일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형 곡선보의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Monosymmetric Thin-walled Circular Curved Beam

장 승 필* 김 문 영** 민 병 철***
Chang, Sung Pil Kim, Moon Young Min, Byoung Cheol

국문요약

본 연구에서는 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형 곡선보의 자유진동해석을 수행할 수 있는 유한요소 이론 및 엄밀해를 제시하기 위하여, 가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체의 운동방정식을 제시한다. 박벽단면의 구속된 비틂(restrained warping)효과를 고려하는 곡선보의 운동방정식을 얻는다. 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외 고유진동에 대한 엄밀해를 제시하고 박벽 곡선보를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식으로 나타내어 운동방정식에 대입함으로써 탄성강도행렬과 질량행렬을 유도한다. 또한 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 박벽 곡선보요소를 이용한 유한요소 해석결과를 직선박벽보요소를 이용한 해석결과와 비교 검토를 함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

주요어 : 자유진동, 곡선보, 유한요소법, 엄밀해, 박벽단면, 일축대칭단면

ABSTRACT

For free vibration of monosymmetric thin-walled circular arches including restrained warping effect, the elastic strain and kinetic energy is derived by introducing displacement fields of circular arches in which all displacement parameters are defined at the centroid axis. The cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions for developement of the curved thin-walled beam element having eight degrees of freedom. Analytical solution for free vibration behaviors of simply supported thin-walled curved beams with monosymmetric cross-sections is newly derived. Also, a finite element formulation using two noded curved beam element is presented by evaluating elastic stiffness and mass matrices. In order to illustrate the accuracy and practical usefulness of this study, analytical and numerical solutions for free vibration of circular arches are presented and compared with solutions analyzed by the FEM using straight beam element.

Key words : *free-vibration, curved beam, finite element method, analytic solution, thin-walled section, monosymmetric cross section*

1. 서 론

박벽 단면을 갖는 부재는 공학에서 널리 적용되는 재료형태이며 주어지는 외력에 대하여 최소한의 단면을 갖는 합리적인 구조이다. 그러나 휨과 비틂의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 아치교와 곡선교는 교량건설에서 널리 적용되는 구조이며 적절히 설계가 이루어진다면 미관이 뛰어나고 매우 경제적인 교량구조가 될 수 있기 때문에 현재까지 곡선보에 대한 연구[1]는 다양하게 진행되어 왔다. Kim과 Chang 등[2,3]은 비대칭 단면을 갖는 직선 박벽보 요소를 이용하여 박벽뼈대 및 아치구조의 자유진동 및 횡좌굴해석을 수행한 바 있다. 그러나 곡선구조를 직선요소로 모델링하는 것은 곡률효과 때문에 해석 정확도면에서 한계를 갖게된다. 임[4]은 나선형 곡선보요소를 개발하여 나선형 곡선교에 적용하였으며, 윤[5]은 원형 곡선보요

* 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 정교수
** 정회원 · 성균관대학교 건축 · 조경 및 토목공학부 부교수
*** 성균관대학교 건축 · 조경 및 토목공학부 박사과정

소를 개발하여 곡선교의 동적해석에 적용하였다. 그러나 이러한 연구들은 단면이 2축 대칭 단면이라는 제한을 두었다.

본 연구에서는 일축대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 동적거동특성을 파악할 수 있는 적절한 해석이론을 개발하기 위하여, 3차원 연속체로부터 가상일의 원리를 적용하고 박벽단면의 구속된 뒴을 고려한 변위장을 도입하여 곡선보의 총포텐셜에너지를 유도하였다. 3차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 가정하여 이를 운동방정식에 대입함으로써 탄성강도행렬과 질량행렬을 유도하였으며, 이를 토대로 일축대칭 박벽 단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석을 수행할 수 있는 유한요소 프로그램을 개발하였다. 또한 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보에 대해서는 엄밀해를 유도하였고, 제시한 이론 및 방법의 타당성을 증명하기 위하여 직선보 요소를 이용한 유한요소 해석결과와 비교하였다.

2. 선형화된 가상일의 원리

본 논문에서는 선형화된 가상일의 원리를 적용하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

1. 박벽 곡선보는 선형 탄성 거동을 한다.
2. 곡선보의 단면은 뒴변형을 제외하고 강체거동한다.
3. 부재 축을 따라서 단면의 형상은 일정하게 유지된다.

그림 1은 전체좌표계와 일축대칭 단면을 갖는 곡선보의 형상을 나타낸 것이다.

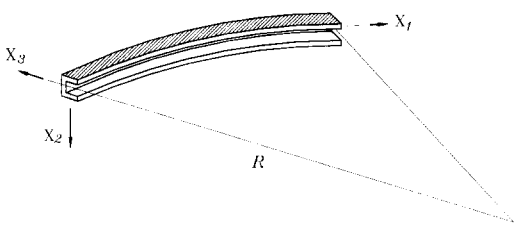


Figure 1 Global coordinate of monosymmetric thin-walled curved beam

일축대칭단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여 회전자유도를 갖는 3차원 연속체에 대하여 가상일의 원리를 나타내면 다음과 같다.

$$\int_V \tau_{ij}\delta e_{ij}\,dV - \omega^2 \int_V \rho U_i \delta u_i\,dV = \int_S T_i \delta U_i\,dS \quad (1)$$

여기서 δ는 변분을, τ_{ij}와 e_{ij}는 각각 응력과 변형도이며 ρ는 밀도, ω는 진동수, T는 표면력, 그리고 U_i는 변위를 나타낸다. 박벽단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여 초기변위는 없다고 가정하면 변형도와 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (2)$$

여기서 아래첨자 'comma'는 부재좌표계에 대한 편미분을 나타낸다.

2.1 일축대칭 단면을 갖는 원형아치의 변위장

그림 2는 부재좌표계 (x_1, x_2, x_3)에 대하여 곡선보요소의 변위장을 8개의 변위파라미터로 나타낸 것이다. x_1은 도심축, x_2와 x_3는 주축을 나타내며 e_2와 e_3는 각각 x_2와

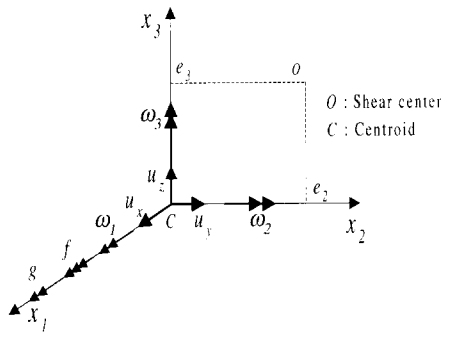


Figure 2 Notation for displacement parameters of curved beam

x_3축에 대한 도심축으로부터 전단중심까지의 거리이다. 본 논문에서는 $e_2=0$ 인 일축대칭 단면만을 생각한다. u_x, u_y, u_z와 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$는 각각 x_1, x_2, x_3 축방향의 강체이동변위(rigid body translation) 및 강체회전변위(rigid body rotation)를 나타내고 g는 u_x의 변화율이며 f는 단면의 뒴변형에 의한 x_1 축방향으로의 비틂각 변화율이다. 전단변형효과가 무시되는 경우 변위파라미터 사이의 관계식은 아래와 같다.

$$\omega_1=\theta,\quad \omega_2=-u_z'+u_x/R,\quad \omega_3=u_y',$$
$$f=-\theta'-u_y'/R,\qquad g=u_x' \tag{3}$$

여기서 'prime'은 x_1에 대한 미분을 나타낸다.

2.2 박벽 곡선보의 변형도-변위관계

부재의 단면이 강체거동하고 축방향에 대하여 뒴변형만 발생한다고 가정하면, 부재단면이 휨과 비틂 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때 박벽 곡선뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_1=u_x-x_2\omega_3+x_3\omega_2+f\phi(x_2,x_3) \tag{4a}$$
$$U_2=u_y-x_3\omega_1 \tag{4b}$$
$$U_3=u_z+x_2\omega_1 \tag{4c}$$
$$\phi=-e_3x_2+\phi_s \tag{4d}$$

여기서 ϕ, ϕ_s는 각각 도심과 전단중심 축에 대한 뒴 함수를 나타낸다. Vlasov의 가정에 따라 면내변형도(e_{22}, e_{33}, e_{23})는 무시하고, 면내응력($\tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}$)은 영으로 가정하면 박벽 곡선보의 변형도-변위관계는 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{11}=\left(U_{1,1}+\frac{U_3}{R}\right)\cdot\frac{R}{R+x_3}$$
$$=[u_x'+\frac{u_z}{R}-x_2\left(u_y''-\frac{\theta}{R}\right)-x_3\left(u_z''-\frac{u_x'}{R}\right)$$
$$-\phi\left(\theta''+\frac{u_y''}{R}\right)]\cdot\frac{R}{R+x_3} \tag{5a}$$

$$2e_{12}=U_{2,1}\cdot\frac{R}{R+x_3}+U_{1,2}$$
$$=(u_y'-x_3\theta')\frac{R}{R+x_3}-u_y'-\left(\theta'+\frac{u_y'}{R}\right)\cdot\phi_{,2} \tag{5b}$$

$$2e_{13}=\left(U_{3,1}-\frac{U_1'}{R}\right)\cdot\frac{R}{R+x_3}+U_{1,3}$$
$$=[u_z'-\frac{u_x}{R}+x_2(\theta'+\frac{u_y'}{R})+\frac{x_3}{R}\left(u_z'-\frac{u_x}{R}\right)$$
$$+\frac{\phi}{R}\left(\theta'+\frac{u_y'}{R}\right)]\cdot\frac{R}{R+x_3}-\left(u_z'-\frac{u_x}{R}\right)$$
$$-\left(\theta'+\frac{u_y'}{R}\right)\cdot\phi_{,3} \tag{5c}$$

도심축과 전단중심에서 정의된 단면상수의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$I_\phi=\int_A\phi^2dA=\int_A(\phi_s-e_3x_2)^2dA=I_\phi^s+e_3^2I_3$$

$$I_{\phi3}=\int_A\phi x_2dA=\int_A(\phi_s-e_3x_2)x_2dA=-e_3I_3$$

$$I_{\phi22}=\int_A\phi x_3^2dA=\int_A(\phi_s-e_3x_2)x_3^2dA$$
$$=I_{\phi22}^s-e_3I_{223}$$

$$I_{\phi23}=\int_A\phi x_3x_2dA=\int_A(\phi_s-e_3x_2)x_3x_2dA$$
$$=I_{\phi23}^s-e_3I_{233}$$

$$I_{\phi33}=\int_A\phi x_2^2dA=\int_A(\phi_s-e_3x_2)x_2^2dA$$
$$=I_{\phi33}^s-e_3I_{333}$$

$$I_{\phi\phi2}=\int_A\phi^2x_3dA=\int_A(\phi_s-e_3x_2)^2x_3dA$$
$$=I_{\phi\phi2}^s+e_3^2I_{233}-2e_3I_{\phi23}^s$$

여기서 위 첨자 's'는 단면상수가 전단중심에서 정의되었음을 나타내고 첨자가 없

는 것은 도심에 대하여 정의되었음을 나타낸다.

2.3 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 운동방정식

일축대칭 박벽 곡선보의 자유진동 해석방법을 제시하기 위해서, 3차원 곡선보 요소의 탄성 변형에너지 Π_E 와 운동에너지 T는 각각 식(1)로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2}\int_L\int_A [\tau_{11}e_{11} + 2\tau_{12}e_{12} + 2\tau_{13}e_{13}]dA\,dx_1 \quad (7)$$

$$T = \frac{1}{2}\rho\omega^2\int_L\int_A (U_1{}^2 + U_2{}^2 + U_3{}^2)\,dV \quad (8)$$

먼저 식(5)를 탄성변형에너지 식(7)에 대입하고 단면에 대하여 적분한 후 일축대칭 단면에 대한 항만을 정리하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2}\int_0^L \Big[EA(1+Z)\Big(u_x' + \frac{u_z}{R}\Big)^2 + E\Big(I_3 - \frac{I_{233}}{R}\Big)\Big(u_y'' - \frac{\theta}{R}\Big)^2 + EZAR^2\Big(u_z'' - \frac{u_x'}{R}\Big)^2 + E\Big(I_\phi - \frac{I_{\phi\phi 2}}{R}\Big)\Big(\theta' + \frac{u_y''}{R}\Big)^2 + 2\,EZAR\Big(u_x' + \frac{u_z}{R}\Big)\Big(u_z'' - \frac{u_x'}{R}\Big) + GJ\Big(\theta' + \frac{u_y'}{R}\Big)^2 + 2\,E\Big(I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R}\Big)\Big(u_y'' - \frac{\theta}{R}\Big)\Big(\theta' + \frac{u_y''}{R}\Big)\Big]dx_1 \quad (9)$$

여기서 A, I_3, J 그리고 Z는 각각 단면적, x_3 축에 대한 단면 2차모멘트, 비틂상수 그리고 곡률을 갖는 곡선보의 단면상수로써 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z \cong \frac{I_2}{AR^2}, \quad \int_A \frac{R}{R+x_3}dA = A(1+Z) \cong A + \frac{I_2}{R^2}$$

$$\int_A \frac{Rx_3}{R+x_3}dA = -ZAR \cong -\frac{I_2}{R} + \frac{I_{222}}{R^2},$$

$$\int_A \frac{Rx_3^2}{R+x_3}dA = AZR^2 \cong I_2 - \frac{I_{222}}{R}$$

$$J = \int_A \Big[\Big\{x_3 + \phi_{,2}\Big(1 + \frac{x_3}{R}\Big)\Big\}^2 + \Big\{x_2 + \frac{\phi}{R} - \phi_{,3}\Big(1 + \frac{x_3}{R}\Big)\Big\}^2\Big]\frac{R}{R+x_3}dA \quad (10)$$

한편, 변위장을 나타내는 식(4)를 운동에너지 식(8)에 대입하고 단면에 대하여 적분하면 다음과 같이 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 운동에너지 T를 얻을 수 있다.

$$T = \frac{1}{2}\rho\omega^2\int_L \Big[A(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \Big(I_o + \frac{I_{222}+I_{233}}{R}\Big)\theta^2 + \Big(I_3 + \frac{I_{233}}{R}\Big)u_y'^2 + \Big(I_2 + \frac{I_{222}}{R}\Big)\Big(u_z' - \frac{u_x}{R}\Big)^2 + \Big(I_\phi + \frac{I_{\phi\phi 2}}{R}\Big)\Big(\theta' + \frac{u_y'}{R}\Big)^2 - 2\frac{I_2}{R}u_x\Big(u_z' - \frac{u_x}{R}\Big) - 2\frac{I_2}{R}u_y\theta + 2\Big(I_{\phi 3} + \frac{I_{\phi 23}}{R}\Big)u_y'\Big(\theta' + \frac{u_y'}{R}\Big)\Big]dx_1 \quad (11)$$

3. 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동에 대한 엄밀해

일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외 자유진동에 대한 엄밀해를 유도하기 위하여, 식(9), 식(11)로부터 면외거동 및 비틂과 관련된 항만을 재정리하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\Pi_E - T = \frac{1}{2}\int_o^L \Big[E\widehat{I_3}\Big(u_y'' - \frac{\theta}{R}\Big)^2 + GJ\Big(\theta' + \frac{u_y'}{R}\Big) + E\widehat{I_\phi}\Big(\theta' + \frac{u_y''}{R}\Big)^2 + 2E\widehat{I_{\phi 3}}\Big(u_y'' - \frac{\theta}{R}\Big)\Big(\theta' + \frac{u_y''}{R}\Big) - \rho\omega^2\Big\{Au_y^2 + \widetilde{I_o}\theta^2 + \widetilde{I_3}u_y'^2 + \widetilde{I_\phi}\Big(\theta' + \frac{u_y'}{R}\Big)^2 - 2\frac{I_2}{R}u_y\theta + \widetilde{I_{\phi 3}}u_y'\Big(\theta' + \frac{u_y'}{R}\Big)\Big\}\Big]dx_1 \quad (12)$$

여기서

$$\widehat{I_3} = I_3 - \frac{I_{233}}{R}, \quad \widehat{I_\phi} = I_\phi - \frac{I_{\phi\phi 2}}{R}, \quad \widehat{I_{\phi 3}} = I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R},$$

$$\widetilde{I_3} = I_3 + \frac{I_{233}}{R}, \quad \widetilde{I_\phi} = I_\phi + \frac{I_{\phi\phi 2}}{R}, \quad \widetilde{I_{\phi 3}} = I_{\phi 3} + \frac{I_{\phi 23}}{R},$$

$$\widetilde{I_o} = I_o + \frac{I_{222}+I_{233}}{R} \quad (13)$$

양단이 단순지지된 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외진동을 파악하기 위하여 면외거동에 대한 변위 u_y와 비틂 변위 θ에 대한 변위함수를 식(14)와 같이 정의한다.

$$u_y = B\sin(\lambda x_1), \quad \theta = D\sin(\lambda x_1), \quad \lambda = \frac{n\pi}{L} \tag{14}$$

위 식에서 B와 D는 미지계수(amplitude)이고 n은 곡선보의 진동모드를 나타낸다. 정의된 처짐함수를 식(12)에 대입하여 변분을 취하면, 다음과 같은 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 고유진동에 대한 에너지식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{4}{L}\delta(\Pi_E - T) = {} & B^2\Big[E\widehat{I_3}\lambda^4 + GJ\frac{\lambda^2}{R^2} + E\widehat{I_\phi}\frac{\lambda^4}{R^2} + \\ & 2E\widehat{I_{\phi 3}}\frac{\lambda^4}{R} - \rho\omega^2\Big(A + \widetilde{I_3}\lambda^2 + \widetilde{I_\phi}\frac{\lambda^2}{R^2} + 2\widetilde{I_{\phi 3}}\frac{\lambda^2}{R}\Big)\Big] \\ & + 2\Big[E\widehat{I_3}\frac{\lambda^2}{R} + GJ\frac{\lambda^2}{R} + E\widehat{I_\phi}\frac{\lambda^4}{R} + E\widehat{I_{\phi 3}}\Big(\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{R^2}\Big) \\ & - \rho\omega^2\Big(\widetilde{I_\phi}\frac{\lambda^2}{R^2} - \frac{I_2}{R} + \widetilde{I_{\phi 3}}\lambda^2\Big)\Big] + D^2\Big[E\widehat{I_3}\frac{1}{R^2} + GJ\lambda^2 \\ & + E\widehat{I_\phi}\lambda^4 + 2E\widehat{I_{\phi 3}}\frac{\lambda^2}{R} - \rho\omega^2(\widetilde{I_o} + \widetilde{I_\phi}\lambda^2)\Big] = 0\end{aligned} \tag{15}$$

일축대칭 단면을 갖는 곡선보의 고유진동수를 구하기 위하여, 미지 계수 B와 D를 갖는 특성방정식을 행렬식으로 나타내면 식(16)과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

여기서

$$\begin{aligned}K_{11} = {} & E\widehat{I_3}\lambda^4 + GJ\frac{\lambda^2}{R^2} + E\widehat{I_\phi}\frac{\lambda^4}{R^2} + 2E\widehat{I_{\phi 3}}\frac{\lambda^4}{R} \\ & - \rho\omega^2\Big(A + \widetilde{I_3}\lambda^2 + \widetilde{I_\phi}\frac{\lambda^2}{R^2} + 2\widetilde{I_{\phi 3}}\frac{\lambda^2}{R}\Big)\end{aligned} \tag{17a}$$

$$\begin{aligned}K_{12} = K_{21} = {} & E\widehat{I_3}\frac{\lambda^2}{R} + GJ\frac{\lambda^2}{R} + E\widehat{I_\phi}\frac{\lambda^4}{R} \\ & + E\widehat{I_{\phi 3}}\Big(\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{R^2}\Big) - \rho\omega^2\Big(\widetilde{I_\phi}\frac{\lambda^2}{R^2} - \frac{I_2}{R} + \widetilde{I_{\phi 3}}\lambda^2\Big)\end{aligned} \tag{17b}$$

$$\begin{aligned}K_{22} = {} & E\widehat{I_3}\frac{1}{R^2} + GJ\lambda^2 + E\widehat{I_\phi}\lambda^4 + 2E\widehat{I_{\phi 3}}\frac{\lambda^2}{R} \\ & - \rho\omega^2(\widetilde{I_o} + \widetilde{I_\phi}\lambda^2)\end{aligned} \tag{17c}$$

식(16)의 행렬식이 영이라 놓으면 다음과 같이 곡선보의 고유진동수 ω^2에 대한 2차 방정식을 얻는다.

$$C_1\omega^4 + C_2\omega^2 + C_3 = 0 \tag{18}$$

여기서

$$\begin{aligned}C_1 = {} & \rho^2[R^2\widetilde{I_3}\widetilde{I_\phi}\lambda^4 + R^2\widetilde{I_3}\widetilde{I_o}\lambda^2 + R^2A\widetilde{I_\phi}\lambda^2 + 2I_2\widetilde{I_\phi}\lambda^2 \\ & + \widetilde{I_o}\widetilde{I_\phi}\lambda^2 + 2RI_2\widetilde{I_{\phi 3}}\lambda^2 - R^2\widetilde{I_{\phi 3}}^2\lambda^4 + 2R\widetilde{I_o}\widetilde{I_{\phi 3}}\lambda^2 - I_2^2 \\ & + R^2A\widetilde{I_o}]\end{aligned} \tag{19a}$$

$$\begin{aligned}C_2 = {} & -\frac{\rho}{R^2}[R^4E\widehat{I_\phi}\widetilde{I_3}\lambda^6 - 2R^4E\widehat{I_{\phi 3}}\widetilde{I_{\phi 3}}\lambda^6 + R^4E\widehat{I_3}\widetilde{I_\phi}\lambda^6 \\ & + 2R^3I_2E\widehat{I_{\phi 3}}\lambda^4 + R^4AE\widehat{I_\phi}\lambda^4 + 2R^2I_2E\widehat{I_\phi}\lambda^4 + R^4\widetilde{I_3}GJ\lambda^4 \\ & + 2R^3E\widehat{I_{\phi 3}}\widetilde{I_3}\lambda^4 + R^4\widetilde{I_o}E\widehat{I_3}\lambda^4 + 2R^3\widetilde{I_o}E\widehat{I_{\phi 3}}\lambda^4 \\ & + R^2\widetilde{I_o}E\widehat{I_\phi}\lambda^4 - 2R^3E\widehat{I_3}\widetilde{I_{\phi 3}}\lambda^4 + 2R^2E\widehat{I_{\phi 3}}\widetilde{I_{\phi 3}}\lambda^4 \\ & - 2R^2E\widehat{I_3}\widetilde{I_\phi}\lambda^4 + R^4AGJ\lambda^2 + 2R^2I_2GJ\lambda^2 + 2R^2I_2E\widehat{I_3}\lambda^2 \\ & + 2R^3AE\widehat{I_{\phi 3}}\lambda^2 + 2RI_2E\widehat{I_{\phi 3}}\lambda^2 + R^2E\widehat{I_3}\widetilde{I_3}\lambda^2 + R^2\widetilde{I_o}GJ\lambda^2 \\ & + 2RE\widehat{I_3}\widetilde{I_{\phi 3}}\lambda^2 + E\widehat{I_3}\widetilde{I_\phi}\lambda^2 + R^2AE\widehat{I_3}]\end{aligned} \tag{19b}$$

$$C_3 = \frac{E\lambda^2}{R^2}(R^2\lambda^2 - 1)^2(E\widehat{I_3}\widehat{I_\phi}\lambda^2 + GJ\widehat{I_3} - E\widehat{I_{\phi 3}}^2\lambda^2) \tag{19c}$$

4. 유한요소 정식화

본 연구에서는 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여 곡선보 요소와 직선보 요소를 비교하여 제시한다. 두 요소의 변위장은 모두 도심축에 대하여 정의되었으며 유한요소의 형상함수는 3차의 Hermitian 다항식으로 나타낸다. 곡선보요소와 관련하여 윤[5]은 대칭단면을 갖는 곡선보의 정적해석을 통하여 얻은 엄밀한 처짐함수를 형상함수로 사용하였다. 이 함수를 형상함수로 사용할 때 복잡한 형태를 띠고 있어서 사용하기 불편하고, 비대칭단면을 갖는 곡선보의 정적해석 및 자유진동해석에서는 역시 근사함수에 해당한다. 따라서 본 연구의 자유진동해석에서는 3차의 Hermitian 다항식이 비교적 간단하고, 박벽 직선보와 곡선보

에 적용해도 전혀 무리가 없으므로 이 함수를 사용하도록 한다.

4.1 곡선보 요소

그림 3은 구속된 비틂에 의한 뒴을 고려한 박벽 곡선보요소의 재단변위벡터를 절점 p와 q에 대하여 재단변위벡터를 표시한 것이다. 일반화된 좌표들(u_x, u_y, u_z , θ)을 재단변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 논문에서 요소당 2절점을 갖는 3차의 Hermitian 다항식을 사용한다. 그림 3을 참조하여 위의 사항들을 고려하면 박벽 곡선보요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다.

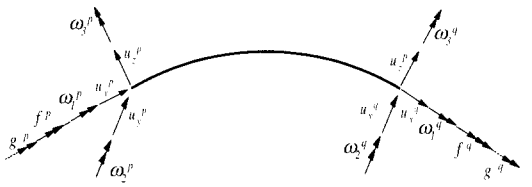


Figure 3 Curved member displacement

$$u_x = h_1 \cdot u^p + h_2 \cdot L\left(g^p - \frac{w^p}{R}\right) + h_3 \cdot u^q + h_4 \cdot L\left(g^q - \frac{w^q}{R}\right) \tag{20a}$$

$$u_y = h_1 \cdot v^p + h_2 \cdot L \cdot \omega_3^p + h_3 \cdot v^q + h_4 \cdot L \cdot \omega_3^q \tag{20b}$$

$$u_z = h_1 \cdot w^p - h_2 \cdot L\left(\omega_2^p - \frac{u^p}{R}\right) + h_3 \cdot w^q - h_4 \cdot L\left(\omega_2^q - \frac{u^q}{R}\right) \tag{20c}$$

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^p - h_2 \cdot L\left(f^p + \frac{\omega_3^p}{R}\right) + h_3 \cdot \omega_1^q - h_4 \cdot L\left(f^q + \frac{\omega_3^q}{R}\right) \tag{20d}$$

여기서 h_i는 3차의 Hermitian 다항식으로 써 다음과 같다.

$$h_1 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \qquad h_2 = (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)L$$
$$h_3 = -2\xi^3 + 3\xi^2, \qquad h_4 = (\xi^3 - \xi^2)L$$
그리고 $\xi = x / L$ (21)

식(20)에서 절점변위성분은 곡률효과를 고려하여 다음과 같이 정의한다.

$$u^p = u_x(0), \qquad v^p = u_y(0), \qquad w^p = u_z(0),$$
$$\omega_1^p = \theta(0), \qquad \omega_2^p = -u_z'(0) + \frac{u_x(0)}{R},$$
$$\omega_3^p = u_y'(0), \qquad f^p = -\theta'(0) - \frac{u_y'(0)}{R},$$
$$g^p = u_x'(0) + \frac{u_z(0)}{R} \tag{22}$$

식(1)을 고려하고 식(20)을 식(9)와 식(11)에 대입하여 적분을 행하면 다음과 같이 박벽 곡선보에 대한 행렬운동방정식을 얻는다.

$$K_e U_e - \omega^2 M_e U_e = F_e \tag{23}$$

여기서

$$U_e = \langle U^p, v^p, W^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, g^p, U^q, v^q, W^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q, g^q \rangle \tag{24a}$$

$$F_e = \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^p, M_2^p, M_3^p, M_\phi^p, F_m^p, F_1^q, F_2^q, F_3^q, M_1^q, M_2^q, M_3^q, M_\phi^q, F_m^q \rangle \tag{24b}$$

위 식에서 K_e와 M_e는 각각 부재좌표계에 대한 16×16 탄성강도행렬 및 질량행렬을 나타낸다. U_e 와 F_e 는 각각 구속된 비틂을 고려한 부재좌표계에서의 절점변위 및 절점력벡터를 나타낸다. 결과적으로 직접강도법에 의하여 전체 구조물에 대한 운동방정식은 다음과 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

$$M^o \ddot{U} + K^o U = 0 \tag{25}$$

여기서 윗첨자 'o'는 전체강도행렬을 나타내고

이 식으로부터 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형 아치의 고유진동수를 계산할 수 있다.

4.2 직선보 요소

곡선보에서의 경우와 마찬가지로 선형화된 가상일의 원리를 적용하면, 구속된 뒴효과를 고려한 박벽 직선보에 대한 포텐셜에너지 Π는 식(26) 및 식(27)과 같이 나타낼 수 있다. 직선보의 탄성변형에너지는 도심에 대하여 정의된 변위장을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2}\int_o^L [EA u_x'^2 + EI_3 u_y''^2 + EI_2 u_z''^2 + GJ\theta'^2 + EI_\phi \theta''^2 + 2EI_{\phi 3} u_y'' \theta'' + 2EI_{\phi 2} u_z'' \theta'' + 2EI_{23} u_y'' u_z'']\, dx_1 \quad (26)$$

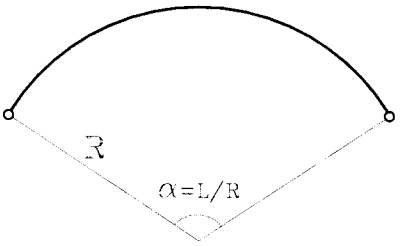
도심축에 대하여 정의된 운동에너지 T는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2}\rho\omega^2 \int_o^L [A(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + I_o\theta^2 + I_2 u_z'^2 + I_3 u_y'^2 + I_\phi \theta'^2 + 2I_{\phi 2} u_z' \theta' + 2I_{\phi 3} u_y' \theta']\, dx_1 \quad (27)$$

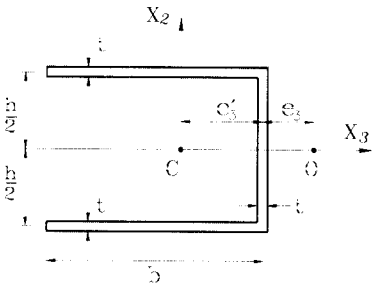
위 식에서 Π_E와 T는 곡률을 무시한 곡선보의 포텐셜에너지와 같다. 본 연구의 직선보 요소는 이전의 연구[2,3]에서와 같이 절점당 7개의 자유도를 갖는 2절점 박벽 직선보 요소를 적용하여 곡선구조를 모델링하였다.

5. 해석예제

박벽단면을 갖는 원형 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여, 구속된 뒴과 곡률효과를 고려함으로써 박벽 곡선보의 포텐셜에너지를 일관성있게 유도하였다. 유한요소 정식화 과정에서 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하고 5점 가우스적분을 행함으로써 탄성강도행렬 및 질량행렬을 산정하였다. 고유치문제는 Jacobi의 방법을 사용하여 해결하였다. 또한, 단순지지되고 일축대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동에 대한 엄밀해를 유도하였다. 본 연구에서 제시한 이론 및 개발된 유한요소를 검증하기 위하여, 곡률변화에 따른 원형 곡선보의 자유진동에 대한 해석결과를 제시하고 문헌의 결과와 비교, 검토를 행한다.



(a) simply supported circular arch



(b) monosymmetric cross section

Figure 4 Geometry of circular beam

그림 4(b)는 일축대칭 단면을 갖는 원형 아치의 단면형상을 보여주고 있다. 단면의 기하학적 형태로부터 계산되는 단면 상수는 다음과 같다.

$$A = t(2b+h), \qquad e_3 = \frac{3b^2}{6b+h} + \frac{b^2}{2b+h},$$

$$J = \frac{t^3}{3}(2b+h), \qquad I_2^s = \frac{tb^3(b+2h)}{3(2b+h)},$$

$$I_3^s = \frac{th^2}{12}(6b+h), \qquad I_\phi^s = \frac{tb^3h^2(3b+2h)}{12(h+6b)},$$

$$I_{\phi 3}^s = 0, \qquad I_{\phi 23}^s = -I_\phi^s,$$

$$I_{\phi\phi 2}^s = -\frac{tb^4h^3(12b^2+14bh+3h^2)}{24(2b+h)(6b+h)^2},$$

$$I_{233}^s = -\frac{tb^2h^3}{6(2b+h)}, \quad I_{222}^s = -\frac{tb^4h^2}{2(2b+h)^2} \quad (28)$$

여기서 윗첨자 's'는 단면상수가 전단중심에 대하여 정의되었음을 나타내고, A, e_3 그리고 J는 각각 단면적, 도심으로부터 전단중심까지의 거리 그리고 비틀림 상수를 나타낸다. 윗식은 식(6)을 이용하여 도심에 대한 단면상수로 변환시킬 수 있다.

본 장의 표 1, 2, 3 각각에서 진동모우드 n에 대하여 제시된 두 개의 고유진동수 값은 곡선아치의 면외 이동변위와 비틂회전각이 연계되는 두 개의 진동모우드에 대응하며, 엄밀해는 2차 방정식(18)의 두 근으로부터 산정한다.

5.1 이축대칭단면을 갖는 박벽 원형아치의 자유진동 해석

그림 4(a)는 단순지지된 박벽 원형아치를 보여주고 있다. 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 곡선보를 이용한 유한요소의 해석에 대한 타당성을 증명하기 위해서 곡률변화에 따른 다양한 해석을 수행하고 직선보 요소를 이용한 해석 결과와 비교하였으며 이때 사용된 단면의 물성치는 다음과 같다.

Table 1 Natural frequency of doubly symmetric thin-walled circular arch, ω^2

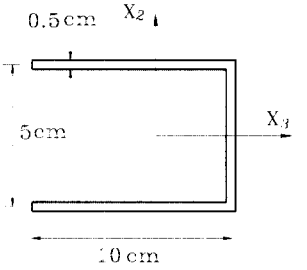
angle (degree)	mode	Analytic solution	Finite Element Method	
			curved beam	straight beam
0	n=1	0.000163042 0.0263765	0.000163042 0.0263765	0.000163042 0.0263765
	n=2	0.00260860 0.106089	0.00260864 0.106089	0.00260860 0.106089
	n=3	0.0132054 0.240886	0.0132063 0.240886	0.0132054 0.240886
90	n=1	0.000000729294 3.31694	0.000000729424 3.316967	0.000000738620 3.31701
	n=2	0.0000715601 3.39899	0.0000715930 3.39909	0.0000717567 3.39907
	n=3	0.000848510 3.54355	0.000849345 3.54376	0.000849542 3.54364
180	n=1	0.0 13.1882	0.0 13.1883	0.0 13.1892
	n=2	0.0000117307 13.2702	0.0000117653 13.2705	0.0000118912 13.2712
	n=3	0.000187355 13.4151	0.000188229 13.4160	0.000188351 13.4163
360	n=1	0.000000734806 52.6731	0.000000734896 52.6735	0.000000698208 52.6891
	n=2	0.0 52.7547	0.0 52.7563	0.0 52.7708
	n=3	0.0000185597 52.8991	0.0000194384 52.9026	0.0000191807 52.9154

$L=4500\,cm,\quad A=14.4\,cm^2,\quad J=1.414cm^4$
$I_2=93\,cm^4,\quad I_3=273\,cm^4,\quad I_\phi=2,070\ cm^6$
$E=284,200\,kgf/cm^2,\quad G=109,760\,kgf/cm^2,$
$\rho=0.00785kgf/cm^3$

아치에 대한 호의 길이는 전체구조에 대하여 일정하게 유지되고 각도만을 변화시켜 해석하였으며 면외진동 모드에 대해서 정리하였다. 표 1에서 면외 진동모드는 면외 이동변위(u_y)와 회전변위(θ)에 의한 복합모드에 의해 거동하기 때문에, 하나의 진동모드에 대하여 u_y와 θ에 대한 두 가지 진동수를 나타내었다. 엄밀해는 식(18)을 이용하여 계산하였고, 유한요소를 이용한 해석에서는 단위요소당 길이가 가장 길어지는 경우(360°)에 대하여 수렴을 보이는 곡선보와 직선보의 요소의 수를 선택하였다. 얻어진 결과로부터 곡선보 요소는 20개를 사용하였고 직선보 요소를 이용할 경우에는 기하학적인 대칭성을 고려하여 아치의 절반만을 50개의 요소로 모델링하였다. 면외진동에 대한 원형아치의 고유진동수를 해석한 결과, 표 1에 나타낸 바와 같이 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 곡선보 요소에 의한 해석결과가 직선보 요소를 이용한 해석 결과와 서로 잘 일치하였다.

5.2 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 자유진동해석

본 예제에서는 단순지지되고 일축대칭단면을 갖는 원형아치의 면외자유진동 해석을 수행하였다. 단면의 재료상수와 기하학적 물성치는 아래에 나타낸 바와 같이 식(28)을 식(6)에 대입함으로써 도심축에서 정의된 단면상수로 변환하여 얻을 수 있다. 또한, 단면상수에 고려되는 곡률효과를 파악하기 위하여, 표 2, 3에 제시한 방법 1은 식(13)을 이용하여 해석한 것이고 방법 2는 에너지식에서 곡률반경 R로 나누어지는 단면계수들을 무시하고 직선보에서 사용되는 단면상수만을 적용하여 해석한 결과이다.



$A=12.5\,cm^2,\quad E=73,000\,kgf/cm^2,$
$G=28,000\,kgf/cm^2,\quad J=1.04167\,cm^4,$
$e_3=8.61538\ cm,\quad I_2=133.38542\,cm^4,$
$I_3=67.91667\,cm^4,\quad I_\phi=5682.1302\,cm^6,$
$I_{\phi 3}=-585.12821\,cm^5,\quad I_{222}=-100.0\ cm^5,$
$I_{\phi\phi 2}=7465.7298\,cm^7,\quad I_{\phi 23}=-282.05128cm^6,$
$I_{233}=-41.666667cm^5,\quad \rho=0.00785\,kgf/cm^3,$
$\beta_1=16.10417\ cm^6,\quad \beta_2=-1.06209\ cm^6$

Figure 5 Cross section and section properties of the monosymmetric circular arch

아치에 대한 호의 길이는 전체구조에 대하여 각각 1200cm 및 250cm로 일정하게 유지시키고 각도만을 변화시켜 면외진동 모드에 대해 해석하였다. 엄밀해는 식(18)을 이용하여 계산하였고 곡선보 요소는 20개의 요소를 이용하였다. 직선보 요소의 경우는 5.1절과 마찬가지로 아치의 절반만을 50개의 요소로 모델링하였다. 직선보 요소의 결과는 곡선형상을 여러 개의 직선요소로 분할하여 해석함으로써 엄밀한 직선보를 이용한 해석결과와 다소의 차이를 나타내었지만 박벽단면을 갖는 다양한 형상의 구조물에 대하여 일관성 있는 해석결과를 얻을 수 있었다. 한편, 곡선보 요소는 정확한 곡률효과가 고려되므로 적은 수의 요소를 이용하더라도 충분히 정확한 결과를 얻었다. 표 2와 3에서는 하나의 진동모드에 대하여 면외 이동변위와 회전변위에 의한 두 가지 진동수를 나타내었으며 표 2와 3은 각각 원호의

길이가 1200cm 및 250cm를 갖는 박벽 원형 아치의 자유진동에 대한 해석결과를 제시한 것이다. 표 2에서와 같이 단면의 크기에 비해 원호의 길이가 긴 경우에는 본 연구에서 제시한 엄밀해와 곡선보를 이용한 해석결과가 직선보를 이용한 해석결과와 서로 잘 일치하였으나, 표 3에서와 같이 단면의 크기에 비해 원호의 길이가 짧은 경우에는 각도가 커짐에 따라 본 연구의 방법 1에 의한 엄밀해 및 곡선보에 의한 유한요소 해석결과가 직선보를 이용한 해석결과와 최대 10.6 %의 차이를 나타내었다. 단면의 일축대칭성과 곡률효과 때문에 추가로 발생하는 단면계수를 무시한 경우인 방법 2의 결과는 엄밀해와 직선보요소를 이용한 결과의 중간 값을 보였으며, 각 진동모드에 대응하는 두 개의 고유진동수값중에 첫 번째는 엄밀해와 비교할 때 직선보를 이용한 결과가 크고, 두번째는 직선보의 결과가 작게 됨을 관찰할 수 있다. 따라서 방법 1의 결과와 직선보에 의한 결과값의 차이가 커지는 것은 단면의 일축대칭성과 곡률효과의 상승작용 때문인 것으로 판단된다.

6. 결 론

일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 자유진동해석을 수행하기 위하여, 3차원 연속체로부터 선형화된 가상일의 원리를 적용하여 탄성변형에너지와 운동에너지식을 유도하였다. 박벽 단면의 구속된 뒴을 고려하는 변위장을 도입하고 모든 변위 함수는 도심에 대하여 정의하였다. 얻어진 이론으로부터 일축대칭 단면을 갖는 곡선보에 대한 유한요소를 개발하기 위하여 3차의 Hermitian 다항식을 적용하여 형상함수로 가정하였고 이를 운동방정식에 대입함으로써 탄성강도행렬과 질량행렬을 유도하였다. 또한 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 아치에 대해서는 엄밀해를 유도하여 진동 모드에 대한 이해를 높였다. 본 연구에서 제시한 이론 및 방법의 타당성을 증명하기 위하여 직선보 요소를 이용한 유한요소 해석결과를 비교하였으며, 다음과 같은 결론에 도달하였다.

Table 2 Natural frequency of monosymmetric thin-walled circular arch, $L = 1200.0\,cm$, ω^2

angle (degree)	mode	Analytic solution		Finite Element Method	
		Method 1	Method 2	curved beam	straight beam
90	n=1	0.0000339233 5.04119	0.0000339267 5.03195	0.0000339253 5.04119	0.0000343869 5.03139
	n=2	0.00422112 4.18083	0.00422282 4.17178	0.00422183 4.18083	0.00423705 4.16936
	n=3	0.0694180 3.27466	0.0694720 3.26620	0.0694431 3.27472	0.0696487 3.26202
180	n=1	0.0 20.7490	0.0 21.6751	0.0 20.7490	0.0 20.6753
	n=2	0.000613810 18.4340	0.000614069 18.3614	0.000614396 18.4340	0.000622853 18.3528
	n=3	0.0125648 15.1514	0.0125775 15.0815	0.0125835 15.1514	0.0126632 15.0613
360	n=1	0.0000324325 84.8226	0.0000324352 84.2290	0.0000324341 84.8226	0.0000307968 84.5388
	n=2	0.0 79.5830	0.0 78.9957	0.000001 79.5830	0.000001 78.9973
	n=3	0.00104492 71.4373	0.00104583 70.8618	0.00105948 71.4373	0.00108232 70.8044

Table 3 Natural frequency of monosymmetric thin-walled circular arch, $L = 250.0\,cm$, ω^2

angle (degree)	mode	Analytic solution		Finite Element Method	
		Method 1	Method 2	curved beam	straight beam
90	n=1	0.0318090 81.7402	0.0318883 80.7971	0.0318105 81.7402	0.0324411 80.4651
	n=2	13.4646 30.5850	13.5891 29.9947	13.4656 30.5856	13.8222 29.5564
	n=3	33.3731 240.323	32.7736 242.070	33.3749 240.361	32.3064 245.689
180	n=1	0.0 406.684	0.0 398.763	0.000001 406.684	0.000005 397.025
	n=2	1.29962 205.099	1.31524 198.608	1.30018 205.100	1.35617 194.984
	n=3	67.8975 99.9679	69.3936 95.7551	67.9272 99.9767	71.9117 92.7175
360	n=1	0.0232171 1848.46	0.0232263 1782.94	0.0232178 1848.46	0.0221255 1771.16
	n=2	0.0 1314.98	0.0 1255.03	0.000174 1314.98	0.000169 1233.14
	n=3	3.74659 725.235	3.85965 676.009	3.75927 725.259	4.13519 648.523

1. 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동에 대한 엄밀해는 비교적 적은 수의 곡선보요소로 모델링한 해석결과와 거의 일치하였다.
2. 직선 보요소를 이용한 경우는 충분히 많은 개수의 보요소로 모델링하여야 곡선보의 고유진동수에 대한 엄밀해에 근접하는 결과를 얻을 수 있었다.
3. 단면의 크기에 비해 원호의 길이가 짧은 경우, 각도가 커짐에 따라 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 곡선보에 의한 유한요소 해석결과가 직선보를 이용한 유한요소 해석결과와 다소 차이를 보였는데 이는 단면의 비대칭성과 곡률효과가 커지기 때문인 것으로 판단된다.
4. 박벽 곡선보 요소와 직선보요소를 적당히 결합시키면 임의의 지지조건과 일축대칭 단면을 갖는 곡선뼈대구조의 자유진동 해석에 유용하게 쓰여질 수 있을 것으로 생각된다.

감사의 글

본 연구는 포항제철 석좌교수 연구기금에 의해 연구되었으므로 이에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Kou, C.h., Steven, E.B., and Huang, J.Y., "Free vibration analysis of curved thin-walled girder bridges," *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 118(6), No. 10, 1992.10. pp. 2890-2910.
2. Kim, M.Y., Chang, S.P., and Kim, S.B., "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams I : analytic approach.," *Int. J. Numer. Methods Engineering*, 37, 1994.12. pp. 4097 ~4115,
3. Kim, M.Y., Chang, S.P., and Kim, S.B., "Spatial stability and free vibration of

shear flexible thin-walled elastic beams II : numerical approach," *Int. J. Numer. Methods Engineering*, 1994.12. pp. 4117~4140.

4. 임성순, "나선형 곡선 부재의 동적 해석 ", 공학박사학위논문, 서울대학교, 1987.
5. 윤기용, "수평곡선 I형교의 동적거동 특성 ", 공학박사학위논문, 고려대학교, 1997.