

3차원 케이블망의 초기평형상태 결정 및 정적 비선형 유한요소해석

Static Non-linear Finite Element Analysis of Spatial Cable Networks

김 문 영*

Kim, Moon-Young

김 남 일**

Kim, Nam-II

안 상 섭***

Ahn, Sang-Sup

요지

두 개의 케이블요소를 이용한 3차원 케이블망의 정적 비선형 유한요소해석 기법을 제시한다. 먼저, 공간 트러스요소와 탄성현수선 케이블요소(elastic catenary cable element)의 접선강도행렬과 질량행렬을 유도하는 과정을 간략히 요약한다. 지점변위를 일으키고 자중을 받는 케이블망의 초기평형 상태를 결정하기 위하여, Newton-Raphson 반복법에 근거한 하중증분법과 현수케이블요소를 적용하는 경우에 viscous damping을 고려한 dynamic relaxation법을 제시한다. 또한 초기의 정적평형상태를 기준으로 추가하중에 대한 케이블망의 정적 비선형해석을 수행한다. 지점변위와 외력을 받는 케이블 구조에 대하여 비선형해석을 수행하고, 해석결과들을 기준의 문헌의 결과와 비교, 검토하므로써 본 논문에서 제시한 이론 및 해석방법의 타당성을 입증한다.

Abstract

A geometrically non-linear finite element formulation of spatial cable networks is presented using two cable elements. Firstly, derivation procedures of tangent stiffness and mass matrices for the space truss element and the elastic catenary cable element are summarized. The load incremental method based on Newton-Raphson iteration method and the dynamic relaxation method are presented in order to determine the initial static state of cable nets subjected to self-weights and support motions. Furthermore, static non-linear analysis of cable structures under additional live loads are performed based on the initial configuration. Challenging example problems are presented and discussed in order to demonstrate the feasibility of the present finite element method and investigate static non-linear behaviors of cable nets.

Keywords : cable network, geometric non-linearity, finite element method, space truss element, elastic catenary cable element, load incremental method, dynamic relaxation method

1. 서 론

최근들어 케이블 부재의 사용은 구조부재로서

중요한 부분을 차지하며 구조시스템에 폭넓게 그리고 복잡하게 적용되고 있다. 균일한 인장응력이 발생하고 케이블 길이에 따른 인장력의 변화

* 정회원·성균관대학교 토목공학과, 부교수

** 성균관대학교 토목공학과, 석사과정

*** 한국도로공사 도로연구소, 책임연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

가 작기 때문에 이러한 케이블 부재는 긴 경간을 갖는 사장교, 현수교, 케이블 지붕(cable roof), guyed tower 및 해저케이블 구조물 등에 많이 사용되고 있다.

전통적인 구조해석은 주로 미소 변위를 일으키는 구조물에 관심을 가져왔고, 이러한 구조물은 선형의 하중-변위관계를 나타내게 된다. 그러나 케이블 부재는 전체적인 형상에 영향을 미치는 대변형을 일으키는데 이러한 대변형은 하중-변위관계에서 기하학적 비선형성을 수반하게 된다. 따라서 전체적인 거동을 지배하는 비선형 편미분 방정식을 갖는 케이블 구조물의 정적 및 동적거동을 파악하는 것은 쉽지 않다. 지금까지의 케이블 구조의 대부분의 해석 방법은 구조물에 대한 평형방정식을 세우고 수치적 방법에 의하여 비선형 대수방정식을 풀어나가는 절차를 밟고 있다. Irvine¹⁾은 Lagrangian 좌표를 사용하여 케이블 부재에 대하여 정적 및 동적해석을 수행하였고, Leonard와 Recker²⁾는 2절점 유한요소를 사용하여 케이블의 정적 및 동적거동을 규명하였으며, Argyris와 Sharpf³⁾는 케이블망의 기하학적 비선형 해석을 수행하여 편핸올립픽 주경기장 설계에 적용하였다. Henghold와 Russell⁴⁾은 다절점 곡선요소를 이용하여 케이블 부재를 해석하였으며 Gambhir와 Batchelor⁵⁾는 케이블 부재를 해석하기 위하여 3차의 보간다항식을 사용하는 2절점 곡선 유한요소를 제시하였다. 또한 Ozdemir⁶⁾는 Lagrangian 함수를 사용하는 곡선요소를 도입하여 케이블 부재를 해석하였다. Jayaraman과 Knudson⁷⁾은 탄성현수선 케이블요소를 이용한 케이블구조의 정적 및 동적 비선형해석법을 개발하였으며, 안⁸⁾은 탄성현수선 케이블요소를 공간 좌표에서 직접적으로 정식화하고 분포질량행렬(consistent mass matrix)을 사용하므로써 더욱 발전시켰다. Lewis⁹⁾는 케이블망과 같은 매우 유연한 구조물의 자중에 의한 초기형상을 결정하기 위하여 dynamic relaxation법을 제시하였다. 이러한 연구에도 불구하고 자중에 의한 케이블망의 초기형상 결정문제는 아직 분명한 해결을 보지 못하고 있다.

본 연구에서는 이러한 케이블망의 기하학적 비선형 문제를 풀기 위하여 유한요소 해석기법을 제시한다. 먼저, 공간 트러스요소와 탄성현수선 케이블요소에 대한 접선강도 및 질량행렬의 유도 과정을 간단히 요약한다. 트러스요소와 탄성현수선 케이블요소를 이용한 해석시 각각 분포질량행렬(consistent mass matrix)과 집중질량행렬(lumped mass matrix)을 사용한다. 자중이 재하되고 지점 변위를 일으키는 케이블구조의 초기평형상태를 결정하기 위하여, 하중증분법과 dynamic relaxation법을 이용한 비선형 유한요소법을 제시한다. 트러스요소와 탄성현수선 케이블요소를 이용하여 지점 변위를 일으키는 케이블 구조의 정적 비선형해석을 수행하고, 해석결과들을 기존의 문헌의 결과와 비교, 검토하므로써 본 논문에서 제시된 이론 및 방법의 타당성을 입증한다.

2. 공간 트러스요소의 접선강도행렬 및 질량행렬

일반적으로 케이블망은 공간 트러스요소를 사용하여 모델링할 수 있다. 이 장에서는 공간 트러스요소의 접선강도행렬 및 질량행렬을 유도한다.

그림 1은 트러스요소의 부재변위벡터(U^p , V^p , W^p , U^q , V^q , W^q)를 나타낸다. 아래와 같이 축력 P_a 를 받는 트러스요소의 운동에너지 및 포텐셜에너지를 생각한다.

$$T = \frac{1}{2} \int_o^l m(\dot{U}_x^2 + \dot{V}_x^2 + \dot{W}_x^2) dx \quad (1a)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_o^l [EAU'^2_x + P_a(U'^2_y + U'^2_z)] dx \quad (1b)$$

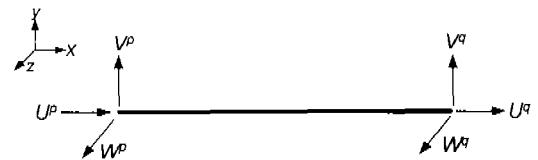


그림 1 부재좌표계에서 트러스요소의 부재변위벡터

여기서, U_x, U_y, U_z 는 요소내의 임의점에서 부재좌표계 방향으로 변위벡터성분을 나타낸다. m, EA 는 각각 단위길이당 질량 및 축강성을 의미한다. 이제 공간 트러스요소의 강도행렬과 질량행렬을 산정하기 위하여, 식(2)와 같이 1차 Lagrangian 다항식을 형상함수로 사용하여 요소내의 임의점의 변위를 나타낸다.

$$U_x = (1-\gamma) U^p + \gamma U^q, \quad (2a)$$

$$U_y = (1-\gamma) V^p + \gamma V^q, \quad (2b)$$

$$U_z = (1-\gamma) W^p + \gamma W^q \quad \gamma = x/L \quad (2c)$$

윗 식을 에너지 식(1)에 대입하고, 적분을 행하여 정리하면 다음과 같은 탄성 및 기하학적인 강도행렬과 질량행렬을 구할 수 있다.

$$k_c = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Symm. & & & & \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$k_g = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Symm. & & & 1 & \cdot \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$m_c = \frac{mL}{6.0} \begin{bmatrix} 2.0 & \cdot & 1.0 & \cdot & \cdot \\ 2.0 & \cdot & \cdot & 1.0 & \cdot \\ 2.0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1.0 \\ 2.0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Symm. & & 2.0 & \cdot & 2.0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이상의 행렬은 각각의 개별요소에만 적용되는

국부좌표계로 정의되어 있으므로, 구조를 강도행렬을 구하기 위해서는 전체구조에 공동으로 적용되는 전체좌표계로 변환하여야 한다.

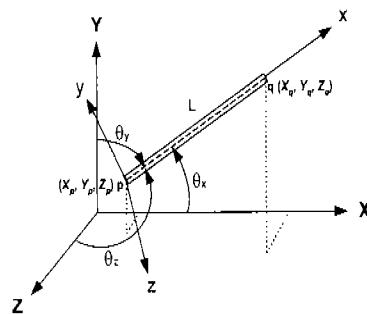


그림 2 공간 트러스요소

국부좌표계를 전체좌표계로 변환하기 위해서 필요한 좌표변환행렬을 구하기 위하여, 전체좌표계에서 공간 트러스요소를 나타내는 그림 2를 생각한다. 그림에서 전체좌표계 X, Y, Z 에 대한 요소양단의 좌표는 $(X_p, Y_p, Z_p), (X_q, Y_q, Z_q)$ 로 표시한다. 국부좌표계 x, y, z 의 좌표축과 평행한 단위벡터를 i, j, k 로 정의하고, 전체좌표계의 좌표축방향의 단위벡터를 I, J, K 로 표시한다. 또한, 두 좌표계에서 임의의 변위벡터성분은 각각 $(d_x, d_y, d_z), (D_x, D_y, D_z)$ 로 표시하면, 다음과 같이 두 변위성분사이의 변환관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} d_x &= c_1 D_x + c_2 D_y + c_3 D_z \\ d_y &= d_1 D_x + d_2 D_y + d_3 D_z \\ d_z &= e_1 D_x + e_2 D_y + e_3 D_z \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $(c_1, c_2, c_3), (d_1, d_2, d_3)$ 와 (e_1, e_2, e_3) 는 각각 I, J, K 벡터와 i, j, k 벡터 사이의 방향여현이다.

이제 두 좌표계에서 각각 정의되는 절점변위벡터의 변환관계식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$d = T \cdot D \quad (7)$$

또는

$$\begin{pmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ D_{1z} \\ D_{2x} \\ D_{2y} \\ D_{2z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

여기서, T 는 변환행렬이다.

결과적으로 전체좌표계에 대한 탄성 및 기하학적 강도행렬 그리고 질량행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$K_e = T^T k_e T \quad (9a)$$

$$K_s = T^T k_s T \quad (9b)$$

$$M_e = T^T m_e T = m_e \quad (9c)$$

위식에서 변환행렬 T 는 직교행렬(orthogonal matrix)의 성질을 나타내기 때문에, 이를 이용하면 식(9c)의 질량행렬은 두 좌표계에서 동일한 결과를 나타낼 수 있다. 따라서 질량행렬은 국부좌표계에서 처음에 한 번만 산정하면 이후의 비선형해석에서 그대로 사용할 수 있다.

$$K_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_1^2 & C_1C_2 & C_1C_3 & -C_1^2 & -C_1C_2 & -C_1C_3 \\ C_2^2 & C_2C_3 & -C_1C_2 & -C_2^2 & -C_2C_3 & \\ C_3^2 & -C_1C_3 & -C_2C_3 & -C_3^2 & & \\ & C_1^2 & C_1C_2 & C_1C_3 & & \\ & C_2^2 & C_2C_3 & & & \\ & C_3^2 & & & & \end{bmatrix} \quad Symm. \quad (10)$$

$$K_s = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1-C_1^2 & -C_1C_2 & -C_1C_3 & -1+C_1^2 & C_1C_2 & C_1C_3 \\ 1-C_2^2 & -C_2C_3 & C_1C_2 & -1+C_2^2 & C_2C_3 & \\ 1-C_3^2 & C_1C_3 & C_2C_3 & -1+C_3^2 & & \\ & 1-C_1^2 & -C_1C_2 & -C_1C_3 & & \\ & 1-C_2^2 & -C_2C_3 & & & \\ & 1-C_3^2 & & & & \end{bmatrix} \quad Symm. \quad (11)$$

식(10), (11)에서 보는 바와 같이 전체좌표계에서 탄성 및 기하학적 강도행렬을 산정할 때 변

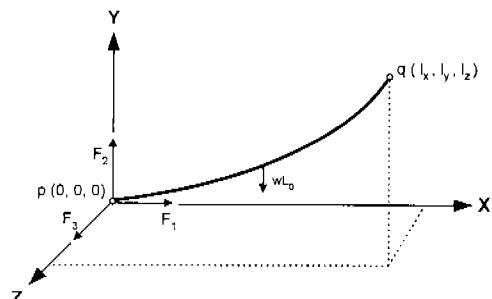
환행렬의 성질 때문에 부재축 방향인 x축의 전체좌표계에 대한 방향여현만이 필요하고 국부좌표계의 y, z축의 방향여현에는 무관하다는 것을 알 수 있다.

3. 탄성 현수선 케이블요소의 접선강도행렬 및 질량행렬

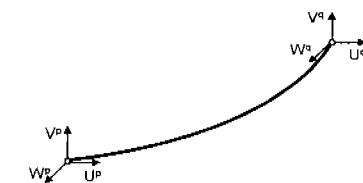
그림 3은 케이블 자중 w 의 작용하에서 장력에 의한 케이블요소의 평형상태를 나타낸 것이다. 이때 케이블요소의 적합방정식은 다음과 같이 구할 수 있으며 이들의 자세한 유도과정은 안⁸⁾의 연구를 참조할 수 있다.

$$l_x = f(F_1, F_2, F_3) = -\frac{F_1 L_2}{EA_o} + \frac{F_1}{w}$$

$$\left[\sinh^{-1}\left(\frac{F_3 - wL_o}{H}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{F_3}{H}\right) \right]$$



(a) 자중과 장력을 받는 탄성현수선요소



(b) 탄성현수선 케이블요소의 부재변위벡터

그림 3 탄성현수선 케이블요소

$$l_y = g(F_1, F_2, F_3) = -\frac{F_3 L_o}{EA_o} + \frac{F_2}{w} \quad dl = F \, dF \quad (15)$$

$$\left[\sinh^{-1}\left(\frac{F_3 - wL_o}{H}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{F_3}{H}\right) \right]$$

$$l_z = h(F_1, F_2, F_3) = -\frac{F_3 L_o}{EA_o} + \frac{wL_o^2}{2EA_o}$$

$$+ \frac{1}{w}(T_q - T_p) \quad (12)$$

여기서

$$H = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$T_p = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$$

$$T_q = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (F_3 - wL_o)^2} \text{ 이다.} \quad (13)$$

식 (12)에서 l_x, l_y, l_z 은 각각 케이블부재의 x, y, z 축에 투영된 길이를 나타내며, 반복계산시 부재양단의 상대변위값에 따라 크기의 변화를 보인다. EA_o, H, L_o 는 각각 케이블의 축강성, 수평장력성분, 그리고 초기의 무응력상태에서의 길이를 나타내며, F_1, F_2, F_3 는 p 단의 장력 T_p 의 벡터성분을 의미한다.

식 (12)에서 l_x, l_y, l_z, L_o 가 주어지는 경우에 케이블 부재력 F_1, F_2, F_3 를 미지수로 하는 비선형연립방정식으로서 Newton-Raphson 방법을 사용하여 해를 구해야만 한다. 요소 양단 p, q 의 상대변위의 변화량과 절점력 변화량의 관계는 식 (12)의 양변을 미분하여 얻을 수 있다.

$$dl_x = \frac{\partial f}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial f}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial f}{\partial F_3} dF_3$$

$$dl_y = \frac{\partial g}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial g}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial g}{\partial F_3} dF_3$$

$$dl_z = \frac{\partial h}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial h}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial h}{\partial F_3} dF_3 \quad (14)$$

식 (14)를 행렬형태로 다시 쓰면

이고, 여기서 F 는 3×3 유연도행렬 (flexibility matrix)이 된다. 식 (14)는 증분 장력성분과 증분 상대변위성분사이의 관계식을 나타내며, 이식은 케이블부재의 강체운동에 대응하는 평형조건을 포함하지 않으므로 식 (15)에서 F 의 역행렬은 존재한다. 이 행렬을 구하면 3개의 자유도에서 정의되는 케이블부재의 접선강도행렬 K 를 구할 수 있다. K 는 3개의 케이블 상대변위에 대하여 정의된 것이므로, 케이블 양단에서 각각 3개의 자유도를 가지는 케이블요소의 6×6 접선강도행렬은 식 (16)과 같이 표현된다.

$$K_T = a^T K a \quad (16)$$

여기서 a 는 케이블 상대변위와 6개의 부재변위성분 사이의 변환행렬을 나타내며, 구체적인 결과는 다음과 같다.

$$a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

다음으로 탄성현수선 케이블 요소의 질량행렬은 집중질량행렬 (lumped mass matrix)을 사용한다.

$$M_e = \frac{mL_o}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

4. 케이블망의 초기정적 평형상태결정

케이블구조는 일반적으로 강성이 작기 때문에 외력이 작용하면 케이블장력에 의하여 평형상태에 도달하도록 형상변화를 일으킨다. 따라서 이러한 구조는 자중에 의한 평형상태 및 수평장력을 결정하기가 매우 어렵다. 본 장에서는 케이블망을 공간 트러스요소와 탄성 현수선 케이블요소를 이용하여 모델링하는 경우에, 하중증분법과

dynamic relaxation method를 사용하여 지점변위를 일으키고 자중을 받는 케이블의 초기평형상태를 결정하는 방법을 제시한다.

4. 1 하중증분법

비선형 유한요소해석을 수행하는 경우에 하중증분법은 총하중을 유한한 갯수의 하중단계로 분할하고 각 하중단계에서 비선형 연립방정식의 해법으로 Newton-Raphson 반복법을 적용하여 평형상태를 찾는다. 외력을 비례하중(proportional loading)으로 가정하고, 시간 t 와 $t + \Delta t$ 사이의 하중파라미터증분이 $\Delta\lambda (= \lambda^{t+\Delta t} - \lambda^t)$ 로 주어졌을 때 이에 대응하는 변위증분벡터 $\Delta U (= U^{t+\Delta t} - U^t)$ 를 산정하기 위한 증분평형방정식은 다음과 같다.

$$'K_T^{(i)} \cdot \Delta U^{(i)} = U^{t+\Delta t} P - U^t F^{(i-1)} \quad (19a)$$

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta U^{(i)} \quad i=1, 2, 3 \dots \quad (19b)$$

초기조건 :

$$U^{t+\Delta t} = U^t \quad F^{(0)} = F \quad (19c)$$

여기서 $'K_T^{(i)}$ 는 i 번째 반복계산시 구조물의 접선강도행렬을 나타내고, λ 는 하중파라미터 그리고 P 는 작용하중의 상대적인 비를 나타내는 하중벡터를 의미한다. F 는 절점력벡터이다.

본 연구에서는 케이블망의 초기평형상태를 결정하기 위하여, 케이블 각 부재를 초기길이 L_0 로 펼쳐놓은 상태에서 총자중과 최종 지점까지의 총이동량을 n 으로 분할하고 이를 순차적으로 재하시켜서 Newton-Raphson 반복법으로 평형상태를 찾아가는 방법을 사용한다. 이때 지점이동은 penalty method¹⁰⁾를 적용한다. 즉, 지점이동 자유도 방향으로 가상의 강성이 매우 큰 스프링을 도입하고 반복계산에 의하여 자중과 지점이동에 대응하는 평형상태를 찾는다. 위의 방법에 근거한 하중증분법을 사용하여 케이블의 초기평형상태를 찾는 알고리즘은 다음과 같다.

단계 1) 절점좌표, 케이블 축강성, 그리고 자중과 지점이동량 등을 입력하고, 공간 트러스모델을 적용하는 경우에는 자중을 등가절점하중으로 환산시킨다.

단계 2) 첫번째 반복계산에서는 증분하중 $\Delta\lambda \cdot P$ 를 외력으로 작용시키며, 지점증분변위가 있는 경우에는 지점이동량에 스프링상수를 곱한 값을 외력성분에 포함시킨다.

단계 3) 두번째 반복계산이후는 불평형하중을 외력으로 작용시킨다.

단계 4) 구조물 접선강도행렬을 구성하고 증분방정식 (19)로부터 증분변위벡터 $\Delta U^{(i)}$ 를 구한다. 지점변위가 있는 경우에 스프링상수 값을 강도행렬의 지점이동에 대응하는 대각선 성분에 포함시킨다.

단계 5) 총변위벡터 $U^{t+\Delta t}$ 로부터 절점력벡터 $F^{(i-1)}$ 를 산정한다. 이때 트러스요소의 축력은식 (20)로 구한다.

$$P_a = \frac{EA}{L} (L - L_0) \quad (20)$$

여기서 L 는 변형된 길이를 나타내며, 트러스요소 양단의 위치로부터 산정한다. 한편, 탄성현수선 케이블요소의 장력은 아래의 반복법으로 산정한다.

(i) 첫 번째 하중단계의 첫 번째 반복계산인 경우에는 자중, 절점의 초기위치, 초기길이를 사용하여 l_{x0} , l_{y0} , l_{z0} 을 결정하고, 식 (21)로 산정한 케이블 장력성분 F_1^o , F_2^o , F_3^o 를 초기값으로 사용한다. 첫 번째 하중단계의 첫 번째 반복계산이 아닌 경우에는 이전 단계에서 수렴한 F_1^o , F_2^o , F_3^o 을 값을 사용한다.

$$F_1^o = -\frac{wl_{x0}}{2\lambda^o}, \quad F_2^o = -\frac{wl_{y0}}{2\lambda^o}$$

$$F_3^o = \frac{w}{2} \left(-l_{z0} \frac{\cosh \lambda^o}{\sinh \lambda^o} + L_0 \right) \quad (21)$$

여기서

$$\lambda^o = \sqrt{3 \left(\frac{L_{zo}^2 - l_{zo}^2}{l_{zo}^2 + l_{so}^2} \right) - 1}$$

(ii) 전체구조물의 증분변위로부터 케이블요소의 절점증분변위를 구한다.

(iii) (2)에서 각 케이블부재의 p 단, q 단의 상대적인 위치를 다음식으로 결정한다.

$$\begin{aligned} l_x^{i+1} &= l_x^i + \Delta U^q - \Delta U^p \\ l_y^{i+1} &= l_y^i + \Delta V^q - \Delta V^p \\ l_z^{i+1} &= l_z^i + \Delta W^q - \Delta W^p \end{aligned} \quad (22)$$

(iv) 개개의 케이블 부재내에서 다음의 조건식 (23)을 만족하는 장력성분 F_1, F_2, F_3 을 반복계산에 의하여 산정한다. 이때 (i)의 초기값을 사용하여 수렴할 때까지 Newton의 반복법을 적용한다.

$$\begin{aligned} l_x^{i+1} &= f(F_1, F_2, F_3) \\ l_y^{i+1} &= g(F_1, F_2, F_3) \\ l_z^{i+1} &= h(F_1, F_2, F_3) \end{aligned} \quad (23)$$

단계 6) 충외력벡터 ${}^{i+1}\lambda P$ 와 절점력벡터의 차이로서 불평형하중을 구한다. 지점변위가 있는 경우에는 충지점이동량에 스프링상수를 곱한 값을 충외력성분에 포함시킨다.

단계 7) 수렴조건을 만족시킬때까지 다시 단계 2)으로 가서 반복계산한다.

4. 2 Dynamic Relaxation Method

트리스요소를 이용하고 4.1 절의 하중증분법을 적용하여 케이블 구조를 해석하면 대부분의 경우에 정적평형상태에 수렴한다. 이에 반하여 탄성현수선 케이블요소를 사용하는 경우는 케이블 구조전체에 대한 평형형상(equilibrium configuration)을 찾기위한 반복계산과정과 케이블부재 자체의 평형형상을 찾기위한 반복계산이 맞물려있어서 외력과 지점이동량에 따라 수렴하지 못하는

경우가 종종 발생한다. 이러한 문제점을 해소하기 위하여 본 절에서는 총외력과 지점의 이동량을 일시에 재하시키고 탄성현수선 케이블요소를 사용하는 동적 비선형해석법을 이용하여 케이블망의 정적 평형상태를 찾는 dynamic relaxation method를 제시한다. 일반적으로 감쇠력을 고려한 비선형 운동방정식에 Newmark 방법 등의 비선형 동적해석법을 적용하면 케이블구조가 정적 평형상태에 수렴하는데 불필요하게 많은 해석시간이 소요되기 마련이다. 따라서 본 방법에서는 Newmark 방법을 적용하되 관성력은 무시하고 감쇠계수값이 매우 큰 가상의 viscous damping을 도입하여 증분시간간격 (Δt)을 상대적으로 크게함으로써 비교적 적은 계산시간 안에 정적 평형에 도달하도록 하였다.

이를 위하여 감쇄행렬 C 를 viscous damping으로 가정하면 케이블망의 일반적인 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} M{}^{i+1}\ddot{U} + C{}^{i+1}\dot{U} + {}^iK_T \cdot \Delta U \\ = {}^{i+1}\lambda P - {}^{i+1}\Delta F \end{aligned} \quad (24)$$

$$C = \beta M \quad (25)$$

여기서 M 은 구조물의 질량행렬, β 는 감쇠계수이다. 식 (24)에 변위와 속도벡터에 대한 Newmark의 가정을 도입하면 다음의 증분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} ({}^iK_T + a_0M + a_1C)\Delta U &= {}^{i+1}\lambda P - {}^iF \\ + M(a_2\dot{U} + a_3\ddot{U}) + C(a_4\dot{U} + a_5\ddot{U}) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1, & a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1, & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \\ \delta &\geq 0.50, \quad \alpha \geq 0.25 (0.5 + \delta)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

본 연구에서 제안하는 dynamic relaxation method를 적용하기 위하여 식(26)에서 관성력을 무시하면 다음과 같다.

$$(K_r + a_1 C) \Delta U = {}^t \lambda P - {}^t F + C(a_4 \dot{U} + a_5 \ddot{U}) \quad (28)$$

식(28)을 이용하여 동적 평형상태를 찾는 Newmark 알고리즘은 문헌¹¹⁾을 참조할 수 있다. 결과적으로 본 연구의 dynamic relaxation method는 시간간격 Δt 과 감쇠계수 β 를 적절히 선택하여 적은 횟수의 시간단계(time step) 안에 자중과 지점변위를 받는 케이블구조가 정적평형상태에도달하도록 한다. 각 시간단계에서는 지점이동의 영향을 고려한 하중증분법의 반복계산과정과 감쇠행렬의 영향으로 인한 유효하중벡터, 유효강도행렬, 속도 및 가속도벡터의 계산을 포함한다.

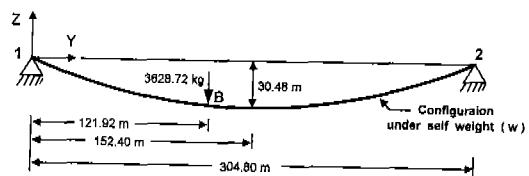
5. 수치해석 예

케이블을 트러스요소와 탄성현수선 케이블요소로 모델링하고 하중증분법 및 dynamic relaxation법을 적용하여, 자중과 지점변위를 받는 케이블망의 정적 평형상태를 찾는 해석과 초기평형을 기준으로 추가 하중에 대하여 정적 비선형해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 본 장에서는 본 연구에서 제시된 이론 및 방법의 타당성을 검증하기 위하여 비선형 해석결과와 서로 다른 요소를 사용하여 얻어진 기존의 문헌의 결과와 비교, 검토를 행한다. 실제 해석에서 케이블망을 트러스로 모델링하는 경우는 자중 및 지점변위를 100 단계로 분할하여 재하하는 하중증분법을, 현수선 케이블요소로 모델링하는 경우는 자중 및 지점변위를 일시에 재하하고 동적해석을 행하는 dynamic relaxation법을 적용하였다. Dynamic relaxation법을 사용하는 경우에 시간간격 Δt 와 감쇠계수 β 값을 변화시키면서 해석을 수행한 결과, Δt 와 β 값을 각각 100초와 10000.0을 사용하면 효율적인 해석이 이루어지는 것으로

판단되었으며, 수렴이 이루어지지 않아 다른 값이 사용되는 경우는 표에 나타내었다. 케이블망 해석을 위한 초기 형상은 각 부재를 무응력상태로 펼쳐서 직선으로 수평면상에서 연결하는 구조로 가정한다.

5.1 평면 케이블

그림 4와 같이 자중 $w (= 4.7026 \text{ kg/m})$ 과 B점에 집중하중 3628.72 kg 를 받는 평면케이블을 생각한다. 무응력상태에서 지점1에서 B점까지 길이는 $L_{1B} = 125.8470 \text{ m}$, B점에서 지점2까지 길이는 $L_{2B} = 186.8553 \text{ m}$ 이고 결과적으로 케이블의 총길이는 312.7022 m 가 된다. 이 예제에서는 자중과 지점2의 이동량 $y = -7.9022 \text{ m}$ 에 대응하는 하중조합1과 이에 집중하중을 추가로 받는 하중조합2의 두 가지 하중조건을 고려한다. 표 1은 케이블부재를 2개, 3개, 5개, 10개, 20개의 트러스요소로 모델링한 경우와 2개의 탄성현수선요소로 모



$$A = 5.48128 \text{ cm}^2$$

$$E = 1.3358 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2$$

그림 4 자중 및 집중하중을 받는 평면케이블

표 1 트러스요소 및 탄성현수선요소의 하중 재하지 점의 수직 처짐(m)

요소수	2	3	5	10	20
하중조합 1	트러스요소	34.3698	32.2939	29.8700	29.4205
	탄성현 수선요소	29.2759	-	-	-
하중조합 2	트러스요소	35.0816	35.0136	34.9276	34.9081
	탄성현 수선요소	34.9020*	-	-	-

* : time increment = 10000.,
damping coefficient = 10000.

델링한 경우에 집중하중 재하점의 수직처짐값을 제시한 것이다. 표 2는 집중하중에 의한 추가적인 수직처짐량을 비교하기 위하여, 본 연구에 의한 해석결과와 2개의 곡선 케이블요소를 사용한 O'Brien과 Francis¹²⁾의 결과, 10개의 직선요소를 이용한 Michalos와 Birnstiel¹³⁾의 결과를 함께 나타낸 것이다. 또한 그림 5는 두 케이블요소의 수렴성을 비교하기 위하여 하중조합 2에 대하여 요소의 수가 증가함에 따른 수직처짐의 변화를 나타낸 것이다.

표와 그림에서 보듯이 본 연구결과는 문헌의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 10개의 트러스요소로 모델링한 결과와 2개의 탄성현수선요소로 모델링한 결과가 약 0.5%의 오차를 나타내었는데 이는 탄성현수선요소의 경우 케이블길이에 따라 균일분포한 자중을 정확히 고려할 수 있지만 트러스요소로 모델링 할 경우 케이블요소의 자중

표 2 집중하중에 의한 하중 재하지점의 추가적인 수직처짐(m)

본연구		Jayaraman 과 Knudson	O'Brien과 Francis	Michalos과 Birnstiel
트러스요소 5개 사용	트러스요소 10개 사용	트러스요소 20개 사용	탄성현수선요소 2개 사용	
5.058	5.488	5.592	5.626	5.626
			5.627	5.472

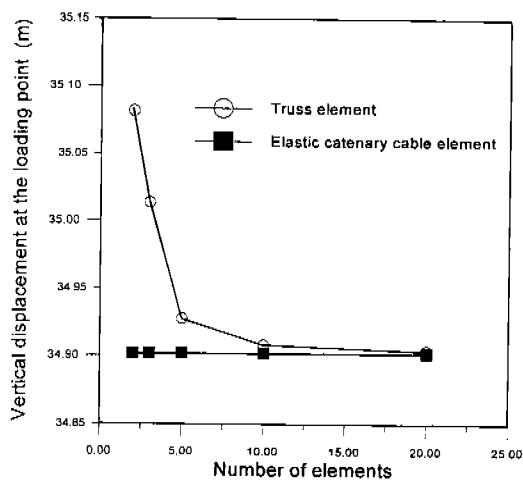
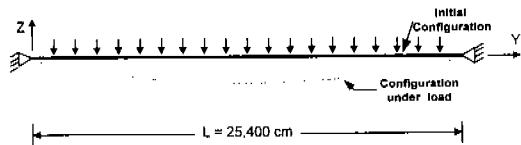


그림 5 케이블 부재의 수렴도

을 등가집중하중으로 환산하여 계산하는 데서 발생한 것으로 판단된다. 또한, 탄성현수선요소는 2개의 요소만으로 정확한 염밀해에 수렴하지만, 트러스요소는 보다 많은 수로 모델링하여야 정확한 해에 수렴하는 것을 관찰할 수 있다.

5.2 수평방향으로 초기 인장응력을 받는 평면 케이블

본 적용예에서는 수평방향으로 초기 인장응력 1,406.1318kg/cm²을 받는 평면 케이블 부재에 대하여 표 3에서와 같이 자중값이 주어질 경우 케이블 중앙지점의 정적 수직처짐을 구한다. 케이블 부재는 20개의 트러스요소와 2개의 탄성현수선요소로 모델링하여 해석한다. 해석결과를 24개의 3절점 곡선요소를 사용한 Ozdemir⁶⁾, flexibility iteration 방법을 적용하고 2개의 elastic catenary 케이블요소를 사용한 Jayaraman과 Knudson⁷⁾, 40개의 트러스요소를 사용한 Knudson¹⁴⁾, 2개의 3절점 곡선요소를 사용한 Desai와 Popplewell과 Shah와 Buragohain¹⁵⁾의 결과와 비교한다. 표에서도 볼 수 있듯이 2개의 탄성현수선요소만으로도 만족할 만한 결과에 수렴하는 것을 볼 수



$$A = 0.41935 \text{ cm}^2$$

$$E = 1.406 \cdot 10^{10} \text{ kg/cm}^2$$

그림 6 분포하중하의 초기 인장력을 받는 케이블

표 3 분포하중(자중)을 받는 케이블 부재의 중앙점의 수직처짐(cm)

자중 (kg/cm)	트러스 요소	탄성현 수선요소	Ozdemir	Jayaraman	Knudson	Desai
0.00357	334.14	333.98	334.26	334.34	333.88	334.11
0.01071	595.27	594.87	586.74	594.84	594.89	594.44
0.01786	744.22	743.69	731.52	743.69	743.76	743.18
0.02500	854.18	853.54	840.74	853.52	853.62	852.75
0.03214	943.41	942.70	934.72	942.67	942.80	941.93

있다. 또한 그림 7은 탄성현수선요소에 대하여 분포하중의 증가에 따른 케이블의 중앙처짐의 변화를 나타내는데 하중의 증가에 대하여 케이블이 경화(hardening)하는 양상을 나타낸다.

5. 3 5절점을 갖는 케이블망

그림 8과 같이 자중 $w = 0.000464 \text{ kg/cm}$ 와 절점 3에 $-Z$ 방향으로 집중하중 $3,628.72 \text{ kg}$ 를 받는 5절점케이블을 생각한다. 네 개의 케이블부재 길이는 무응력상태에서 $L_0 = 114.3 \text{ cm}$ 이다. 이 예제에서는 다음의 네가지 하중조합을 생각한다.

하중조합1 : 자중만이 작용하는 경우

하중조합2 : 자중과 절점 3에 집중하중이 작용하는 경우

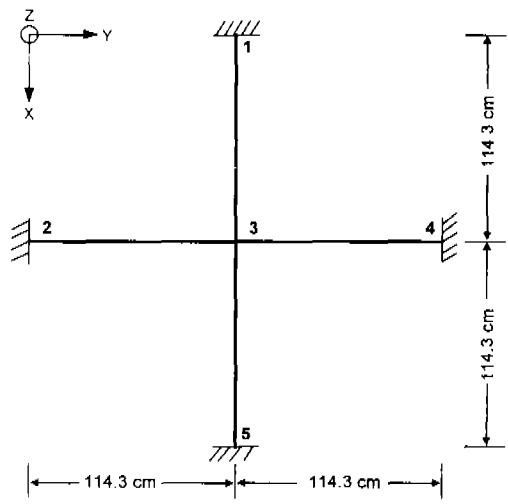
하중조합3 : 하중조합2에 지점이동

$(d_{1x} = -7.62 \text{ cm}, d_{5x} = 7.62 \text{ cm}, d_{2y} = -7.62 \text{ cm}, d_{4y} = 7.62 \text{ cm})$ 이 추가된 경우

하중조합4 : 하중조합2에 지점이동

$(d_{5x} = -7.62 \text{ cm}, d_{4y} = -7.62 \text{ cm})$ 이 추가되는 경우

표 4는 4개의 케이블부재를 1개, 2개, 3개, 6개의 트러스요소로 모델링한 경우와 1개의 탄성현수선요소로 모델링한 경우에 절점 3의 수직처짐



$$A = 0.080645 \text{ cm}^2$$

$$E = 703,065.9 \text{ kg/cm}^2$$

그림 8 5절점 직각 케이블망

값을 제시한 것이다. 일반적으로 케이블구조는 순수한 탄성변형성분인 케이블의 신장과 기하학적 비선형효과인 케이블의 형상변화의 결합된 작용으로 외력에 저항한다. 하중조합1과 같이 자중만에 의한 케이블부재의 초기 평형상태를 찾는 경우에 표 4에서 보는 바와 같이 탄성현수선요소는 부재당 1개의 요소만으로 정확한 염밀해에 수렴하지만, 트러스모델은 여러개의 요소로 모델링하는 것이 필요함을 알 수 있다. 자중에 의하여 변형을 일으킬 때 케이블의 순수한 탄성변형보다는 형상변화에 의하여 곡선형태의 평형상태를 찾기 때문에 여러개의 트러스 직선요소를 사용하여야 한다. 이에 반하여 하중조합 2-4의 경우, 즉 자중이외에 상당한 크기의 외력이 작용할 경우에는 케이블의 순수한 탄성변형에 의하여 주로 저항하기 때문에 케이블 처짐형상이 거의 직선형태를 취한다. 따라서 이 경우는 최소한의 트러스요소를 사용하여도 충분히 만족할 만한 값에 수렴하는 것을 알 수 있다.

5. 4 21 절점을 갖는 케이블망

그림 9와 같이 자중 $w = 0.27685 \text{ kg/cm}$ 와 절점 7에 $-Z$ 방향으로 집중하중 $90,718 \text{ kg}$ 을 받는

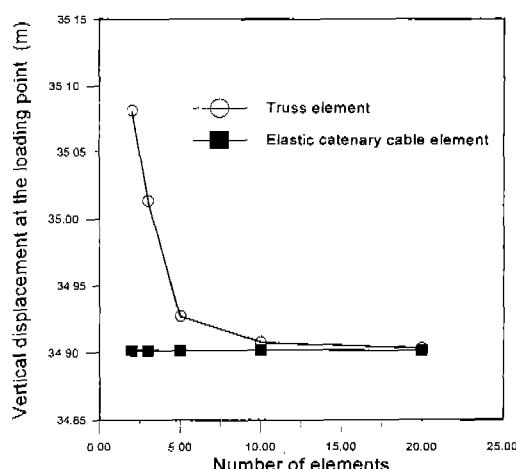


그림 7 분포하중증가에 따른 중앙처짐의 변화

표 4 트러스요소 및 탄성현수선요소의 하중 재하지 점의 수직 처짐(cm)

요소수	1	2	3	6
하중조합	트러스요소	1.11811	1.03795	1.02545
1	탄성현수선요소	1.01587	-	-
하중조합	트러스요소	37.2181	37.2181	37.2181
2	탄성현수선요소	37.2181	-	-
하중조합	트러스요소	23.1590	23.1590	23.1590
3	탄성현수선요소	23.1591	-	-
하중조합	트러스요소	44.5592	44.5592	44.5592
4	탄성현수선요소	44.5592*	-	-

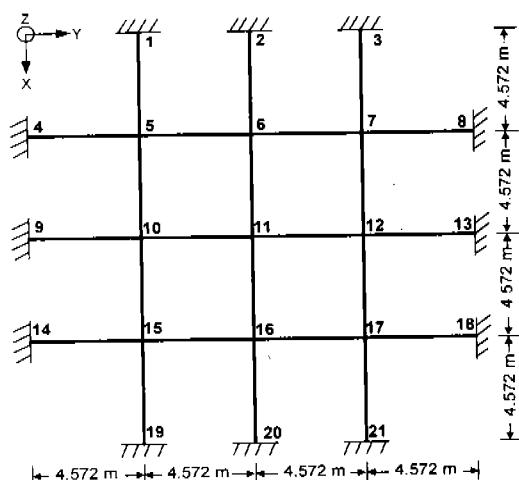
* : time increment=1., damping coefficient=1000000.

21절점케이블을 생각한다. 24개의 케이블부재 길이는 무응력상태에서 $L_c = 4.572\text{m}$ 이다. 이 예제에서는 다음의 두가지 하중조합을 생각한다.

하중조합1 : 자중만이 작용하는 경우

하중조합2 : 자중과 절점 7에 집중하중이 추가로 작용하는 경우

표 5는 위의 하중조합에 대하여 비선형해석을 수행하고 절점 7의 수직처짐값을 제시한 것이다. 이때 트러스모델은 케이블부재 1개당 1개, 2개, 3개, 6개의 요소로, 탄성현수선모델은 1개의 요소로 모델링한 경우의 해석결과와 안⁸⁾의 결과



$$A = 15.48384\text{cm}^2$$

$$E = 1,617,051.58\text{kg/cm}^2$$

그림 9 21절점 케이블망

(괄호안의 값)를 함께 나타내었다. 표에서도 볼 수 있듯이 자중만이 작용하는 경우 탄성현수선요소는 부재당 1개의 요소만으로 정확한 염밀해석에 수렴하지만, 트러스모델은 여러개의 요소로 모델링하는 것이 필요함을 알 수 있다. 반면에 자중에 추가하여 절점하중이 작용하는 경우에는 5.4 절의 경우처럼 적은 수의 트러스요소로 모델링하여도 충분한 정확도로 만족할만한 값에 수렴함을 알 수 있었다. 이는 케이블 자중의 영향이 추가절점하중에 비하여 상대적으로 작아지고 탄성변형으로 인하여 케이블망 각각의 부재의 처짐형상이 거의 직선형태를 취하기 때문으로 판단된다.

6. 결 론

본 논문에서는 트러스요소와 탄성현수선 케이블요소를 사용하여, 지점 변위를 일으키고 자중을 받는 케이블망의 초기평형 상태를 결정하고 추가하중에 대한 정적 비선형 유한요소해석을 수행하였다. 비선형해석시 Newton-Raphson 반복법에 근거한 하중증분법과 viscous damping을 고려한 dynamic relaxation법이 적용되었다. 케이블망의 기하학적 비선형해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 트러스요소를 이용한 하중증분법에 의한 기하학적 비선형해석 결과는 자중, 집중하중 및 지점이동을 고려한 케이블망의 초기평형 상태에 충분한 정확도로 수렴하였다.

2) 탄성현수선요소를 이용한 초기 정적 비선형해석에서 하중증분법은 수렴하지 못하는 경우가 종

표 5 트러스요소 및 탄성현수선요소의 절점 7의 수직 처짐(cm)

요소수	1	2	3	6
하중조합	트러스요소	13.1689	12.8742	12.8238
1	탄성현수선요소	12.7843	-	-
하중조합	트러스요소	88.1886	88.1873	88.1870
2	탄성현수선요소	88.1868*	(88.1863)	-

* : time increment=1.,
damping coefficient = 1000000.

종 발생하였다. 이에 반하여 dynamic relaxation법은 비교적 안정적인 수렴성을 나타내었다.

3) 케이블구조가 자중에 의하여 초기평형상태에 도달하는 경우에 탄성현수선 케이블요소를 이용한 모델은 지점과 교차점을 연결하는 최소한의 부재를 사용하여도 염밀해에 수렴한 반면에, 트러스요소는 많은 수의 요소로 모델링하여야 염밀해에 수렴하는 경향을 나타내었다. 이는 자중에서 케이블구조는 케이블부재의 순수탄성변형에 의한 장력변화보다는 곡선형태의 기하학적 처짐형상변화에 의하여 대부분의 외력을 지탱하기 때문으로 판단된다.

4) 자중에 추가하여 상대적으로 큰 절점하중이 작용하는 경우에는 적은 수의 트러스요소로 모델링하여도 충분한 정확도로 만족할만한 값에 수렴함을 알 수 있었다. 이는 곡선형태의 기하학적 형상변화 보다는 직선형태의 케이블부재변형을 일으키는 순수탄성변형에 의한 장력변화에 의하여 외력에 저항하기 때문으로 판단된다.

감사의 글

본 논문은 한국과학재단 산하 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 관계자 여러분에게 감사드립니다.

참 고 문 헌

- Irvine, H. M., Cable structures, MIT Press, 1981.
- Leonard, J. W. and Recker, W. W., "Nonlinear dynamics of cables with low initial tension", J. Engng Mech. Div., ASCE 98, pp. 293-309, 1972.
- Argyris, J. H. and Sharpf, D. W., "Large deformation analysis of prestressed networks", J. Struct Div., ASCE 48, pp. 633-654, 1972.
- Henghold, W. H. and Russell, J. J., "Equilibrium and natural frequencies of cable structures (a nonlinear finite element approach)", Comput. struct. 6, pp.

- 267-271, 1976.
- Gambhir, M. L. and Batchelor, B., "A finite element for 3-D prestressed cable nets", Int. J. Numer. Mech. Engng. 11, pp. 1699-1718, 1977.
- Ozdemir, H., "A finite element approach for cable problems", Int. J. Solids Struct. 15, pp. 427-437, 1979.
- Jayaraman, H. B. and Knudson, W. C., "A curved element for the analysis of cable structures", Comput. struct. 14, pp. 325-333, 1981.
- Ahn, S. S., Static and dynamic nonlinear analysis of spatial cable networks using elastic catenary cable element, M.S. Dissertation, Seoul National University, 1991.
- Lewis, W. J., "The efficiency of numerical methods for the analysis of prestressed nets and pin-jointed frame structures", Comput. struct. 33, pp. 791-800, 1989.
- Bathe, K. J., Finite element procedures, Prentice-Hall, 1996.
- Bathe, K. J., Ozdemir, H., Wilson, E. L., Static and dynamic geometric and material non-linear analysis, University of California, Berkeley, 1974.
- O'Brien, W. T. and Francis, A. J., "Cable movements under two dimensional loads", J. Struct. Div., ASCE 90 ST3, pp. 89-123, 1964.
- Michalos, J. and Birnstiel, C., "Movement of a cable due to changes in loading", J. Struct. Div., ASCE 86 ST12, pp. 23-38, 1960.
- Knudson, W. C., Static and dynamic analysis of cable net structures, Doctoral dissertation, University of California, Berkeley, CA, 1971.
- Desai, Y. M., Popplewell, N., Shah, A. H., and Buragohain, D. N., "Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures", Comput. struct. 29, pp. 1001-1009, 1988.

(접수일자 : 1997. 10. 12)