로써 신뢰성 증가를 가져오게 되나, t_0 이후에는 고장강도함수의 값은 상수 $r(t_0) = \lambda\beta t_0^{\beta-1}$ 가 된다. 따라서 t_0 이후에 시스템이 계속해서 가동된다면 $M(t_0) = [r(t_0)]^{-1}$ 는 t_0 이후의 시스템의 평균고장간격시간(MTBF) 또는 시스템이 성취할 수 있는 최장의 평균고장시간으로 해석할 수 있다. Crow(1982)는 정수중단자료 및 정시중단자료를 이용한 $M(t_0)$ 의 신뢰구간을 구하였으나 본 논문에서는 정시중단자료에 의한 $M(t_0)$ 의 신뢰구간에 대해서만 고려한다. 정수중단자료의 경우 Crow(1982)의 신뢰구간은 통계량의 정확분포에 의한 것이다. 다음에 기술되는 정시중단자료에 대한 결과들은 Crow(1982)에서 얻어진 추정값으로서 3절 및 4절에서의 적용을 위해서 소개된다.

정시중단자료를 얻기 위해서는 중도절단시간 T 가 미리 결정되어야하며 n 개의 고장시간들 $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ 이 $(0, T)$ 동안 power law process에서 관찰되었다고 가정하자. 이 경우의 데이터에 의한 우도함수는 다음과 같다.

$$f(\lambda, \beta, t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda^n \beta^n \exp(-\lambda T^\beta) \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \quad (2.5)$$

식 (2.5)로부터 λ 와 β 에 대한 최우추정량은 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{\lambda} = n/T^{\hat{\beta}} \quad (2.6)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(T/t_i)} \quad (2.7)$$

따라서 시간 T 에서 얻어진 평균고장간격시간인 $M(T)$ 의 최우추정량은 다음과 같다.

$$\hat{M}(T) = T/n\hat{\beta} \quad (2.8)$$

(2.8)에서 얻어진 $\hat{M}(T)$ 의 분포를 고려함으로써 Crow(1982)는 $M(T)$ 에 관한 양측 $100(1 - \alpha)\%$ 의 신뢰구간을 다음과 같이 얻었다.

$$(\pi_1 \hat{M}(T), \pi_2 \hat{M}(T)) \quad (2.9)$$

여기에서 π_1 과 π_2 는 여러 가지 다른 n 과 신뢰계수의 값에 대해서 계산되어 Crow(1982)에 주어져 있다. 또한 $M(T)$ 에 대한 대표본 신뢰구간은 Harris와 Soms(1974)의 결과를 이용하여 얻어졌으며 $M(T)$ 에 관한 대표본 양측 $100(1 - \alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같은 형태이다.

$$(\delta_1 \hat{M}(T), \delta_2 \hat{M}(T))$$

여기에서 δ_1 와 δ_2 는 다음과 같이 근사적으로 얻어질 수 있다.

$$\delta_1 = n^2 / \left(n + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{n}{2}} \right)^2, \quad \delta_2 = n^2 / \left(n - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{n}{2}} \right)^2$$

여기에서 Z_{α} 는 표준정규분포의 상위 α 퍼센타일을 나타낸다. Bain과 Engelhardt(1980)도 약간 다른 점근적인 근사와 불연속에 대한 수정요소를 사용해서 비슷한 결과를 얻었다.

3. 붓스트랩(BOOTSTRAP) 신뢰구간

붓스트랩은 Efron (1979)에 의해서 소개되었고 대부분의 비모수적 추정문제에서 근사편의, 표준편차, 신뢰구간등을 계산하기 위해서 사용되는 간단하면서도 직선적인 컴퓨터 의존방법이다. 특히 Efron 과 Gong (1983) 그리고 Efron 과 Tibshirani (1986)는 붓스트랩 신뢰구간의 3 가지 형태 즉 표준적인 붓스트랩 신뢰구간, 퍼센타일 붓스트랩 신뢰구간 그리고 편의수정 붓스트랩 신뢰구간을 발전시켰다. Franklin 과 Wasserman (1991)은 공정능력지수에 대한 3 가지 붓스트랩 신뢰구간들의 성질을 최초로 연구하였고 Franklin 과 Wasserman (1992)은 모집단의 분포가 정규분포, 비대칭(skewed)분포 및 긴꼬리(long-tailed)분포등에 대해서 위의 3 가지 신뢰구간에 관해서 각각 토의했다. 그들은 3 가지 형태 중에서 표준 붓스트랩 방법이 로버스트의 성질과 높은 포함확률 그리고 신뢰구간이 짧기 때문에 좋은 방법이라고 추천하였다. Hall (1988)은 상황에 맞게 어떠한 형태의 붓스트랩 신뢰구간을 이용해야 하는지에 대해서 연구하였다.

이 절에서는 관측치가 고정된 시간 T 에서 중단되었을 때 T 에서의 MTBF인 $M(T) = [\lambda\beta T^{\beta-1}]^{-1}$ 의 신뢰구간을 구하기 위해서 2 개의 모수적 붓스트랩 방법을 적용한다. 하나는 표준 붓스트랩 신뢰구간 (SB)이고 다른 하나는 퍼센타일 붓스트랩 신뢰구간(PB)이다. SB 와 PB 방법은 $M(T)$ 의 추정량으로서 (2.8)에서 주어진 $\hat{M}(T)$ 를 사용한다.

3.1. 퍼센타일 부스트랩(PERCENTILE BOOTSTRAP)방법

여기에서는 B 를 부스트랩 대표본의 갯수라고 하자. $M(T)$ 의 B 개 부스트랩 추정치들의 순서화된 집합으로부터 $100 \cdot \frac{\alpha}{2}$ 퍼센타일과 $100(1 - \frac{\alpha}{2})$ 퍼센타일 점들이 다음과 같은 $100(1 - \alpha)\%$ 퍼센타일 부스트랩 신뢰구간을 얻기 위해 사용되어진다.

$$(\hat{M}^*(\frac{\alpha}{2}B + 1), \hat{M}^*(B(1 - \frac{\alpha}{2}))) \tag{3.1}$$

여기에서 $\hat{M}^*(i)$ 는 $M(T)$ 에 대한 i 번째로 가장 작은 부스트랩 추정치이고 $1 - \alpha$ 는 신뢰계수이다. 예를 들면, $B = 999$ 인 90% 신뢰구간은 근사적으로 다음과 같다.

$$(\hat{M}^*(50), \hat{M}^*(950))$$

3.2. 표준 부스트랩(STANDARD BOOTSTRAP) 방법

B 개의 부스트랩 추정치 \hat{M}_b^* , $b = 1, \dots, B$ 로부터 다음과 같이 표본평균과 표본표준편차를 계산한다.

$$\hat{M}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{M}_b^*, \quad S^* = \sqrt{\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\hat{M}_b^* - \hat{M}^*)^2}.$$

S^* 는 $\hat{M}(T)$ 의 표준편차의 추정량으로 $M(T)$ 에 대한 $100(1 - \alpha)\%$ 표준 부스트랩 신뢰구간은 다음과 같이 얻어진다.

$$(\hat{M}(T) - z_{\frac{\alpha}{2}} S^*, \hat{M}(T) + z_{\frac{\alpha}{2}} S^*) \tag{3.2}$$

여기에서 $\hat{M}(T)$ 는 원래 표본에 근거한 $M(T)$ 의 추정량 (2.8)이다. 표준 부스트랩 방법을 적용하기 위해서는 B 개의 부스트랩 추정치들의 정규성을 검토하는 것이 선행되어야 하는 것은 물론이다. 다음 절에서는 모의실험을 수행함으로써 $M(T)$ 의 신뢰구간들을 구축한다.

4. 모의실험

퍼센타일 부스트랩 방법과 표준 부스트랩 방법에 의한 신뢰구간은 Crow (1982)의 신뢰구간과 비교하기 위해서 모의실험을 하였다. 고장강도함수가 (1.2)에서 주어진 power law process에 대해서 $\lambda = 0.5, 0.8, 1.0$, $\beta = 0.3(0.1)0.7$ 그리고 $T = 100, 200, 300, 400$ 을 취한다. 본 논문에서는 신뢰성 증가모형에 대해서 고려하고 있어 β 가 1 보다 큰 경우는 배제하였다. 본 절에서의 모의실험을 위하여 Mathematica를 이용하였으며 부스트랩 대표본의 갯수 B 는 999개로 가정한다. T 는 시험이 종료되어진 시점에서의 t 의 값이다. 신뢰수준은 90%라고 하자. 난수들의 발생과정은 다음과 같다.

- 1) 처음 고장의 출현 시간은 와이블이다.

$$F_{T_1}(t_1) = 1 - \exp(-\lambda t_1^\beta), \quad 0 \leq t_1 < \infty.$$

2) 처음 $(r - 1)$ 개의 고장 시간이 주어졌을 때 r 번째 고장 시간 T_r 는 다음과 같다.

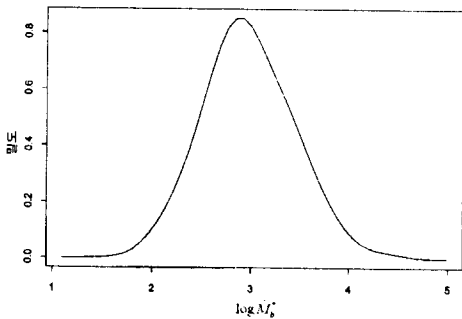
$$F_{T_r}(t_r | T_1 = t_1, \dots, T_{r-1} = t_{r-1}) = 1 - \exp[-\lambda(t_r^\beta + t_{r-1}^\beta)], \quad t_{r-1} \leq t_r < \infty, \quad r = 2, 3, \dots$$

이러한 난수 발생과정에 의해서 얻어진 표본에 근거하여 $M(T)$ 의 최우추정량 $\hat{M}(T)$ 는 (2.8)에 의해서 다음과 같이 얻어진다.

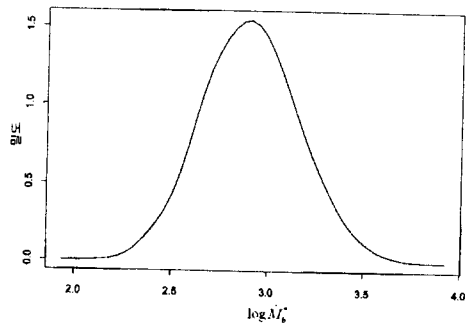
$$\hat{M}(T) = T/n\hat{\beta} \tag{4.1}$$

여기에서 β 의 최우추정량 $\hat{\beta}$ 는 (2.7)에서 주어졌다. 모수 λ 와 β 가 (2.6)과 (2.7)에서 주어진 최우추정량 $\hat{\lambda}$ 와 $\hat{\beta}$ 로 바꾼 power law process 모델에서 임의로 붓스트랩 표본 $0 < t_1^* < t_2^* < \dots < t_n^* < T$ 를 뽑는다. 여기에서 n 은 랜덤이라는 것에 주의하여야 한다. 다시 말하면 $F(t; \lambda, \beta)$ 를 고장강도함수가 $r(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$ 인 분포함수라고 하면 붓스트랩 표본 t_1^*, t_2^*, \dots 은 그의 분포함수가 $\hat{F}(t; \hat{\lambda}, \hat{\beta})$ 인 모집단으로부터 랜덤하게 취해진다. 본 연구에서는 $B = 999$ 개의 붓스트랩 재표본들이 \hat{F} 로부터 뽑혀진다. 원래의 표본과 그러한 999개의 붓스트랩 표본들을 가지고 공식 (3.1)과 (3.2)를 사용해서 PB 신뢰구간과 SB 신뢰구간을 각각 구한다. 또한 Crow (1982)에 의하여 제안된 소표본 신뢰구간 (2.9)는 원래의 표본으로부터 계산되어진다.

$M(T)$ 의 SB 신뢰구간이 의미를 가지기 위해서는 3절에서 지적되었던 대로 B 개의 붓스트랩 추정치들의 정규성이 먼저 검토되어야 한다. 본 연구에서 얻어진 B 개의 붓스트랩 추정치 \hat{M}_b^* , $b = 1, \dots, B$ 는 그림을 그려보거나 적합도검정 검사를 통해서 볼 때 정규분포를 따르지 않는다는 것을 확인하였다. 그러나 $\log \hat{M}_b^*$ 들은 λ, β 또는 T 의 값에 거의 무관하게 정규분포에 매우 근사하게 분포하는 것을 보였다 (그림1,2).



(그림 1) $\lambda = .5, \beta = .4, T = 100$ 인 경우의 $\log \hat{M}_b^*$ 의 확률 밀도 함수



(그림 2) $\lambda = 1.0, \beta = .6, T = 400$ 인 경우의 $\log \hat{M}_b^*$ 의 확률 밀도 함수

도표 4.1 : $\lambda = .8$ 인 power law process의 90% 신뢰구간에 대한 포함확률, 평균 및 표준오차

			$\beta = .3$	$\beta = .4$	$\beta = .5$	$\beta = .6$
		MTBF 참값	104.662	49.528	25.000	13.145
T = 100	Crow	포함확률	.996	.952	.947	.927
		평균	2180.614	700.669	120.162	34.264
		표준오차	3594.671	1666.518	386.176	87.643
	퍼센타일	포함확률	.857	.916	.931	.905
		평균	224.379	129.009	61.963	25.564
		표준오차	4.801	2.893	1.358	.654
	표준	포함확률	.880	.887	.918	.914
		평균	307.822	154.282	62.634	24.951
		표준오차	8.340	4.497	1.595	.665
			$\beta = .3$	$\beta = .4$	$\beta = .5$	$\beta = .6$
		MTBF 참값	170.024	75.070	35.355	17.348
T = 200	Crow	포함확률	.966	.935	.931	.927
		평균	3117.454	686.303	92.571	25.390
		표준오차	5937.591	2120.522	89.257	13.790
	퍼센타일	포함확률	.900	.922	.908	.894
		평균	407.973	196.819	72.417	22.600
		표준오차	8.754	4.714	1.648	.372
	표준	포함확률	.892	.888	.908	.900
		평균	527.062	216.747	70.274	22.096
		표준오차	14.460	6.730	1.638	.358
			$\beta = .3$	$\beta = .4$	$\beta = .5$	$\beta = .6$
		MTBF 참값	225.826	95.746	43.301	20.399
T = 300	Crow	포함확률	.958	.936	.93	.925
		평균	3638.155	544.235	108.131	24.325
		표준오차	7846.750	2349.885	557.937	10.739
	퍼센타일	포함확률	.887	.907	.912	.913
		평균	556.157	232.911	77.187	22.035
		표준오차	11.960	5.819	1.835	.297
	표준	포함확률	.878	.890	.915	.913
		평균	691.573	239.696	75.393	21.674
		표준오차	19.423	7.819	2.061	.290
			$\beta = .3$	$\beta = .4$	$\beta = .5$	$\beta = .6$
		MTBF 참값	276.205	113.785	50.000	22.887
T = 400	Crow	포함확률	.957	.928	.926	.942
		평균	4447.820	544.519	87.380	24.477
		표준오차	10150.371	1690.546	56.965	9.224
	퍼센타일	포함확률	.907	.905	.906	.928
		평균	730.866	269.664	76.369	22.370
		표준오차	16.118	6.352	1.441	.261
	표준	포함확률	.878	.892	.914	.928
		평균	891.333	273.476	74.132	22.063
		표준오차	26.036	7.547	1.377	.254

도표 4.2 : $\lambda = 1.0$ 인 power law process의 90% 신뢰구간에 대한 포함확률, 평균 및 표준오차

		$\beta = .3$	$\beta = .4$	$\beta = .5$	$\beta = .6$	
MTBF 참값		83.730	39.622	20.000	10.516	
T = 100	Crow	포함확률	.995	.943	.954	.928
		평균	1280.476	406.385	63.728	19.365
		표준오차	2392.519	1176.264	146.605	17.967
	퍼센타일	포함확률	.871	.928	.914	.907
		평균	188.138	108.276	42.206	16.602
		표준오차	3.847	2.498	.875	.365
	표준	포함확률	.873	.898	.910	.909
		평균	236.961	120.440	41.497	16.150
		표준오차	6.092	3.631	0.941	.357
		$\beta = .3$	$\beta = .4$	$\beta = .5$	$\beta = .6$	
MTBF 참값		136.019	60.056	28.284	13.876	
T = 200	Crow	포함확률	.967	.941	.933	.945
		평균	2006.771	323.117	56.357	17.319
		표준오차	4792.968	1194.080	55.333	7.465
	퍼센타일	포함확률	.930	.925	.907	.928
		평균	355.269	144.297	47.297	15.679
		표준오차	7.929	3.323	1.112	.208
	표준	포함확률	.907	.912	.904	.930
		평균	426.953	147.505	46.021	15.386
		표준오차	12.615	4.271	1.105	.201
		$\beta = .3$	$\beta = .4$	$\beta = .5$	$\beta = .6$	
MTBF 참값		180.661	76.597	34.641	16.319	
T = 300	Crow	포함확률	.958	.944	.928	.919
		평균	2136.985	284.344	56.353	16.644
		표준오차	5928.281	808.345	33.082	6.591
	퍼센타일	포함확률	.934	.916	.899	.897
		평균	472.513	171.628	49.678	15.272
		표준오차	10.992	4.203	.892	.185
	표준	포함확률	.905	.916	.912	.894
		평균	544.298	170.838	48.357	15.064
		표준오차	16.819	4.837	.840	.182
		$\beta = .3$	$\beta = .4$	$\beta = .5$	$\beta = .6$	
MTBF 참값		220.964	91.028	40.000	18.309	
T = 400	Crow	포함확률	.957	.938	.927	.913
		평균	2344.265	309.124	56.785	17.012
		표준오차	7209.635	1926.571	28.830	5.748
	퍼센타일	포함확률	.930	.915	.907	.896
		평균	588.008	187.209	50.808	15.746
		표준오차	13.857	5.416	.790	.165
	표준	포함확률	.904	.915	.913	.903
		평균	662.293	185.252	49.713	15.562
		표준오차	20.937	6.962	.759	.162

따라서 본 연구에서 구한 $M(T)$ 의 SB 신뢰구간은 먼저 $\log M(T)$ 의 SB 신뢰구간을 먼저 구한 뒤 이 결과로부터 $M(T)$ 의 SB 신뢰구간을 계산하였다.

주어진 λ, β 그리고 T 의 여러 가지 조합에 대해서 위에서 언급된 3 가지 방법(Crow, 퍼센타일 및 표준)에 의해서 계산된 신뢰구간이 power law process에서의 $M(T)$ 의 참값을 포함하는지 아닌지를 결정한다. 모의실험은 $\lambda = 0.5, 0.8, 1.0$ 에 대해서 1000번씩 반복했다. 따라서, 모의실험이 끝난 후에 각 신뢰구간이 $M(T)$ 의 참값을 그의 구간 내에 포함하는 횟수의 비율 (이것을 포함확률이라고 부른다), 평균길이의 표준오차, 신뢰구간의 평균길이를 계산하였다. 모의실험 결과들은 도표 4.1과 4.2에 도표화되었으며 $\lambda = 0.8$ 과 $\lambda = 0.1$ 의 경우에만 게재하였다. $\lambda = 0.5$ 인 경우에도 비슷한 결과를 나타낸다.

5. 결론

도표 4.1과 4.2로부터 Crow 방법에 의한 신뢰구간이 모든 경우에 매우 넓다는 것을 알 수 있다. 그러나 β 의 값이 증가하면서, 다시 말하면 평균고장간격시간이 적어질수록, 기대한 것처럼 신뢰구간의 길이는 점점 짧아지고 포함확률은 명목 신뢰수준으로 점점 가까워진다. 이것은 주로 고장횟수에 대한 기대값은 β 가 증가함에 따라서 증가한다는 사실에 기인한다.

또한 β 가 작을 때에는 PB 방법은 SB 방법에 비해서 신뢰구간의 길이가 짧고 포함확률이 높은 것을 알 수 있다. 따라서 PB 방법이 SB 방법보다는 더욱 효과적이라는 것을 나타낸다. 그러나 β 의 값이 증가함에 따라 PB 방법과 SB 방법은 신뢰구간의 길이나 포함확률의 의미에서 거의 비슷해지거나 오히려 SB 방법이 보다 효과적인 신뢰구간을 구하는 것으로 보인다.

또한 도표로부터 Crow 방법에 근거한 신뢰구간의 포함확률은 언제나 가정된 신뢰수준보다 높다는 것은 명백하다. 이것은 주로 Crow의 신뢰구간이 포함확률이 적어도 신뢰수준만큼 높게 되도록 만들어졌다는 사실에 기인한다. 그러나 λ 와 β 가 증가하므로써 PB 와 SB 방법은 거의 명목 신뢰수준을 얻는다. 이것은 매우 바람직하다. PB 와 SB 방법에 근거한 신뢰구간들에 대해서 포함확률은 $M(T)$ 가 T 보다 클 때 매우 안 좋다. 그러나 $M(T)$ 가 T 보다 큰 경우는 평균적으로 첫번째 고장이 발생하기 이전에 자료의 중단이 생기는 경우로서 무의미하며 거의 관심이 없는 경우이다. 도표들이 보여주는 것처럼 $M(T)$ 가 T 에서 멀어지면 멀어질수록 신뢰구간들이 성취하는 포함확률은 더욱 더 높아진다.

모든 3 가지의 방법은 β 와 T 가 클 때 그리고 관찰된 고장시간들의 수가 많을 때 가장 정확한 신뢰구간을 구하게 된다. 도표를 통해서 포함확률은 붓스트랩 방법보다는 Crow 방법에서가 높다고 할지라도 신뢰구간의 길이에 관해서는 붓스트랩 방법이 Crow 방법보다 훨씬 짧다는 것을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] Ascher, H. (1981). Weibull Distribution vs. Weibull Process, *IEEE Transactions on Reliability*, 426-431.
- [2] Ascher, H. and Feingold, H. (1984). *Repairable System Reliability*, Marcel Dekker Inc.
- [3] Bain, L. J. and Engelhardt, M. (1980). Inferences on the Parameters and Current System Reliability for a Time Truncated Weibull Process, *Technometrics*, vol. 22, 421-426.
- [4] Bassin, W. M. (1969). Increasing Hazard Functions and Overhaul Policy, *IEEE Transactions on Reliability*, 173-178.
- [5] Crow, L. H. (1974). Reliability Analysis for Complex Repairable Systems, *Reliability and Biometry*, eds. by F. Proschan and R. J. Serfling, Philadelphia, SIAM, 319-410.
- [6] Crow, L. H. (1975). Tracking Reliability Growth, *Proceedings of the Twentieth Conference on the Design of Experiments*, ARO Report, vol. 75-2, 741-754.
- [7] Crow, L. H. (1977). Confidence Interval Procedures for Reliability Growth Analysis, *Army Material Systems Analysis Activity Technical Report 197*.
- [8] Crow, L. H. (1982). Confidence Interval Procedures for the Weibull Process, *Technometrics*, vol. 24, 67-72.
- [9] Duane, J. T. (1964). Learning Curve Approach to Reliability Monitoring, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 2, 563-566.
- [10] Efron, B. (1979). Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife, *Annals of Statistics*, vol. 7, 1-26.
- [11] Efron, B. and Gong, G. (1983). A Leisurely Look at the Bootstrap, the Jackknife, and Crossvalidation, *American Statistician*, vol. 37, 36-48.
- [12] Efron, B. and Tibshirani, R. (1986). Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy, *Statistical Science*, vol 1, 54-77.
- [13] Finkelstein, J. M. (1976). Confidence Bounds on the Parameters of the Weibull Process, *Technometrics*, vol. 18, 115-117.
- [14] Franklin, L. A. and Wasserman, G. (1991). Bootstrap Confidence Interval Estimates of C_{pk} : An Introduction, *Communications in Statistics; Simulation and Computation*, vol. 20, 231-242.
- [15] Franklin, L. A. and Wasserman, G. (1992). Bootstrap Lower Confidence Limits for Capability Indices, *Journal of Quality Technology*, vol. 24, 196-210.
- [16] Hall, P. (1988). Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals, *Annals of Statistics*, vol. 16, 927-953.
- [17] Harris, B. and Som, A. P. (1974). Properties of the Generalized Incomplete Modified Bessel Distributions with Applications to Reliability Theory, *Journal of American Statistical Association*, vol. 69, 259-263.

- [18] Lee, L. and Lee, S. K. (1978). Some Results on Inferences for the Weibull Process, *Technometrics*, vol. 20, 41-45.
- [19] Park, W. J. and Kim, Y. G. (1992). Goodness-of-Fit Tests for the Power-Law Process, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 41, 107-111.
- [20] Rigdon, S. E. and Basu, A. P. (1989). The Power Law Process: A Model for the Reliability of Repairable Systems, *Journal of Quality Technology*, vol. 21, 251-260.

[1997년 2월 접수, 1997년 12월 최종수정]

Bootstrap Confidence Interval for Mean Time Between Failures of a Repairable System

Dae Kyung Kim [†], Mi Kyung Ahn[‡], Dong Ho Park[§]

ABSTRACT

Recently, it is of great interest among engineers and reliability scientists to consider a statistical model to describe the failure times of various types of repairable systems. The main subject we deal with in this paper is the power law process which is proved to be a useful model to describe the reliability growth of the repairable system. In particular, we derive the bootstrap confidence intervals of the mean time between two successive failures of a repairable system using the time truncated data. We also compare our bootstrap confidence intervals with Crow's(1982) confidence interval.

[†] Full time Lecturer, Department of Statistics, Chonbuk National University, Chonju 560-756, Korea.

[‡] Department of Statistics, Hallym University, Chunchon 200-702, Korea.

[§] Professor, Department of Statistics, Hallym University, Chunchon 200-702, Korea.