

# 최소민감도이론에 의한 조인트 부재의 공차설계

## Joint Tolerance Design by Minimum Sensitivity Theorem

임 오 강\*      류 재 봉\*\*      박 배 준\*\*\*      이 병 우\*\*\*\*  
Lim, O-Kaung      Ryoo, Jae-Bong      Park, Bae-Jun      Lee, Byung-Woo

### 요 지

길이가 긴 원통형 실린더를 구성하는 데에 사용될 조인트 부재에 대한 공차설계를 수행하였다. 즉, 원통형 실린더를 체결할 때 사용되는 조인트 부품 가운데 스테드 볼트를 최소 민감도해석에 의해 공차설계를 하였다. 조인트 부재의 공차설계를 위한 최소 민감도 해석에 의한 정식화는 목적함수가 폰 마이세스 응력의 공차에 대한 민감도이고, 여러 부등호 제약식 중에서 자중이 부등호 제한식에 포함된다. 조인트 부재의 경우 자중에 대한 타당한 부등호 제한식을 설정하기 위하여 우선 확정적인 경우에 대한 최적설계를 수행하여 그 범위 값을 선정하였다. 원통형 부재의 구조 응답은 옥대칭 유한요소로서 구조해석을 수행하여 제한식을 설정하였으며, 직접미분에 의해서 설계 민감도를 구하고, 최적화 알고리즘과 결합하여 최적의 공차를 제시하였다.

### Abstract

A general formulation of the long cylinder tolerance design for the joint structure is here presented. The aim of this paper is to calculate the tolerance of joint by defining tolerance as a kind of uncertainty and to obtain the robustness of the joint structure. It is formulated on the bases of the minimum sensitivity theorem. The objective function is the tolerance sensitivity for the Von-Mises stress. It also took into full account the stress, displacement and weight constraints.

PLBA (Pshenichny-Lim-Belegundu-Arora) algorithm is used to solve the constrained nonlinear optimization problem. The finite element analysis is performed with CST (Constant-Strain-Triangle) axisymmetric element. Sensitivities for design variables are calculated by the direct differentiation method. The numerical result is presented for the cylindrical structure where the joint tolerance is treated as random variables.

*Keywords : minimum sensitivity theorem, joint structure, CST axisymmetric element, optimum design, sensitivity analysis, joint design*

## 1. 서 론

공차는 특정 치수가 변화할 수 있는 용량으로

허용 한계 치수간의 차이이다. 특정한 공차를 선택하는 것은 제작시의 비용과 관련이 있다. 공차를 작게 설정하면 정밀도 측면에서는 좋지만 제

\* 정회원·부산대학교 기계공학과 기계기술연구소, 교수

\*\* 부산대학교 기계공학과, 박사과정

\*\*\* 삼성자동차

\*\*\*\* 정회원·동의공전 컴퓨터응용설계과, 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시던 1998년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

작비용이 증가한다. 또한, 공차를 크게 주면 제작 단가는 감소하겠지만, 시스템의 호환성이나 기능성 측면에서 제약이 따를 수 있다. 공차 선정에 관해서는 많은 연구가 선행된 바 있다. 그 중에서도 1984년에 Chen, Wang<sup>1)</sup>은 프린터 액츄에이터의 공차 설계에 기준 성능을 만족하면서 공차를 설계하는 문제를 선형계획법으로 구한 바 있다. 1989년 Lee와 Woo<sup>2)</sup>는 공차를 랜덤 변수로 설정하여 확률론적 최적화기법을 적용하여 기존의 공차 집합 중에서 시스템의 제약조건에 맞는 공차를 구하였다. 1992년에 Belegundu와 Zhang<sup>3)</sup>은 구조물의 한쪽 변의 길이를 불확정 변수로 선정하여 최소 민감도 이론에 의하여 비선형 계획법으로 길이 공차를 계산한 바 있다.

본 연구에서는 길이가 긴 원통형 실린더를 구성함에 있어서 제작과 정비를 용이하게 하기 위하여 실린더를 여러 개의 부분으로 나누고, 이를 결합하는 데 사용될 조인트 부재에 대한 공차설계를 수행하였다. 즉, 원통형 실린더를 체결할 때 사용되는 조인트 부품 가운데 스톨드 볼트(stud bolt)를 최소 민감도해석(minimum sensitivity analysis)<sup>4)</sup>에 의해 공차설계를 하였다. 최소민감도해석은 불확실성에 대한 응답의 민감도를 최소화함에 의해 불확실성으로 인한 결과의 오차를 감소시켜 구조물의 안정성을 부여한다. 불확정변수에 대한 구조물 응답의 민감도를 최소화함에 의해 파괴의 가능성이 감소한다는 것에 대한 증명은 구조물 응답이 불확정변수에 대해 선형과 비선형일 경우에 참고문헌<sup>3)</sup>에 제시되어 있다.

최소 민감도 이론에 의한 조인트 부재의 공차 설계 정식화가 일반적인 구조물 최적화와 다른 점은 목적함수가 폰 마이세스 응력의 공차에 대한 민감도가 되고, 여러 부등호 제약식 중에서 자중이 부등호 제한식에 포함된다는 데 있다. 조인트 부재의 경우 자중에 대한 타당한 부등호 제한식을 설정하기 위하여 우선 확정적인 경우에 대한 최적설계를 수행하여 그 값을 갖도록 하였다. 원통형 부재의 구조 응답은 축대칭 유한요소로서 구조해석을 수행하여 제한식을 설정하였으며, 직접미분에 의해서 설계 민감도를 구하고 최적화 알고리즘과 결합하여 최적의 공차를 제시하였다.

## 2. 모델 선정

### 2.1 문제 설정

두개의 원통형 실린더를 체결하기 위한 조인트 부재가 Fig. 1에 나타나있다. Fig. 1의 (a)와 (b)는 조인트에 의해 실린더가 연결된 부분의 단면으로 빗금친 부분이 V 밴드형 조인트 부재이다. Fig. 1의 (c)는 (b)의 원내의 상세도로서 조인트가 보울트에 의해 연결된 그림이다. 조인트 부재는 수중에서 6.027MPa의 압력을 받는다. 실린더와 조인트 부재는 알루미늄 Al 6061-T6 합금판을 롤링하여 제작된다. 수치 해석에서는 조인트의 탄성계수를 68.9GPa로, 포아송비는 0.33으로 하였다. 조인트의 자세한 물성치는 Table 1에 제시되어 있다.

본 논문에서 적용한 모델은 Fig. 1(a) 앞 부분에는 원추형 몸체가 실린더 평형부에 체결되며, Fig. 1(a) 뒤에는 콘형 몸체가 체결되어 하나의

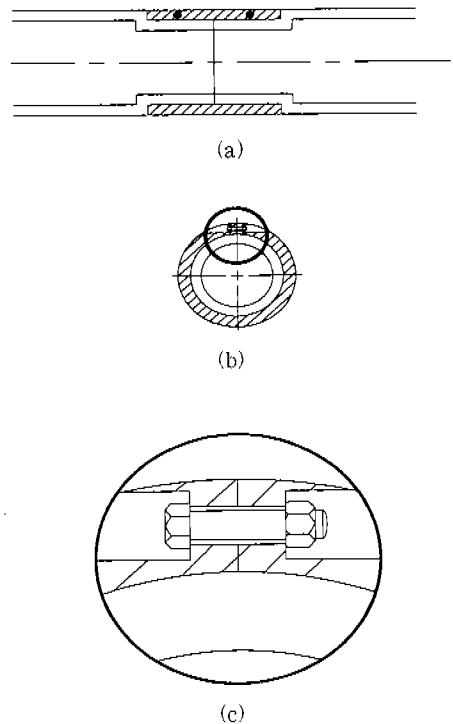


Fig. 1 Cylindrical joint structure

Table 1 Material properties of joint structure

material property	value
Young' modulus	68.9GPa
Poisson' ratio	0.33
weight density	$2.7 \times 10^{-5} \text{N/mm}^3$
yield strength	276MPa

시스템으로 구성되어 있다. 조인트 부재는 그림에서 보듯이 평형부 몸체 사이를 체결하기 위하여 사용되며 조인트 부재에 대한 공차 설계를 수행하기 위하여 전체 시스템 중에서 조인트 부재가 사용된 부분만 등가 시스템으로 구성하여 해석하였다. 즉, 전체 시스템에 대한 유한요소해석을 수행하여 변위를 구한 후 실린더와 조인트의 양단 접합 부분에서의 변형을 경계조건으로 적용하여 등가 시스템을 구성하였다. Fig. 1(a)에서 해칭된 부분이 조인트인데 이는 실린더 외부와 접촉되어 있다. 조인트 부재의 공차설계를 수행하기 위해서는 우선적으로 실린더의 두께를 설계하여야 하며, 이때 조인트 부재와 접촉된 실린더 외부에 변위 경계조건을 적용하였다. Fig. 1(b)는 조인트 부재의 측면도이며, (c)는 상세도이다.

2.2 설계변수 선정

조인트에 의해 체결된 실린더가 기하학적 형상과 외부 수압에 대해 축대칭이므로 삼각형 축대칭요소<sup>5)</sup>를 사용하여 유한요소 모델링하였다. 앞에서 언급하였듯이 전체 시스템에서는 앞, 뒤에 각각 원추형 및 콘형 실린더가 체결되므로 전체를 해석하기 위하여 축대칭 삼각형 요소를 사용하였다. 이렇게 해서 구성한 등가 유한요소 모형을 Fig. 2에 도시하였다. 그림에서 유한요소 모델은 절점수가 50개이며, 요소수는 48개이다. 절점 1, 2, 49, 50에서는 등가의 시스템을 구성하기 위하여 전체 실린더가 완전히 체결된 상태에서 구한 양단의 변위를 경계조건을 설정하였다. 이는 실린더의 공차가 영인 조인트에 의해 완전히 체결된 상태에서 ANSYS<sup>6)</sup>로 유한요소 해석을 하여 양단의 변위를 구하여 경계조건으로 설정하였다.

조인트 부재의 설계 변수는 조인트 부재의 두

께로 선정하였으며, 조인트의 외측반경은 제작시에 중심 축을 기준으로 동일해야 하므로 조인트의 내측반경에 걸친 절점 25개를 설계변수로 택하여 각각의 두께가 동일하도록 설계변수를 그룹화하였다.

Fig. 2는 조인트 부재를 삼각형 축대칭요소를 사용하고, 수중에서 수압을 받는 경우에 대해 도시하였다. 실린더의 길이는 380mm이고, 축방향 절점간의 거리는 15.83mm로 동일하다. 그림에서 1, 2와 같은 숫자들은 절점 번호를 의미하며, ①은 요소 번호를 의미한다. 요소번호는 왼쪽에서 오른쪽으로 순차적으로 번호를 부여하였다.  $R_i$ 는 조인트의 내측반경으로 설계변수이고,  $R_o$ 는 조인트의 외측반경이다.

조인트의 제작과정에서 생긴 공차는 Fig. 3의 (a)와 같이 정의된다. 공차설계는 조인트 부재의 두께가 선정된 후 최소민감도 이론에 의해서 구해진다. 조인트의 부재 공차설계에서  $\delta$ 는 불확정 변수이자 설계변수이다.

공차에 의해 떨어진 조인트의 양끝은 얇은 원통이 내압을 받아서 원주방향으로 공차만큼 늘어나서 체결되는 것으로 가정하고 이에 의해 생겨난 응력을 이론 식에 의해 구하였다. 이론 식에 의해 구해진 응력은 유한요소해석시 잔류응력의 항으로 적용하였다. Fig. 3의 (b)는 내압에 의해 얇은 원통이 원주방향으로  $\delta$ 만큼 늘어났을 때 원주 방향 반경의 변화를 보여주고 있다.

조인트 부재는 원주 방향으로의 조여지고, 반

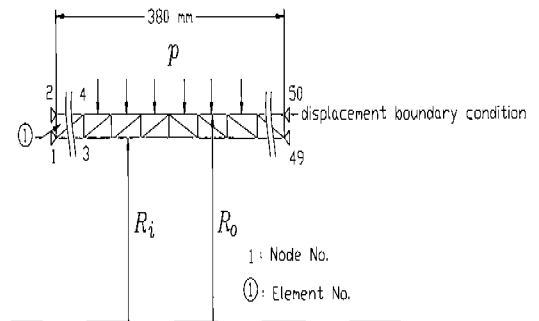


Fig. 2 Axisymmetric elements and design variable

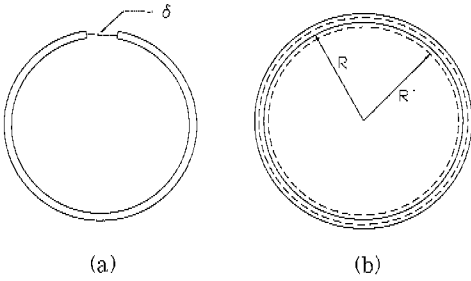


Fig. 3 (a) Tolerance of joint (b) Variation of radius by internal press

경 방향으로는 늘어나서 실린더와 밀착된 상태로 볼트로 체결된다. 그러므로 원주방향으로 공차만큼 늘어난 것이라 가정하였고 구한 응력은 조인트를 얇은 원통이라 가정하였고 내압에 의해 얇은 원통이 공차만큼 원주방향의 길이가 늘어났다고 가정하였다. 또한 원주 방향으로서는 외측과 내측이 늘어난 변형률이 달라 외측반경과 내측반경의 중간값을 응력으로 사용하였다<sup>7)</sup>.

$$\sigma_{\theta} = \frac{E\delta}{\pi(R_i + R_o)} \tag{1}$$

조인트가 체결될 때 부재가 받는 반경방향의 응력은 내측반경에서는 내압과 같고 외측반경에서는 영이므로 선형으로 변환한다고 가정한다. 따라서 중간에서 반경방향의 응력은 내측반경과 외측반경에서의 값의 평균값을 응력으로 사용하였다.

$$\sigma_{\theta,r} = -\frac{p}{2} = \frac{(R_i - R_o)E\delta}{\pi(R_i + R_o)^2} \tag{2}$$

여기서 E는 탄성계수, delta는 공차, p는 압력, R<sub>i</sub>, R<sub>o</sub>는 각각 조인트의 내측반경과 외측반경이다.

### 3. 최소민감도이론에 의한 공차설계 정식화

#### 3.1 최소민감도해석의 정식화

최소민감도해석에 의한 조인트의 공차설계는 설계자에 의해서 설정되는 설계변수와 정확히 결

정되지 않은 불확정 변수를 사용하여 비선형 계획법으로 정식화할 수 있다. 즉, 설계변수는 원통형 쉘의 두께이고, 조인트 부재의 공차가 불확정 변수이다. 목적함수는 조인트 부재에서 폰 마이세스 응력이 가장 큰 요소의 불확정 변수에 대한 미분 값이다.

$$\text{Minimize } \left| \frac{d\Psi_0(b, \delta)}{d\delta} \right| \tag{3}$$

$$\text{Subject to } K(b) \cdot z = F \tag{4}$$

$$\Psi_j(b, \delta, z(b)) \leq 0 \quad j=1, m \tag{5}$$

$$b_k^L \leq b_k \leq b_k^U \quad k=1, n \tag{6}$$

식 (3)에서 b는 설계변수, delta는 불확정변수로 공차이고, 목적함수는 응력이 가장 큰 요소에서의 폰 마이세스 응력의 공차에 대한 민감도이다. 폰 마이세스 응력은 다음 식으로 구하였다.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_r)^2] + 3\tau_{rz}^2} \tag{7}$$

유한요소해석에서 응력은 하중에 의한 응력에 잔류응력의 항이 더해진 식으로 나타난다<sup>8)</sup>.

$$\{\sigma\} = [D][B]\{z\} + \{\sigma_0\} \tag{8}$$

여기서 {sigma}^T = [sigma\_r, sigma\_theta, tau\_rz, sigma\_z] 이고,

$$\{\sigma_0\}^T = \left[ \frac{(R_i - R_o)E\delta}{\pi(R_i + R_o)^2}, 0, 0, \frac{E\delta}{\pi(R_i + R_o)} \right] \tag{9}$$

식 (7)을 불확정 변수 delta에 대해 미분하여 목적함수를 구하면

$$\frac{d\Psi_0}{d\delta} = \frac{(\sigma_r - \sigma_z) \left( \frac{d\sigma_r}{d\delta} - \frac{d\sigma_z}{d\delta} \right) + (\sigma_z - \sigma_\theta) \left( \frac{d\sigma_z}{d\delta} - \frac{d\sigma_\theta}{d\delta} \right) + (\sigma_\theta - \sigma_r) \left( \frac{d\sigma_\theta}{d\delta} - \frac{d\sigma_r}{d\delta} \right) + 6\tau_{rz} \frac{d\tau_{rz}}{d\delta}}{\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_r)^2] + 3\tau_{rz}^2}} \tag{10}$$

식 (4)는 유한요소법으로 구성되는 정적 평형 방정식으로 최적화 문제에서 등호제약조건이 된

다.  $K$ 는 구조물의 강성행렬,  $z$ 는 변위벡터, 그리고  $F$ 는 하중벡터이다.

식 (5)는 부등호 제한조건으로  $m$ 은 제한조건식의 개수이며 정규화하였다. 식 (5)에 포함되는 부등호 제한조건 중 변위값에 대한 제한조건식은 다음과 같다.

$$\frac{|z_{il}|}{z_{al}} - 1.0 \leq 0, \quad i=1, l \quad (11)$$

여기서  $l$ 은 전체 자유도에서 경계조건을 제외한 값이고,  $z_{al}$ 은 허용변위이다.

응력에 대한 조건식은 다음과 같다.

$$\frac{\{\sigma_{mj}\}_j}{\sigma_{aj}} - 1.0 \leq 0, \quad j=1, ne \quad (12)$$

여기서,  $\sigma_{aj}$ 은 허용응력이고  $ne$ 는 조인트의 모델요소 수이다.

자중에 대한 조건식은 다음과 같다.

$$\frac{V}{V_0} - 1.0 \leq 0. \quad (13)$$

여기서,  $V_0$ 는 자중의 허용량이다.

자중의 허용량을 결정하기 위하여 확정적인 최적설계가 최소민감도해석에 앞서 수행된다. 확정적인 최적설계에서 목적함수는 자중이 되고 제한조건식에서 자중 제한조건식은 제외된다. 설계변수는 내측반경 하나로 하고 공차에 의한 영향은 제외된다. 확정적인 최적설계에서 구한 목적함수는 최소민감도 해석의 자중 제한조건식에 포함된다.

본 문제에 대한 확정적인 경우의 최적설계에 대한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize Weight} \quad (14)$$

$$\text{Subject to } K(b) \cdot z = F \quad (15)$$

$$\Psi_j(b, z(b)) \leq 0 \quad j=1, m \quad (16)$$

$$b_k^l \leq b_k \leq b_k^u \quad k=1, n \quad (17)$$

식 (14)에서 (17)이 최소 민감도 이론에 의한 정식화와 다른 점은 일반적인 최적설계의 경우와 같이 무게(부피)를 최소화하면서 제약조건을 만족하는 설계변수를 찾는다는 데 있다.

식 (6)은 기하학적 제한 조건으로  $b$ 는 설계변수를 나타내며, 하점자  $n$ 은 설계변수의 개수를 나타내고 상점자  $L$ 과  $U$ 는 각각 하한과 상한을 나타낸다.

### 3.2 설계 민감도

목적함수와 제한조건식의 설계변수에 대한 민감도는 최적화 알고리즘에서 설계변수의 변화방향을 탐색하는 자료이다<sup>9),10)</sup>. 본 논문에서는 직접 미분법을 사용하여 설계민감도를 유도하였으며, 그 값을 차분값과 비교하였다.

식 (4)는 설계변수와 상태변수의 함축함수로 되어 있으므로 상태변수에 대한 설계변수의 민감도는 연쇄법칙에 의해 구하였다.

$$\frac{dz}{db} = K^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial b} - \frac{\partial(K \cdot \tilde{z})}{\partial b} \right) \quad (18)$$

여기서  $\tilde{z}$ 은 미분하는 동안 고정된다는 것을 의미하고 우변의 하중에 대한 설계변수의 민감도는 영이다. 식 (14)에서 상태변수의 민감도 값은 강성행렬의 역행렬을 구해야 하나 역행렬을 구하는 것은 비효율적이므로 Gauss 소거법으로 해를 구하였다. 요소 강성행렬은 다음 식에 의해 구한다.

$$K^e = \int_{\Omega} B^T DB |J| d\Omega \quad (19)$$

요소 강성행렬을 직접 미분하면 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^e}{\partial b} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial B^T}{\partial b} DB + B^T D \frac{\partial B^T}{\partial b} \right] |J| d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left[ B^T DB \frac{\partial |J|}{\partial b} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,  $B$ 와  $D$ 는 각각 변형률-변위 관계행렬과

응력-변형을 관계행렬이고  $|J|$ 는 자코비안 행렬의 행렬식이다.

식 (20)에서 우변의 적분 항들을 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial K^c}{\partial b} = 2\pi A \frac{\partial \bar{r}}{\partial b} B^T D B + 2\pi \bar{r} A B^T D \frac{\partial B}{\partial b} + 2\pi \bar{r} A B D \frac{\partial B^T}{\partial b} + 2\pi \bar{r} \frac{\partial A}{\partial b} B^T D B \quad (21)$$

여기서,  $A$ 는 요소당 면적이고  $\bar{r}$ 는 삼각형 요소의 도심반경이다.

식 (21)을 (18)에 대입하여 변위의 민감도를 구한다.

응력에 대한 민감도는 식 (8)로부터 다음 식으로 나타난다.

$$\frac{d\sigma}{db} = DB \frac{dz}{db} + \frac{\partial(DB)}{\partial b} \cdot z + \frac{\partial\sigma_s}{\partial b} \quad (22)$$

식 (18)에 의해 구해진 변위 민감도를 (22)에 대입하여 응력 민감도를 구한다.

자중에 대한 민감도는 다음 식에 의하여 계산된다.

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \sum_{i=1}^{NF} 2\pi\rho \frac{\partial \bar{r}}{\partial b} A_i + \sum_{i=1}^{NF} 2\pi \bar{r} \rho \frac{\partial A_i}{\partial b} \quad (23)$$

여기서,  $\rho$ 는 비중이다.

### 3.3 흐름도

본 논문에서 최적화 알고리즘으로 사용한 PL-BA (Pshenichny-Lim-Belegundu-Arora)<sup>11)</sup>는 반복 이차 계획법의 하나로 설계방향을 탐색할 때 헤시안 행렬(Hessian matrix) 수정과정과 잠재집합방책을 포함하고 있다. PLBA 알고리즘은 본 논문에서와 같이 제약조건이 많은 공학 문제를 풀 때 활성화된 제약조건 of 함수값과 기울기를 사용하여 개선된 설계값을 제공해 준다.

두 실린더가 조인트에 의해 체결 상태에서 외압을 받을 때 유한요소해석을 하여 조인트의 기하학적 형상과 경계조건이 입력자료가 된다.

최소민감도이론에 의한 설계를 수행하기에 앞

서 자중 제한조건식의 범위를 설정하기 위하여 확정적인 최적설계가 먼저 수행하였다. 조인트 부재의 공차설계 과정은 3.1절의 정식화를 바탕으로 한다. Fig. 4는 최소민감도이론에 의한 조인트의 공차설계에 대한 흐름도이다.

### 4. 수치 해석 및 검토

본 절에서는 앞절의 정식화를 바탕으로 수치해석한 결과에 대하여 언급하였다. 편의상 유한요소 해석 프로그램과 민감도 해석 프로그램, 최적설계 알고리즘을 통합한 프로그램 명을 TDJ (Tolerance Design of Joint)라 명한다. 공차설계 결과를 언급하기 전에 TDJ에서 계산된 변위,

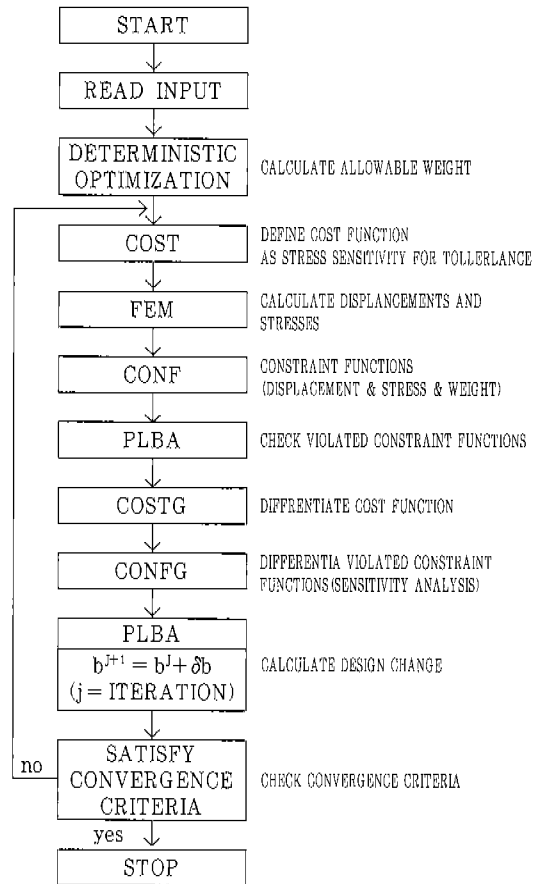


Fig. 4 Flow chart of tolerance design by minimum sensitivity

응력의 타당성을 입증하기 위하여 상용 해석 프로그램인 ANSYS 프로그램과 그 결과를 비교 검토하였다. 마찬가지로 직접미분법에 의해 구해진 설계변수에 대한 민감도 해석결과를 차분법과 비교한 후 최소민감도이론에 의한 공차설계를 수행하였다. 수치해석은 HWS-S200K 워크스테이션에서 FORTRAN 언어를 사용하여 수행하였다.

4.1 구조해석 결과

최적설계를 수행하기 위하여 정의한 제한식에 대한 값의 적합 여부를 검토하기 위하여 TDJ에서 구조해석을 수행한 결과와 ANSYS 해석결과를 비교하였다. 축 대칭요소를 사용하여 해석하였으므로 전체 50개의 절점 중에서 25번까지의 절점과 48개의 요소 중에서 24번까지의 요소를 비교하였다. Table 2는 내측반경과 외측반경에 대해 반경방향의 변위값을 TDJ 해석결과와 ANSYS 해석결과이며, Table 3은 폰 마이세스 응력을 비교한 표이다. 표에서 절점번호와 요소번호는 Fig. 2에서 도시하였다.

Table 2, 3으로부터 TDJ 해석결과와 ANSYS 해석결과 경향이 일치하고 있고, 최고 상대오차도 0.5%이다. 그러므로 최적설계 수행시 응력 제한식 설정에 있어서의 타당성이 확보되었다. 이상의 결과에서 TDJ프로그램을 수행할 때 변위 및 응력 제한식 설정에 신뢰성을 가질 수 있다.

4.2 민감도 해석결과

본 절에서는 직접 미분법에 의해 계산된 해석적인 민감도 값을 유한 차분법과 비교하였다. 유한 차분법에 의한 민감도는 다음 식에 의하여 계산하였다.

$$\Delta \phi = \frac{\phi(b + \Delta b) - \phi(b)}{\Delta b} \tag{24}$$

식 (24)에서  $\phi(b)$ 는 초기 설계변수에 의해 계산됨을 의미하고  $\phi(b + \Delta b)$ 는 설계변수에 변동량을 주어서 구한다. 조인트의 내측반경을 편의상 설계변수 1이라 칭한다.

설계변수 1에 대한 차분량은 조인트의 두께에 대해 1%, 즉 내측반경에 대해 0.03846%로 값을 구하였고 설계변수 2에 대한 차분량은 0.01mm로

Table 2 Displacement comparison between TDJ and ANSYS

Node No	ANSYS		TDJ	
	Radial(mm)	Axial(mm)	Radial(mm)	Axial(mm)
1	-0.204	0.124E-2	-0.204	0.124E-2
2	-0.201	0.821E-2	-0.201	0.821E-2
3	-0.212	0.106E-1	-0.212	0.107E-1
4	-0.207	0.489E-2	-0.207	0.488E-2
5	-0.239	0.163E-1	-0.239	0.163E-1
6	-0.234	0.605E-2	-0.234	0.604E-2
7	-0.270	0.186E-1	-0.270	0.186E-1
8	-0.264	0.806E-2	-0.265	0.804E-2
9	-0.296	0.187E-1	-0.297	0.187E-1
10	-0.291	0.992E-2	-0.291	0.990E-2
11	-0.317	0.175E-1	-0.317	0.175E-1
12	-0.311	0.112E-1	-0.311	0.111E-1
13	-0.330	0.158E-1	-0.330	0.158E-1
14	-0.324	0.118E-1	-0.325	0.118E-1
15	-0.338	0.140E-1	-0.338	0.139E-1
16	-0.332	0.118E-1	-0.332	0.118E-1
17	-0.341	0.122E-1	-0.341	0.122E-1
18	-0.335	0.113E-1	-0.336	0.113E-1
19	-0.342	0.107E-1	-0.342	0.107E-1
20	-0.336	0.105E-1	-0.337	0.105E-1
12	-0.342	0.942E-2	-0.342	0.937E-2
22	-0.336	0.957E-2	-0.336	0.957E-2
23	-0.341	0.826E-2	-0.341	0.823E-2
24	-0.335	0.849E-2	-0.335	0.850E-2
25	-0.341	0.737E-2	-0.341	0.737E-2

Table 3 Equivalent stress comparison between TDJ and ANSYS

Element No.	ANSYS (MPa)	TDJ (MPa)
1	111.511	111.465
2	99.581	99.975
3	104.833	103.951
4	102.671	102.732
5	108.895	107.830
6	113.204	113.280
7	118.272	117.448
8	124.189	124.479
9	127.206	126.773
10	132.840	133.393
11	133.899	133.848
12	138.655	139.435
13	138.266	138.509
14	142.038	142.973
15	140.762	141.194
16	143.657	144.670
17	141.949	142.472
18	144.161	145.191
19	142.330	142.870
20	144.079	145.080
12	142.300	142.810
22	143.805	144.757
23	142.135	142.594
24	144.484	145.425

하여 계산하였다.

민감도 계산식을 이용하여 초기 설계값에 대한 일부 제한 조건식의 기울기 값을 계산하였는데, 그 결과가 Table 4와 Table 5에 나타나 있다. Table 4는 설계변수 1에 대한 반경방향 변위에 대한 설계민감도 값이며, Table 5는 설계변수 1에 대한 등가응력 민감도 값이다. Table 4와 5에서  $\Delta\psi$ 는 식 (24)의 유한차분법에 의하여 계산된 값이며,  $\psi'$ 는 직접 미분법에 의하여 구해진다.  $\psi'$ 와  $\Delta\psi$ 의 비교는 100을 곱하여 민감도의 정확성을 백분율로 표시하였다. 표에서 절점번호와 요소번호는 Fig. 2에서 도시하였다.

Table 4의 설계변수 1에 대한 반경방향 변위의 설계 민감도 계산 결과로부터 직접 미분법과 유한 차분법에 의한 민감도 값의 상대오차가 101%로 나타났다. 절점 1번과 2번은 경계조건이 되어 있는 곳이기에 민감도 계산에서 제외되었다. Table 5의 설계변수 1에 대한 등가응력의 설계 민감도 계산 결과에서도 상대오차가 101%로 나타났다. 두 값의 비교에서 상대오차 100%가 정확하게 일치하는 값이기 때문에 본 논문에서

Table 5 Sensitivity of equivalent stress for design variable 1

Node No.	$\Delta\psi$	$\psi'$	$\frac{\Delta\psi}{\psi'} \times 100 (\%)$
1	19.900	19.590	101.58
2	8.921	8.783	101.56
3	9.800	9.681	101.23
4	8.952	8.849	101.16
5	11.310	11.188	101.08
6	13.663	13.510	101.13
7	16.057	15.877	101.12
8	18.548	18.343	101.11
9	20.232	20.007	101.12
10	22.117	21.878	101.09
11	23.034	22.783	101.10
12	24.278	24.021	101.07
13	24.627	24.364	101.07
14	25.344	25.080	101.05
15	25.358	25.093	101.05
16	25.689	25.425	101.04
17	25.556	25.293	101.04
18	25.635	25.374	101.03
19	25.478	25.217	101.03
20	25.421	25.163	101.02
12	25.307	25.050	101.02
22	25.214	24.959	101.02
23	25.162	24.907	101.02
24	25.139	24.885	101.02

최적설계 탐색방향 계산에 사용될 민감도 값에 신뢰성을 확보할 수 있다.

Table 4 Sensitivity of radial displacement for design variable 1

Node No.	$\Delta\psi$	$\psi'$	$\frac{\Delta\psi}{\psi'} \times 100 (\%)$
3	-6.359E-3	-6.290E-3	101.10
4	-6.648E-3	-6.578E-3	101.06
5	-1.998E-2	-1.976E-2	101.10
6	-2.020E-2	-1.998E-2	101.09
7	-3.419E-2	-3.382E-2	101.09
8	-3.434E-2	-3.397E-2	101.09
9	-4.581E-2	-4.532E-2	101.07
10	-4.589E-2	-4.540E-2	101.07
11	-5.386E-2	-5.330E-2	101.05
12	-5.389E-2	-5.333E-2	101.05
13	-5.862E-2	-5.802E-2	101.03
14	-5.862E-2	-5.802E-2	101.03
15	-6.087E-2	-6.025E-2	101.02
16	-6.085E-2	-6.024E-2	101.02
17	-6.149E-2	-6.088E-2	101.00
18	-6.147E-2	-6.086E-2	101.00
19	-6.126E-2	-6.065E-2	100.99
20	-6.124E-2	-6.063E-2	100.99
12	-6.072E-2	-6.012E-2	100.99
22	-6.070E-2	-6.010E-2	100.99
23	-6.022E-2	-5.963E-2	100.99
24	-6.021E-2	-5.962E-2	100.99
25	-5.997E-2	-5.938E-2	100.99

### 4.3 확정적인 최적설계 결과

본 절에서는 자중을 목적함수로 한 확정적인 최적설계에 대한 결과를 언급하였다. 확정적인 최적설계로부터 구해진 목적함수는 최소민감도 해석에서 자중 제한조건식의 자중 허용량이 된다.

확정적인 최적설계 결과는 PLBA 알고리즘을 이용하여 문제를 풀었다. PLBA 알고리즘을 사용하기 위해서 초기에 몇 개의 매개변수에 대한 값을 지정해 주어야 한다<sup>11)</sup>. 벌칙 매개변수는 설계점을 유용영역(feasible region)의 경계에 위치하도록 제어하는 변수이다. 활성화 제한조건식의 폭은 잠재 집합을 결정하는데 사용되며, 이 값이 커지면 많은 제한 조건식이 활성화되어진다. 최적해의 정확도는 수렴기준(convergence criteria)으로 사용되며, 선택식의 정확도는 이동 거리를 결정하기 위하여 사용되는 기준이다.

본 논문의 수치해석에서는 벌칙매개변수는 1.0,



활성화 제한 조건식의 폭은 0.1, 최적치의 정확도는  $1.0 \times 10^{-4}$ , 선택색의 정확도는  $1.0 \times 10^{-5}$ 을 택하여 수치해석하였다.

설계변수 1의 초기치는 조인트의 내측반경 156mm를 선정하여 그룹화 하였고 설계변수의 상한과 하한은 각각 162mm, 152mm로 하였다. 설계변수 2에 대한 상한과 하한은 각각 0.0mm, 3.5mm로 하였고 초기치는 0.0mm로 하였다. 제한식의 수는 변위에 대한 것이 92개, 응력에 대한 것이 48개로 총 140개이다. 허용변위 값은 반경방향으로 3.0mm, 축방향으로 5.0mm로 하였으며 허용응력은 항복응력, 276MPa을 선정하였으며 안전계수는 1.5로 하였다.

확정적인 최적설계 수행 후 최적해에서 설계변수인 내경과 무게는 각각 6mm, 6.2755kg에서 6회의 반복회 동안 4.79mm와 5.0239kg으로 감소하였다. 확정적인 최적설계 후 무게는 19.9% 감소하였다. Fig. 5에는 반복회당 자중의 감소 과정을 도시하였으며, 함수의 계산은 6회의 반복회 동안 함수계산은 14번하였고, 목적함수의 기울기 계산회수는 6번, 제한식의 민감도 계산은 5번 수행하였다.

#### 4.4 최소민감도이론에 의한 공차설계

최소민감도이론에 의한 공차설계는 2절의 정식화를 바탕으로 수행하였다. 최적화 알고리즘으로는 PLBA를 사용하였고 별첨매개변수, 활성화 제한조건식의 폭, 최적치의 정확도와 선택색의 정확도는 확정적인 최적설계와 동일한 값을 사용하였다. 설계변수 1의 초기치는 156mm이고 상한과 하한은 각각 157.21mm, 152mm로 하였다. 상한은 확정적인 최적설계에서 구한 값으로 공차가

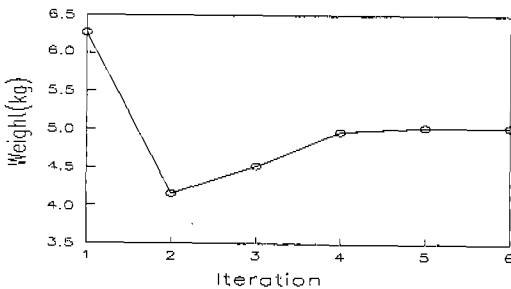


Fig. 5 Weight history for the deterministic case

영일 때 수중에서 조인트가 견딜 수 있는 최소 두께를 결정한다. 설계변수 2에 대한 초기치, 상한과 하한은 확정적인 최적설계와 동일하다.

정식화에서 확정적인 최적설계와의 차이점은 목적함수가 폰 마이세스 응력의 공차에 대한 민감도이고 자중이 제한식에 포함된다는 것이다. 따라서 전체 제한식의 수는 141개이다. 여기서 목적함수는 초기모델의 유한요소해석시 가장 큰 폰 마이세스 응력을 나타낸 24번 요소에 대한 폰 마이세스 응력의 공차에 대한 민감도이다.

Fig. 6은 자중의 제한식에서 허용량을 확정적인 최적설계 수행 결과에 의한 값, 5.0239kg일 경우에 민감도를 최소화하는 공차를 구하기 위해 반복회당 응력의 공차에 대한 민감도의 감소과정을 나타낸다. 반복계산 13회 후에 함수의 계산은 30회 목적함수와 제한식의 민감도계산은 각각 13회 수행하였다. 최적화 과정에서 공차에 대한 응력의 민감도는 초기 67.14에서  $5.839 \times 10^{-3}$ 으로 감소하였고, 조인트 부재의 공차는 2.5391mm가 되었다.

Fig. 7은 자중에 대한 부등호 제한식에서 허용량을 확정적인 최적설계 수행 결과보다 20% 큰 6.0287kg일 때의 반복회당 공차에 대한 목적함수의 감소과정을 나타낸다. 반복계산 13회 동안 함수의 계산은 35회 하였고 목적함수의 민감도 해석은 13회, 제한조건식의 민감도 해석은 5회 하였다. 해석결과 조인트의 자중은 5.3851kg이었고 내측반경은 156.86mm이었다. 공차에 대한 응력의 민감도는 초기치 67.14에서  $9.095 \times 10^{-4}$ 로 감소하였다. 여기서 구해진 공차는 2.3608mm이다.

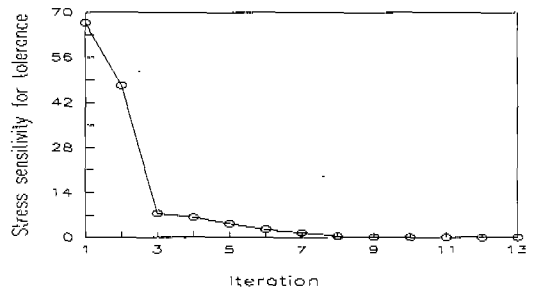


Fig. 6 Sensitivity history for 5.0239kg weight limit

5. 결 론

원통형 실린더로 구성된 수증 압력용기를 체결하는데 사용되는 조인트 부재는 공차에 대한 조인트의 안정성을 높이기 위해 최소민감도이론을 적용하여 조인트 부재의 공차를 제시하였다. 최소민감도이론의 정식화에서 확정적인 최적설계와의 차이점은 목적함수가 폰 마이세스 응력의 공차에 대한 민감도이고, 자중이 부등호 제한식에 포함된다는 데 있다. 즉, 일반적인 구조물 최적설계인 경우에는 자중이 목적함수가 되고, 변위, 응력 등이 제한조건식으로 설정된다. 조인트 부재의 경우 자중에 대한 적절한 부등호 제한식을 설정하기 위하여 우선 확정적인 경우에 대한 최적설계를 수행하였다. 원통형 부재의 구조 응답은 축대칭 유한요소로서 구조해석을 수행하여 제한식을 설정하였으며, 직접미분법에 의해서 설계민감도를 구하였고 최적화 알고리즘과 결합하여 최적의 공차를 구하였다. 이렇게 해서 구성된 프로그램의 계산값을 검증하기 위하여 구조 응답값은 상용 유한요소 해석 프로그램인 ANSYS와 비교 검증하였다. 또한, 설계 방향 탐색에 사용될 설계 민감도 값의 정확도를 확인하기 위하여 유한차분법과 비교하였다.

해석결과 자중의 허용량이 20% 증가하였을 때 민감도의 값이 확정적인 최적설계에서 구한 자중을 허용량으로 하였을 때 민감도의 값보다 작으므로 공차에 대한 불안정성이 더욱 감소하였다. 따라서 본 연구에서와 같이 조인트 부재를 설계할 때 최소민감도이론에 의하여 공차설계를 하면 보다 안정된 설계를 얻을 수 있다.

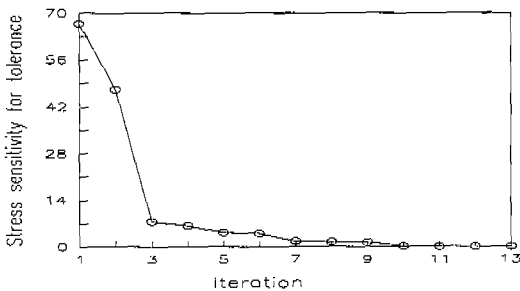


Fig. 7 Sensitivity history for 6.0287kg weight limit

참 고 문 헌

1. Chen, J. S. C., Wang, S., "Optimal Tolerance Design of a Printer Actuator", *Transactions of the ASME*, Vol. 106, Dec 1984, pp.510- 517.
2. Lee, W. J., Woo, T. C., "Optimum Selection of Descrete Tolerances", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 111, pp.243-251., 1989.
3. Belegundu, A. D., Zhang, S., "Robustness of Design Through Minimum Sensitivity", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 213-217, 1992.
4. Patil, U. R., Krishnaswami, P., "Minimum sensitivity Design of Planar Kinematic Systems", *ASME Design Automation Conference*, Vol. 23-2, Chicago, 1990.
5. Chandrupatla, T. R., Belegundu, A. D., *Introduction to Finite Elements in Engineering*, Prentice-Hall Inc., 1991.
6. G. J. DeSalvo, R. W. Gorman, *ANSYS Engineering Analysis System User's Manual*, Swanson Analysis System, 1989.
7. 엄기원, *고체역학*, 동명사, pp. 442-454, 1985.
8. 임상전, *곽병만, 이주성, 유한요소법 입문*, 동명사, 1989.
9. Haug, E. J., Choi, K. K., Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, 1984.
10. Zumwalt, K. W., El, M. E. M., "Design Sensitivity Derivatives for Isoparametric Elements as an Integrated Part of Finite Element Analysis", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 671-674, 1993.
11. Lim, O. K., Arora, J. S., "An Active Set RQP Algorithm for Engineering Design Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 55-65, 1986.

(접수일자 : 1997. 10. 1)